Časopis pro pěstování matematiky

Teo Sturm

Isotonní rozšíření isotonních zobrazení

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 3, 318--331

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108392`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ISOTONNÍ ROZŠÍŘENÍ ISOTONNÍCH ZOBRAZENÍ

TEO STURM, Praha

(Došlo 1. února 1966)

Základem článku je diplomová práce, kterou jsem konal v letech 1958–1959 u prof. NOVOTNÉHO DrSc; chtěl bych mu poděkovat i touto cestou za jeho tehdejší pomoc.

1. POMOCNÉ KONSTRUKCE A VĚTY

B buď množina uspořádaná relací $\leqq$, buď $A \subset B$ [1]), buď $x, y \in B$. Řekněme, že x, y *nejsou odděleny* A, existuje-li konečná posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ prvků z B taková, že je $x_0 = x$, $x_n = y$, pro každé $i = 0, \ldots, n - 1$ je x_i non $\parallel x_{i+1}$ (symbol $\parallel$ značí relaci nesrovnatelnosti příslušnou relaci $\leqq$) a žádné $a \in A$ neleží mezi x_i, x_{i+1} [2]). Nejsou-li x, y odděleny A, pišme $x\mathrm{A}y$.

Relace A je zřejmě ekvivalencí na $B - A$ a vytváří tedy na $B - A$ rozklad, který označíme B_{A}. Pro $x \in B - A$ nechť symbol $S(x)$ značí ten prvek rozkladu B_{A}, do kterého x patří. K rozkladu B_{A} dospějeme i jinak, pro libovolnou množinu $E \subset \subset B - A$ položme

$$D^0_{\mathrm{A}}(E) =$$
$$= \{x \mid x \in B - A;\ \text{existuje } y \in E \text{ tak, že je } x \leqq y \text{ a žádné } a \in A \text{ neleží mezi } x, y\},$$
$$H^0_{\mathrm{A}}(E) =$$
$$= \{x \mid x \in B - A;\ \text{existuje } y \in E \text{ tak, že je } y \leqq x \text{ a žádné } a \in A \text{ neleží mezi } x, y\}.$$

Pro $n \geqq 0$ celé položme dále

$$D^{2n+1}_{\mathrm{A}}(E) = H^0_{\mathrm{A}}[D^{2n}_{\mathrm{A}}(E)] \qquad D^{2n+2}_{\mathrm{A}}(E) = D^0_{\mathrm{A}}[D^{2n+1}_{\mathrm{A}}(E)]$$
$$H^{2n+1}_{\mathrm{A}}(E) = D^0_{\mathrm{A}}[H^{2n}_{\mathrm{A}}(E)] \qquad H^{2n+2}_{\mathrm{A}}(E) = H^0_{\mathrm{A}}[H^{2n+1}_{\mathrm{A}}(E)]$$

Takto jsou pro každé $n \geqq 0$ celé a každou $E \subset B - A$ definovány množiny

[1]) Inkluse $A \subset B$ v našem pojetí zahrnuje i případ množinové rovnosti $A = B$.

[2]) Prvek $x \in B$ leží mezi prvky $y, z \in B$ právě když platí $y \leqq x \leqq z$ nebo $z \leqq x \leqq y$ (viz BIRKHOFF [1], kde jsou uvedeny i četné jiné zde používané pojmy).

$H^n_A(E)$, $D^n_A(E)$ za předpokladu ovšem, že jsou dokázány inkluse $H^n_A(E) \subset B - A$, $D^n_A(E) \subset B - A$; to se však snadno nahlédne indukcí. Položme $\bar{S}(E) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} H^n_A(E)$, $\underline{S}(E) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} D^n_A(E)$.

Pro $x \in B - A$ množiny $H^n_A(\{x\})$, $D^n_A(\{x\})$, $\bar{S}(\{x\})$, $\underline{S}(\{x\})$ značme stručně $H^n_A(x)$, $D^n_A(x)$, $\bar{S}(x)$, $\underline{S}(x)$.

Lemma 1. *Buď $x \in B - A$, pak je $\bar{S}(x) = S(x) = \underline{S}(x)$.*

Důkaz. Je-li $y \in H^0_A(x)$, je zřejmě $y \in S(x)$; nechť pro $n \geqq 0$ celé platí inkluse $H^n_A(x) \subset S(x)$. Buď $y \in H^{n+1}_A(x)$, pak existuje $z \in H^n_A(x)$ takové, že platí y non $\parallel z$ a mezi y, z neleží žádný prvek z A, tedy je yAz. Dle indukčního předpokladu ale je xAz a tedy platí xAy. Pro každé $n \geqq 0$ proto platí inkluse $H^n_A(x) \subset S(x)$ a tedy i inkluse $\bar{S}(x) \subset S(x)$. Nechť je naopak $y \in S(x)$, pak existuje konečná posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^n$ taková, že je $x_0 = x$, $x_n = y$, pro $i = 0, \ldots, n - 1$ je x_i non $\parallel x_{i+1}$ a mezi x_i, x_{i+1} neleží žádný prvek z A. Indukcí snadno ukážeme platnost vztahu $x_i \in H^{2i}_A(x)$ pro každé $i = 0, \ldots, n$ a speciálně tedy $y \in H^{2n}_A(x) \subset \bar{S}(x)$. Platí proto i inkluse opačná. Druhá rovnost se ukáže analogicky.

Lemma 2. *Nechť E je množina. Každému $x \in E$ buď přiřazena množina $Q_0(x)$, β buď prvé ze všech ordinálních čísel α splňujících nerovnosti* card $Q_0(x) \leqq \aleph_\alpha$ *pro každé $x \in E$,* card $E \leqq \aleph_\alpha$. *$\gamma \geqq \omega_{\beta+1}$ buď ordinální číslo, pro každé $x \in E$ buď definována posloupnost množin $\{Q_\nu(x)\}_{\nu<\gamma}$ taková, že pro každé $x \in E$ platí*

a) *je-li $\nu + 1 < \gamma$, pak je $Q_{\nu+1}(x) \subset Q_\nu(x)$,*

b) *je-li $\xi < \gamma$, ξ limitní, pak je $Q_\xi(x) \subset \bigcap_{\nu<\xi} Q_\nu(x)$.*

Pak platí tato tvrzení:

1. *Pro každé $x \in E$ a libovolná ordinální čísla ξ, ν, $\nu < \xi < \gamma$ je $Q_\xi(x) \subset Q_\nu(x)$.*

2. *Existuje ordinální číslo $\lambda < \omega_{\beta+1}$ takové, že pro každé $x \in E$ je $Q_\lambda(x) = Q_{\lambda+1}(x)$.*

Důkaz. ad 1. Buď $\nu + 1 < \gamma$, pak dle a. platí $Q_{\nu+1}(x) \subset Q_\nu(x)$. Buď $\xi > 0$ ordinální číslo takové, že je $\nu + \xi < \gamma$ a nechť pro všechna $\eta < \xi$ ordinální čísla platí inkluse $Q_{\nu+\eta}(x) \subsetneq Q_\nu(x)$; je-li ξ limitní, je limitní i $\nu + \xi$ a pak dle b. je $Q_{\nu+\xi}(x) \subset \bigcap_{\eta<\nu+\xi} Q_\eta(x) \subset Q_\nu(x)$. Je-li $\xi = \eta + 1$, je $Q_{\nu+\xi}(x) = Q_{(\nu+\eta)+1}(x) \subset Q_{\nu+\eta}(x) \subset Q_\nu(x)$ jednak dle a., jednak dle indukčního předpokladu. Indukcí jsme takto ukázali, že pro každé $\xi > 0$ takové, že je $\nu + \xi < \gamma$, a $x \in E$ libovolné je $Q_{\nu+\xi}(x) \subset Q_\nu(x)$. Tvrzení 1. tedy platí, neboť ke každému η, $\nu < \eta < \gamma$ existuje právě jedno ξ takové, že $\nu + \xi = \eta$.

ad 2. Nechť pro každé $\nu < \omega_{\beta+1}$ existuje prvek $x = x(\nu) \in E$ takový, že je $Q_\nu[x(\nu)] - Q_{\nu+1}[x(\nu)] \neq \emptyset$, z každé $Q_\nu[x(\nu)] - Q_{\nu+1}[x(\nu)]$ vybereme pak po jednom prvku, který označíme $y(x, \nu)$. Z tvrzení 1. plyne, že jsou-li pro $\eta < \nu < \gamma$

prvky $y(x, \eta)$, $y(x, \nu)$ definovány, pak jsou různé. Pro $x \in E$ položme $P(x) = \bigcup_{\nu < \omega_{\beta+1}} \{y(x, \nu)\}$, kde $\{y(x, \nu)\}$ znamená prázdnou množinu není-li $y(x, \nu)$ definován a množinu obsahující právě jen prvek $y(x, \nu)$, je-li $y(x, \nu)$ definován. Zřejmě je $P(x) \subset Q_0(x)$ a platí proto card $P(x) \leqq \aleph_\beta$; tedy je $\sum_{x \in E}$ card $P(x) \leqq \sum_{x \in E}$ card $Q_0(x) \leqq \aleph_\beta^2 = \aleph_\beta$. Z druhé strany ale je $\sum_{x \in E}$ card $P(x) = \sum_{x \in E}$ card $\bigcup_{\nu < \omega_{\beta+1}} \{y(x, \nu)\} = \sum_{x \in E, \nu < \omega_{\beta+1}}$ card $\{y(x, \nu)\} \geqq \sum_{\nu < \omega_{\beta+1}}$ card $\{y[x(\nu), \nu]\} = \aleph_{\beta+1}$, neboť je $\{y[x(\nu), \nu]\} \neq \emptyset$. To je ale spor, existuje tedy $\lambda < \omega_{\beta+1}$ takové, že pro každé $x \in E$ je $Q_\lambda(x) - Q_{\lambda+1}(x) = \emptyset$, z čehož plyne (spolu s užitím předpokladu a.) tvrzení 2.

2. NUTNÁ PODMÍNKA PRO EXISTENCI ISOTONNÍHO ROZŠÍŘENÍ

Všude dál budou symboly A, B, C značit množiny, pro které platí $A \subset B$, $\leqq$ je relace uspořádání B, $\lesssim$ je relace uspořádání C. Symbol $\|$ značí jako obvykle relaci nesrovnatelnosti; z textu vždy vyplyne, značí-li relaci nesrovnatelnosti v B nebo v C. f bude označení isotonního zobrazení A do C, zobrazení $\bar{f}$ nazveme *isotonním rozšířením* zobrazení f z A na B, je-li $\bar{f}$ isotonní zobrazení B do C takové, že parciální zobrazení $\bar{f}_A$ je totožné s f.

Lemma 3. *X buď množina, pro každé $\nu \in X$ buď $a_\nu \in B_A$. Nechť pro každé $\nu \in X$ existuje zobrazení f_ν, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\nu$, nechť pro $\eta, \nu \in X$, $\eta \neq \nu$ platí $a_\eta \neq a_\nu$. Položme $g(x) = f(x)$ pro $x \in A$; je-li $\nu \in X$ a $x \in a_\nu$, položme $g(x) = f_\nu(x)$. Pak g je zobrazení $A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$ do C, které je isotonním rozšířením zobrazení f z A na $A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$.*

Důkaz. Sjednocení $A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$ je disjunktní[3]) a proto g je jednoznačně definováno. Zřejmě je parciální zobrazení g_A totožné s f, zbývá ukázat isotonii g.

Buď $x, y \in A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$, $x \leqq y$, pak jsou možné právě tyto případy: $x, y \in A$; pak je $g(x) = f(x) \lesssim f(y) = g(y)$, jak plyne z isotonie f. $x \in A$, $\nu \in X$, $y \in a_\nu$; pak je $g(x) = f_\nu(x) \lesssim f_\nu(y) = g(y)$, jak plyne z předpokladu, že zobrazení f_ν je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\nu$. $\eta \in X$, $x \in a_\eta$, $y \in A$; tento případ se řeší stejně jako případ předchozí. $\eta, \nu \in X$, $\eta \neq \nu$, $x \in a_\eta$, $y \in a_\nu$; pak musí mezi x, y existovat $a \in A$ (jinak by bylo $x \mathrm{A} y$) a tedy je $g(x) = f_\eta(x) \lesssim f_\eta(a) = f(a) = f_\nu(a) \lesssim f_\nu(y)$, jak plyne z toho, že zobrazení f_η (f_ν) je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\eta$ $(A \cup a_\nu)$. $\nu \in X$, $x \in a_\nu$, $y \in a_\nu$; pak je $g(x) = f_\nu(x) \lesssim f_\nu(y) = g(y)$, jak plyne z isotonie f_ν.

Ve všech možných případech tedy z předpokladu $x, y \in A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$, $x \leqq y$, plyne nerovnost $g(x) \lesssim g(y)$ a g je tedy isotonní zobrazení $A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$ do C.

---

[3]) tj. libovolné dva různé prvky systému množin $\{A, a_\nu\}_{\nu \in X}$ jsou disjunktní, a pro každé $\nu \in X$ je $A \neq a_\nu$.

Věta 1. *Zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na B, existuje právě když pro každé $a_\nu \in B_A$ existuje alespoň jedno zobrazení f_ν, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\nu$.*

Důkaz. Postačitelnost podmínky plyne z lemmatu 3, její nutnost pak z toho, že pro každé $a_\nu \in B_A$ parciální zobrazení $\bar{f}_{A \cup a_\nu}$ je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\nu$.

Pro $x \in B$ definujeme $X_1(x) = A \cap D^0_\emptyset(x)$, $X_2(x) = A \cap H^0_\emptyset(x)$; na systému všech podmnožin v C definujeme relaci $\dot{\leqq}$ takto: je-li $D \subset C$, $E \subset C$, pak je $D \dot{\leqq} E$ právě když existuje $u \in D$, $v \in E$ tak, že platí $u \leqq v$.

Definice 1. Buď $x \in B - A$, pak položme

$$P_0(x) = \{u \mid u \in C;\ y \in X_1(x),\ z \in X_2(x) \Rightarrow f(y) \leqq u \leqq f(z)\} \quad \text{pro} \quad X_1(x) \neq \emptyset \neq X_2(x),$$

$$P_0(x) = \{u \mid u \in C;\ y \in X_1(x) \Rightarrow f(y) \leqq u\} \quad \text{pro} \quad X_1(x) \neq \emptyset = X_2(x),$$

$$P_0(x) = \{u \mid u \in C;\ z \in X_2(x) \Rightarrow u \leqq f(z)\} \quad \text{pro} \quad X_1(x) = \emptyset \neq X_2(x),$$

$$P_0(x) = C \quad \text{pro} \quad X_1(x) = \emptyset = X_2(x).$$ [4])

Buď ξ ordinální číslo, pro každé $y \in B - A$ buď množina $P_\xi(y)$ definována, pak pro $x \in B - A$ položme

$$P_{\xi+1}(x) = \{u \mid u \in P_\xi(x);\ y \in D^0_A(x),\ z \in H^0_A(x) \Rightarrow P_\xi(y) \dot{\leqq} \{u\} \dot{\leqq} P_\xi(z)\}.$$

Je-li ξ limitní a je-li pro každé $\eta < \xi$ množina $P_\eta(x)$ definována, položme $P_\xi(x) = \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x)$. Pro $x \in A$ a ξ libovolné ordinální číslo klademe $P_\xi(x) = \{f(x)\}$.

Lemma 4. *Zobrazení $\bar{f}$ buď isotonním rozšířením f z A na B. Pak pro každé $x \in B$ a ξ libovolné ordinální číslo je $\bar{f}(x) \in P_\xi(x)$.*

Důkaz. Pro $x \in A$ je tvrzení zřejmé. Buď $x \in B - A$, $y \in X_1(x)$, $z \in X_2(x)$, pak je $f(y) = \bar{f}(y) \leqq \bar{f}(x) \leqq \bar{f}(z) = f(z)$ a tedy je $\bar{f}(x) \in P_0(x)$. Nechť tvrzení platí pro všechna $x \in B - A$ a pro $\xi \geqq 0$ dané ordinální číslo, pak pro $y \in D^0_A(x)$, $z \in H^0_A(x)$ libovolná je $\bar{f}(y) \in P_\xi(y)$, $\bar{f}(z) \in P_\xi(z)$, z isotonie $\bar{f}$ plyne $\bar{f}(y) \leqq \bar{f}(x) \leqq \bar{f}(z)$ a tedy je $P_\xi(y) \dot{\leqq} \{\bar{f}(x)\} \dot{\leqq} P_\xi(z)$; dle definice $P_{\xi+1}(x)$ je $\bar{f}(x) \in P_{\xi+1}(x)$. Je-li ξ limitní a je-li $\bar{f}(x) \in P_\eta(x)$ pro všechna $\eta < \xi$, je i $\bar{f}(x) \in \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x) = P_\xi(x)$.

---

[4]) (*Důležitá poznámka*). α' buď nejmenší ze všech ordinálních čísel β, pro které jsou splněny nerovnosti

$$\operatorname{card} P_0(x) \leqq \aleph_\beta \text{ pro každé } x \in B - A,$$

$$\operatorname{card}(B - A) \leqq \aleph_\beta.$$

O všech ordinálních číslech v dalších textu vystupujících předpokládáme, že jsou menší než $\omega_{\alpha'+3}$.

Lemma 5. *Buď $x \in B$, ξ, η buďte ordinální čísla, $\xi \leqq \eta$. Pak je $P_\eta(x) \subset P_\xi(x) \subset C$.*

Důkaz. Z definice plyne, že je $P_{\xi+1}(x) \subset P_\xi(x)$ a je-li ξ limitní, je $P_\xi(x) \subset \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x)$ pro každé $x \in B$ a ξ libovolné ordinální číslo. Lemma je pak bezprostředním důsledkem lemmatu 2 (inkluse $P_\xi(x) \subset C$ vyplývá ze zřejmé inkluse $P_0(x) \subset C$ a z první inkluse v tvrzení lemmatu).

Lemma 6. *Buď $x \in B$ libovolné a $\xi \geqq 0$ buď ordinální číslo. Buďte $u, w \in P_\xi(x)$ a $v \in C$ takové, že $u \lesssim v \lesssim w$. Pak $v \in P_\xi(x)$.*

Důkaz. Tvrzení platí pro $x \in A$. Buď $x \in B - A$, $y \in X_1(x)$, $z \in X_2(x)$, pak je $f(y) \leqq u \lesssim v \lesssim w \lesssim f(z)$ a tedy je $v \in P_0(x)$. Nechť pro $x \in B - A$ a $\xi \geqq 0$ platí, že tvrzení je správné pro všechna $\eta < \xi$, buď ξ limitní. Z lemmatu 5 plyne, že je u, $w \in P_\eta(x)$ pro každé $\eta < \xi$ a tedy z indukčního předpokladu vyplývá, že je i $v \in P_\eta(x)$; je pak $v \in \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x) = P_\xi(x)$. Buď $\xi = \eta + 1$, dle lemmatu 5 je $u, w \in P_\eta(x)$ a dle indukčního předpokladu je $v \in P_\eta(x)$. Buď $y \in D^0_A(x)$, $z \in H^0_A(x)$, pak ze vztahu u, $w \in P_{\eta+1}(x)$ plyne existence $a \in P_\eta(y)$, $b \in P_\eta(z)$ takových, že je $a \lesssim u \lesssim v \lesssim w \lesssim b$ a tedy je $P_\eta(y) \mathrel{\dot{\leqq}} \{v\} \mathrel{\dot{\lesssim}} P_\eta(z)$. Je proto $v \in P_\xi(x)$.

Lemma 7. *C buď svaz resp. σ — svaz, resp. úplný svaz. Pak pro každé $x \in B$ a ξ libovolné ordinální číslo je $P_\xi(x)$ podsvaz resp. σ — podsvaz, resp. úplný podsvaz v C.*

Důkaz. Pro $x \in A$ je tvrzení zřejmé, buď $x \in B - A$. Buď $u, v \in P_0(x)$, pak pro každý prvek $y \in X_2(x)$ je $u \lesssim f(y)$, $v \lesssim f(y)$ a tedy je i $u \cup v \lesssim f(y)$, $u \cap v \lesssim f(y)$. Opačné nerovnosti pro $z \in X_1(x)$ se odvodí stejně a proto platí implikace u, $v \in P_0(x) \Rightarrow u \cup v$, $u \cap v \in P_0(x)$. Nechť pro dané $\xi \geqq 0$ tvrzení platí pro každé $x \in B$, buď $u, v \in P_{\xi+1}(x)$. Pak je $u, v \in P_\xi(x)$ a dle indukčního předpokladu je i $u \cup v$, $u \cap v \in P_\xi(x)$. Je u, $v \in P_{\xi+1}(x)$ a proto pro $y \in D^0_A(x)$ existují $a, b \in P_\xi(y)$ takové, že je $a \lesssim u$, $b \lesssim v$. Dle indukčního předpokladu je $a \cap b \in P_\xi(y)$ a zřejmě je $a \cap b \lesssim u$, $a \cap b \lesssim v$; tedy je i $a \cap b \lesssim u \cap v \lesssim u \cup v$. Tedy pro $y \in D^0_A(x)$ platí $P_\xi(y) \mathrel{\dot{\lesssim}} \{u \cap v\}$, $P_\xi(y) \mathrel{\dot{\lesssim}} \{u \cup v\}$. Opačné vztahy odvodíme pro $z \in H^0_A(x)$ a tedy je $u \cup v$, $u \cap v \in P_{\xi+1}(x)$. Je-li ξ limitní a je-li pro každé $\eta < \xi$ $P_\eta(x)$ podsvaz v C, je zřejmě i $P_\xi(x) = \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x)$ podsvaz v C. ($\emptyset$ považujeme též za podsvaz v C.) Podobně se lemma dokáže pro další dva případy.

Předpoklad, že C je svaz, resp. σ — svaz, resp. úplný svaz jsme potřebovali pouze proto, abychom tvrzení dokázali pro $P_0(x)$. Stejně jako v důkazu lemmatu 7 postupujeme při důkazu tvrzení:

$\bar{a}$ buď daný prvek systému B_A a $\bigcup_{y\in\bar{a}} P_0(y)$ buď svaz, resp σ — svaz, resp. úplný svaz; pro každé $x \in \bar{a}$ buď $P_0(x)$ podsvaz, resp. σ — podsvaz, resp. úplný podsvaz v $\bigcup_{y\in\bar{a}} P_0(y)$. Pak pro každé $\xi \geqq 0$ je $P_\xi(x)$ podsvaz, resp. σ — podsvaz, resp. úplný podsvaz v $\bigcup_{y\in\bar{a}} P_0(y)$.

Lemma 8. *Existuje-li ordinální číslo ν takové, že pro každé x, $x \in \bar{a} \in B_A$, platí $P_\nu(x) = P_{\nu+1}(x)$, pak pro každé ordinální číslo $\xi \geqq \nu$ a každé $x \in A \cup \bar{a}$ je $P_\xi(x) = P_\nu(x)$.*

Důkaz. Je-li $\xi \geqq \nu$, existuje právě jedno $\eta \geqq 0$ takové, že je $\nu + \eta = \xi$. Pro $x \in A$ a ξ libovolné je rovnost triviálně splněna. Nechť pro dané $\eta \geqq 0$ a pro každé $x \in \bar{a}$ platí $P_{\nu+\eta}(x) = P_\nu(x)$, pak je

$$P_{\nu+\eta+1}(x) = \{u \mid u \in P_{\nu+\eta}(x);\ y \in D_A^0(x),\ z \in H_A^0(x) \Rightarrow P_{\nu+\eta}(y) \dot{\leqq} \{u\} \dot{\leqq} P_{\nu+\eta}(z)\} =$$
$$= \{u \mid u \in P_\nu(x),\ y \in D_A^0(x),\ z \in H_A^0(x) \Rightarrow P_\nu(y) \dot{\leqq} \{u\} \dot{\leqq} P_\nu(z)\} = P_{\nu+1}(x) = P_\nu(x)$$

jednak dle indukčního předpokladu, jednak dle předpokladu lemmatu (dle lemmatu 1 je $H_A^0(x) \subset S(x) = \bar{a}$, $D_A^0(x) \subset S(x) = \bar{a}$). Je-li η limitní a platí-li rovnost $P_{\nu+\eta'}(x) = P_\nu(x)$ pro každé $\eta' < \eta$, je $P_{\nu+\eta}(x) = \bigcap_{\alpha<\nu+\eta} P_\alpha(x) = [\bigcap_{\alpha\leqq\nu} P_\alpha(x)] \cap [\bigcap_{\nu<\alpha<\nu+\eta} P_\alpha(x)] = P_\nu(x) \cap P_\nu(x) = P_\nu(x)$ jednak dle lemmatu 5, jednak dle indukčního předpokladu.

Lemma 9. *Buď $\bar{a} \in B_A$. $\aleph_\alpha$ buď prvý ze všech regulárních alefů, pro který platí nerovnost* card $P_0(x) < \aleph_\alpha$ *pro každé $x \in \bar{a}$. Pak pro každé $x \in \bar{a}$ platí $P_{\omega_\alpha}(x) = P_{\omega_\alpha+1}(x)$.*

Důkaz. Buď $x \in \bar{a}$, $u \in P_{\omega_\alpha}(x)$, $y \in D_A^0(x)$. Označme $U(y, u) = \{v \mid v \in P_0(y);\ v \dot{\leqq} u\}$, zřejmě je card $U(y, u) < \aleph_\alpha$. Je-li $v \in U(y, u)$ takové, že je $v \in P_\xi(y) - P_{\xi+1}(y)$ $(\xi < \omega_\alpha)$, položme $g(v) = \xi$. Označme G definiční obor funkce g; je $G \subset U(y, u)$ a tedy je card $G < \aleph_\alpha$. $g(G)$ je podmnožinou ve W_{ω_α} úseku ordinálních čísel menších než ω_α a je card $g(G) < \aleph_\alpha$. $\aleph_\alpha$ je regulární a tedy je regulární i ω_α a $g(G)$ není proto konfinální s W_{ω_α}; to znamená, že existuje $\xi < \omega_\alpha$ takové, že pro každé $\eta \in g(G)$ je $\eta < \xi$. Kdyby bylo $U(y, u) = G$, pak by bylo $U(y, u) \cap P_\xi(y) = \emptyset$ a platilo by $u \notin P_{\xi+1}(x) \supset P_{\omega_\alpha}(x)$, což je spor. Existuje tedy $v \in U(y, u) \cap P_\xi(y)$ a dle definice ξ pak musí být $v \in P_\eta(y)$ pro každé $\eta < \omega_\alpha$, tedy je i $v \in \bigcap_{\eta<\omega_\alpha} P_\eta(y) = P_{\omega_\alpha}(y)$. Je proto $P_{\omega_\alpha}(y) \dot{\leqq} \{u\}$; pro $z \in H_A^0(x)$ se stejně dokáže opačná relace a tedy je $u \in P_{\omega_\alpha+1}(y)$. Z toho a z lemmatu 5 dostáváme rovnost $P_{\omega_\alpha}(x) = P_{\omega_\alpha+1}(x)$.

Lemma 10. *Nechť ξ je ordinální číslo, buď $x \in \bar{a} \in B_A$, buď $P_\xi(x) = \emptyset$. Pak pro každé $y \in \bar{a}$ je $P_{\xi+\omega_0}(y) = \emptyset$.*

Důkaz. Buď $y \in D_A^0(x)$, pak je $x \in H_A^0(y)$ a z $P_\xi(x) = \emptyset$ plyne $P_{\xi+1}(y) = \emptyset$. Nechť pro $y \in D_A^n(x)$ platí $P_{\xi+n+1}(y) = \emptyset$, buď $y \in D_A^{n+1}(x)$. Pak existuje $z \in [H_A^0(y) \cup D_A^0(y)] \cap D_A^n(x)$; dle indukčního předpokladu je $P_{\xi+n+1}(z) = \emptyset$ a tedy platí i $P_{\xi+n+2}(y) = \emptyset$. Dle lemmat 1 a 5 tedy tvrzení platí.

Lemma 11. *Buď $\bar{a} \in B_A$, $\xi \geqq 0$ ordinální číslo. Nechť platí*

a. *je-li $x \in \bar{a}$ libovolné, je $P_\xi(x) \neq \emptyset$,*

b. *je-li $x \in \bar{a}$, $y \in H_A^0(x)$, $x \neq y$, $u \in P_\xi(x)$, $v \in P_\xi(y)$, je u* non $\|$ *v.*

Pak pro každé $x \in \bar{a}$ je $P_\xi(x) = P_{\xi+1}(x)$.

Důkaz. Buď $x \in \bar{a}$, $u \in P_\xi(x)$, budiž $y \in H^0_A(x)$ libovolné. Nechť existuje $v \in P_\xi(y)$ tak, že je $v \lesssim u$. Je-li $a \in X_1(y)$, je $f(a) \lesssim v \lesssim u$ (neboť je $v \in P_\xi(y) \subset P_0(y)$), je-li $b \in X_2(y)$, je též $b \in X_2(x)$ (neboť je $x \leqq y$) a tedy je $u \lesssim f(b)$. Tedy je $u \in P_0(y)$, nechť pro $\eta < \xi$ je $u \in P_\eta(y)$. Je-li $z \in D^0_A(y)$, existuje $w \in P_\eta(z)$ takové, že je $w \lesssim v \lesssim u$ a tedy je $P_\eta(z) \dot{\lesssim} \{u\}$; je-li $z \in H^0_A(y)$, je buď $z \in H^0_A(x)$ a pak je $\{u\} \dot{\lesssim} P_\eta(z)$, nebo $z \notin H^0_A(x)$ a pak existuje $c \in A$ takové, že je $x \leqq c \leqq z$, pak ovšem pro každé $w \in P_\eta(z)$ je $u \lesssim w$ a z neprázdnosti $P_\eta(z)$ plyne opět $\{u\} \dot{\lesssim} P_\eta(z)$. V každém případě je $u \in P_{\eta+1}(y)$. Je-li $\eta \leqq \xi$ limitní a pro každé $\eta' < \eta$ je $u \in P_{\eta'}(y)$, je také $u \in \bigcap_{\eta'<\eta} P_{\eta'}(y) = P_\eta(y)$. Z předpokladu existence $v \in P_\xi(y)$ takového, že $v \lesssim u$ plyne tedy $u \in P_\xi(y)$ a tedy je $\{u\} \dot{\lesssim} P_\xi(y)$. Neexistuje-li takové v, plyne z předpokladů a., b. opět $\{u\} \dot{\lesssim} P_\xi(y)$; pro $z \in D^0_A(x)$ se opačná relace dokáže analogicky a tedy je $u \in P_{\xi+1}(x)$.

Lemma 12. *Buď $\bar{a} \in B_A$, nechť pro každé $x \in \bar{a}$ existuje v C* $\sup f[X_1(x)]$, $\inf f[X_2(x)]$. *Pak pro každé $x \in \bar{a}$ je $P_0(x) = P_1(x)$ a platí*

$$P_0(x) = \{u \mid u \in C, \sup f[X_1(x)] \lesssim u \lesssim \inf f[X_2(x)]\} \neq \emptyset\,.$$

Důkaz. Zřejmě platí inkluse $\{u \mid u \in C;\ \sup f[X_1(x)] \lesssim u \lesssim \inf f[X_2(x)]\} \subset P_0(x)$, buď $u \in P_0(x)$. Pak pro každé $y \in X_1(x)$ je $f(y) \lesssim u$ a tedy $\sup f[X_1(x)] \lesssim u$, podobně vyplyne nerovnost $u \lesssim \inf f[X_2(x)]$ a platí tedy i inkluse opačná. Z relací $\sup f[X_1(x)] \in P_0(x)$, $\inf f[X_2(x)] \in P_0(x)$ plyne $P_0(x) \neq \emptyset$. Buď $u \in P_0(x)$, $y \in H^0_A(x)$. Je $x \leqq y$ a proto je i $X_2(y) \subset X_2(x)$, z toho plyne $\inf f[X_2(x)] \lesssim \inf f[X_2(y)]$ a tedy platí $\{u\} \dot{\lesssim} P_0(y)$. Podobně se dokáže opačná relace pro $z \in D^0_A(x)$; proto je $P_0(x) = P_1(x)$.

Z lemmat 2 a 9 vyplývá, že pro daná f a $\bar{a} \in B_A$ existuje takové ordinální číslo ξ, že pro každé $x \in \bar{a}$ je $P_\xi(x) = P_{\xi+1}(x)$. Z lemmatu 8 pak ovšem plyne od takového ξ stacionárnost všech posloupností $\{P_\nu(x)\}_{\nu<\eta}$ $(\xi < \eta)$ pro každé $x \in \bar{a}$; prvé takové ξ označme λ (měli bychom vlastně psát $\lambda_{\bar{a}f}$, ovšem věta 1 nám dovoluje omezovat se jen na množinu $A \cup \bar{a}$). V některých speciálních případech je $\lambda = 0$, např. je-li C řetězec a $P_0(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in \bar{a}$ (lemma 11) nebo A nebo C úplný svaz (lemma 12). V obecném případě nelze odhady lemmat 2 a 9 už zlepšit, platí totiž toto tvrzení:

1. $\aleph_\alpha$ *buď prvý alef, pro který platí nerovnosti* card $P_0(x) \leqq \aleph_\alpha$ *pro každé $x \in \bar{a}$,* card $\bar{a} \leqq \aleph_\alpha$. *Pak λ může nabýt kterékoliv hodnoty menší než $\omega_{\alpha+1}$.*

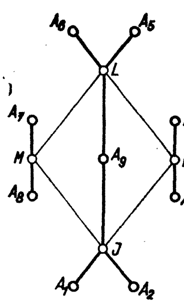
2. $\aleph_\alpha$ *buď prvý regulární alef, pro který platí nerovnosti* card $P_0(x) < \aleph_\alpha$ *pro každé $x \in \bar{a}$. Je-li* card $\bar{a} \geqq \aleph_\alpha$, *může být i $\lambda = \omega_\alpha$.*

3. *Prvý alef pro který platí nerovnosti* card $P_0(x) < \aleph_\alpha$ *pro každé $x \in \bar{a}$ buď iregulární $\aleph_\alpha$. Jestliže je* card $\bar{a} \leqq \aleph_\alpha$, *může λ nabýt kterékoliv hodnoty menší než $\omega_{\alpha+1}$, je-li* card $\bar{a} > \aleph_\alpha$, *pak může být i $\lambda = \omega_{\alpha+1}$.*

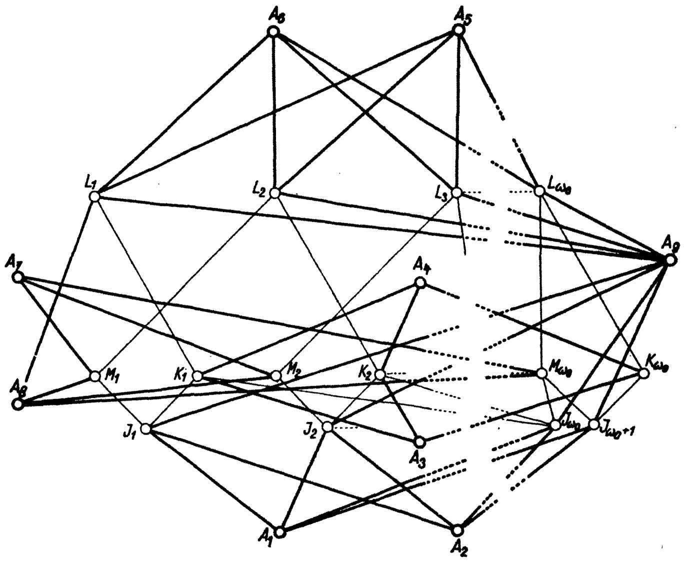
Důkazy těchto tvrzení se provedou konstrukcí, platnost tvrzení 1 ukažme na speciálním případu $\alpha = 0$, $\lambda = \omega_0 + 1$; zobecnění činí potíže jen formální. Na obr. 1

je Hasseův diagram množiny B, na obr. 2 je Hasseův diagram množiny C, prvky množin A a $f(A)$ označme výrazněji a navzájem si odpovídající prvky v A a v $f(A)$ popišme stejnými písmeny ($A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}$).

Nechejme k uvážení čtenáři, že je $P_0(M) = \{M_1, M_2, \ldots, M_{\omega_0}\}$, $P_0(K) = \{K_1, \ldots \ldots, K_{\omega_0}\}$, $P_0(L) = \{L_1, \ldots, L_{\omega_0}\}$, $P_0(J) = \{J_1, \ldots, J_{\omega_0}, J_{\omega_0+1}\}$ a že je $\lambda = \omega_0 + 1$.



Obr. 1.



Obr. 2.

Tvrzení 2 a 3 dokážeme opět konstrukcí B a C, kterou dostaneme vhodným skládáním základních konstrukcí z důkazu tvrzení 1.

3. SPECIÁLNÍ PŘÍPADY

V této části studujeme, kdy je neprázdnost množin $P_\lambda(x)$ pro každé x, $x \in \bar{a} \in B_A$, podmínkou dostačující pro existenci zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením zobrazení f z A na $A \cup \bar{a}$ – dle lemmatu 4 je to podmínka nutná.

Všude v dalším textu symbol λ značí to ordinální číslo, které je dle závěru předchozí části přiřazeno množinám $\bar{a}$ a C a zobrazení f. Buď $X \subset C$; existuje-li v X prvek největší (nejmenší) označme jej $\max X$ ($\min X$).

Věta 2. *Buď $\bar{a} \in B_A$, pro každé $x \in \bar{a}$ nechť platí*

(1) *buď existuje prvek* $\max P_\lambda(y)$ *pro každé* $y \in H^0_\emptyset(x) \cap \bar{a}$ *nebo existuje* $\min P_\lambda(y)$ *pro každé* $y \in D^0_\emptyset(x) \cap \bar{a}$.

Pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup \bar{a}$.

Důkaz. Buď $x \in \bar{a}$; splňuje-li x prvou část podmínky (1), položme $\bar{f}(x) = \max P_\lambda(x)$, nesplňuje-li ji, pak dle druhé části (1) existuje $\min P_\lambda(x)$ a definujeme $\bar{f}(x) = \min P_\lambda(x)$. Pro $x \in A$ položme $\bar{f}(x) = f(x)$, tedy $\bar{f}_A = f$ a zbývá ukázat isotonii $\bar{f}$. Buďte $x, y \in A \cup \bar{a}$, $x \leqq y$. Je-li $x \in A$, $y \in \bar{a}$, je $\bar{f}(y) \in P_\lambda(y) \subset P_0(y)$ a tedy je $\bar{f}(x) = f(x) \leqq \bar{f}(y)$, případ $x \in \bar{a}$, $y \in A$ je analogický; je-li $x, y \in A$, je $\bar{f}(x) = f(x) \leqq f(y) = \bar{f}(y)$, neboť f je isotonní. Buď $x, y \in \bar{a}$, pro x buď splněna prvá část podmínky (1). Je-li $y \in H_\Lambda^0(x)$, pak dle definice λ existuje $u \in P_\lambda(y)$ takové, že je $\bar{f}(x) \leqq u$. Ježto prvá část (1) je splněna pro x, je splněna i pro y a tedy je $\bar{f}(y) = \max P_\lambda(y) \geqq u \geqq \bar{f}(x)$. Jestliže $y \notin H_\Lambda^0(x)$, pak existuje $a \in A$ tak, že je $x < a < y$ a ze vztahů $\bar{f}(x) \in P_0(x)$, $\bar{f}(y) \in P_0(y)$ plyne $\bar{f}(x) \leqq f(a) \leqq \bar{f}(y)$.

Platí-li prvá část (1) pouze pro y a pro x nikoliv, nebo neplatí-li ani pro y, je důkaz nerovnosti $\bar{f}(x) \leqq \bar{f}(y)$ stejný. $\bar{f}$ je tedy isotonní zobrazení.

Korolár 1. *f buď isotonní zobrazení A do C, C buď úplný svaz a B libovolná uspořádaná nadmnožina A. Pak vždy existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na B.*

Důkaz. Důsledek lemmatu 12 a věty 2.

Korolár 2. *Vzhledem k uspořádání $\leqq$ buď A úplný podsvaz v (uspořádané množině) B. Pak vždy existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na B.*

Důkaz. Důsledek lemmatu 12 a věty 2.

Věta 3. *Buď $\bar{a} \in B_\Lambda$, nechť je $P_\lambda(z) \neq \emptyset$ alespoň pro jedno $z \in \bar{a}$. Pro $\xi = \lambda$ buď splněna podmínka b. lemmatu 11. Pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením zobrazení f z A na $A \cup \bar{a}$.*

Důkaz. Z definice λ, z lemmatu 10 a z předpokladu $P_\lambda(z) \neq \emptyset$ plyne neprázdnost $P_\lambda(x)$ pro každé $x \in \bar{a}$. Prvky množiny $A \cup \bar{a}$ srovnejme v prostou posloupnost $\{x_\nu\}_{\nu<\alpha}$. Volme $u_0 \in P_\lambda(x_0)$ libovolně, definujme M_0 jako množinu všech $x \in A \cup \bar{a}$, pro které je $u_0 \in P_\lambda(x)$ a pro každé $x \in M_0$ položme $\bar{f}(x) = u_0$. Buď $\gamma < \alpha$, nechť pro každé $\nu < \gamma$ je sestrojena M_ν a $\bar{f}(x)$ definováno pro každé $x \in M_\nu$. Není-li $A \cup \bar{a} - \bigcup_{\nu<\gamma} M_\nu$ prázdná, buď x_ξ prvý prvek této množiny vzhledem k dobrému uspořádání $A \cup \bar{a}$ v posloupnost $\{x_\nu\}_{\nu<\alpha}$; volme $u_\gamma \in P_\lambda(x_\xi)$ libovolně. Definujme $M_\gamma = \{x \mid x \in (A \cup \bar{a}) - \bigcup_{\nu<\gamma} M_\nu,\ u_\gamma \in P_\lambda(x)\}$ a pro každé $x \in M_\gamma$ položme $\bar{f}(x) = u_\gamma$. Zřejmě existuje $\beta \leqq \alpha$ takové, že pro každé $\nu < \beta$ je M_ν definována a platí $A \cup \bar{a} = \bigcup_{\nu<\beta} M_\nu$ – sjednocení vpravo je zřejmě disjunktní. Každému $x \in A \cup \bar{a}$ je tak přiřazen prvek $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$; z posledního vyplývá, že pro $x \in A$ je $\bar{f}(x) = f(x)$. Buď $x, y \in A \cup \bar{a}$, $x \leqq y$. Pak existují ordinální čísla $\mu, \nu < \alpha$ taková, že platí $x = x_\mu$, $y = x_\nu$, $x_\mu \in M_\xi$, $x_\nu \in M_\eta$. Je-li $\xi = \eta$, je $\bar{f}(x_\mu) = u_\xi = \bar{f}(x_\nu)$; nechť je $\xi \neq \eta$. Vztah $\xi < \eta$ znamená, že $u_\xi \notin P_\lambda(x_\nu)$; předpokládáme-li $P_\lambda(x_\nu) \leqq \{u_\xi\}$, dostáváme z definice λ

a lemmatu 6 $u_\xi \in P_\lambda(x_\nu)$. Za předpokladu $\xi < \eta$ je tedy relace $P_\lambda(x_\nu) \precsim \{u_\xi\}$ vyloučena a použitím předpokladu b. dostáváme relaci $f(x_\mu) = u_\xi \precsim u_\eta = \bar{f}(x_\nu)$ V případě $\eta < \xi$ se vztah $u_\xi \prec u_\eta$ dokáže analogicky.

Korolár 3. *C buď řetězec. Pak podmínkou nutnou a postačující k existenci zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup \bar{a}$, je neprázdnost množin $P_0(x)$ pro každé $x \in \bar{a}$.*

Důkaz vyplývá z lemmatu 11 a věty 3.

Z důkazu věty 3 vyplývá: *zvolíme-li $x \in \bar{a}$ a $u \in P_\lambda(x)$, pak za podmínek věty 3 existuje $\bar{f}$ takové, že je $\bar{f}(x) = u$ – v důkazu volíme $x = x_0$, $u = u_0$.*

Věta 4. *Buď $\bar{a} \in B_A$. Nechť $\bar{a}$ splňuje podmínku klesajících řetězců, nechť pro každé $x \in \bar{a}$ je $P_\lambda(x) \neq \emptyset$ a platí*

(2) $\mathfrak{b}$ *buď prvá ze všech mohutností podmnožin v $D^0_A(x) - \{x\}$, které jsou s $D^0_A(x) - \{x\}$ konfinální[5]). Pak pro každou množinu $U \subset P_\lambda(x)$, pro kterou je* card $U \leqq \mathfrak{b}$, *existuje prvek $u \in P_\lambda(x)$ splňující nerovnost $v \precsim u$ pro každé $v \in U$.*

Pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením zobrazení f z A na $A \cup \bar{a}$.

Důkaz. M_0 buď množina všech minimálních prvků v $\bar{a}$, nechť pro každé $\nu < \eta$ jsou množiny M_ν definovány. Není-li $\bar{a} - \bigcup_{\nu<\eta} M_\nu$ prázdná, bude M_η značit množinu všech jejích minimálních prvků. (Je splněna podmínka klesajících řetězců a tedy je $M_\eta \neq \emptyset$.) Je-li card $\bar{a} \leqq \aleph_\alpha$, pak existuje $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ takové, že pro každé $\nu < \gamma$ je M_ν definována, $\bar{a} = \bigcup_{\nu<\gamma} M_\nu$ a sjednocení vpravo je zřejmě disjunktní. Rovněž je zřejmé, že libovolné dva různé prvky z téže množiny M_ν jsou nesrovnatelné. Pro $x \in M_0$ volme $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$ libovolně, buď $\eta < \gamma$ a nechť pro každé $\nu < \eta$ a $x \in M_\nu$ libovolné je $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$ definováno. Buď $y \in M_\eta$ libovolné; mezi všemi podmnožinami v $D^0_A(y) - \{y\}$ které jsou s $D^0_A(y) - \{y\}$ konfinální uvažme ty, které mají nejmenší mohutnost $\mathfrak{b}(y)$ a z těch vybereme jednu, kterou označíme $M(y)$. Je-li $x \in M(y) \subset D^0_A(y) - \{y\}$, je $x < y$ a proto není $x \in M_\xi$ pro žádné $\xi \geqq \eta$. Jest tedy $M(y) \subset \bigcup_{\nu<\eta} M_\nu$, a proto je $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$ definováno pro každé $x \in M(y)$. Z definice P_λ plyne, že pro každé $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$ existuje prvek $u(x) \in P_\lambda(y)$ tak, že je $\bar{f}(x) \precsim u(x)$; pro každé $x \in M(y)$ zvolme právě jeden $u(x) \in P_\lambda(y)$ a u je pak zobrazení $M(y)$ do $P_\lambda(y)$. Jest card $M(y) = \mathfrak{b}(y)$ a tedy je card $u[M(y)] \leqq \mathfrak{b}(y)$. Dle (2) existují prvky v, které jsou za všemi prvky z $u[M(y)]$, jeden z nich zvolme a označme $\bar{f}(y)$. Takto je $\bar{f}$ definováno pro každé $x \in \bar{a}$, pro $x \in A$ položme $\bar{f}(x) = f(x)$. $\bar{f}$ je isotonní zobrazení na M_0, nechť pro $\eta < \gamma$ platí, že $\bar{f}$ je isotonní zobrazení na $\bigcup_{\nu<\eta} M_\nu$. Buď $y \in M_\eta$, $x < y$, pak je nutně

[5]) D buď podmnožinou v B; řekneme, že *D je konfinální s B*, jestliže pro každé $x \in B$ existuje alespoň jedno $y \in D$ tak, aby byla splněna relace $x \leqq y$ (v poněkud jiném významu viz např. Birkhoff [1], str. 13 ruského překladu).

$x \in \bigcup\limits_{\nu<\eta} M_\nu$. Nechť je $x \in D_A^0(y)$, pak je buď $x \in M(y)$ – a pak je dle definice $\bar{f}$ $\bar{f}(x) \leqq \bar{f}(y)$ – nebo $x \notin M(y)$. $M(y)$ je konfinální s $D_A^0(y) - \{y\}$ a proto existuje $z \in M(y)$, $x < z < y$. Dle indukčního předpokladu je $\bar{f}(x) \leqq \bar{f}(z)$ a z definice $\bar{f}$ plyne $\bar{f}(z) \leqq \bar{f}(y)$, tedy je opět $\bar{f}(x) \leqq \bar{f}(y)$. Je-li $x \notin D_A^0(y)$, pak existuje $a \in A$ tak, že je $x < a < y$ a proto pro každé $r \in P_\lambda(x)$, $s \in P_\lambda(y)$ platí $r \leqq s$, speciálně je $\bar{f}(x) \leqq \bar{f}(y)$. Tedy $\bar{f}$ je isotonní i na $\bigcup\limits_{\nu\leqq\eta} M_\nu$. Ježto je $\bar{a} = \bigcup\limits_{\nu<\gamma} M_\nu$, je $\bar{f}$ isotonní na $\bar{a}$. Pro každé $x \in A \cup \bar{a}$ je $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x) \subset P_0(x)$ a z definice P_0 plyne, že $\bar{f}$ je isotonní zobrazení i na $A \cup \bar{a}$, které na A zřejmě zachovává f, tj. pro každé $x \in A$ platí rovnost $f(x) = \bar{f}(x)$.

Snadno lze vyslovit i větu duální.[6])

Je-li $x, y \in \bar{a}$, pak nazveme posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^n$ xy – *posloupností*, platí-li

a. pro $i = 0, \ldots, n$ je $x_i \in \bar{a}$ a $x_0 = x$, $y = x_n$,

b. $\{x_i\}_{i=0}^n$ je prostá nebo $\{x_i\}_{i=1}^n$ je prostá a $x_0 = x_n$,

c. x_i pokrývá nebo je pokryto x_{i+1} pro každé $i = 0, \ldots, n-1$ [7]).

Lemma 13. *V $\bar{a} \in B_A$ buď splněna podmínka*

(3) *je-li $x \in \bar{a}$, $y \in H_A^0(x)$, pak existuje konečný maximální řetězec s největším prvkem y a nejmenším x.*

Pak pro libovolné prvky $x, y \in \bar{a}$ existuje xy-posloupnost.

Důkaz. Dle lemmatu 1 je $\bar{a} = \bigcup\limits_{j=0}^{+\infty} H_A^j(x)$. Pro $y \in H_A^0(x)$ je řetězec ze (3) xy-posloupností; nechť pro každé $z \in H_A^j(x)$ existuje xz-posloupnost. Buď $y \in H_A^{j+1}(x) - H_A^j(x)$, pak existuje $z \in [H_A^0(y) \cup D_A^0(y)] \cap H_A^j(x)$ a dle (3) a indukčního předpokladu existují yz- a xz-posloupnost. Jejich vhodným složením dostaneme xy-posloupnost.

Lemma 14. *V $\bar{a} \in B_A$ buď splněna podmínka*

(4) *pro žádné $x \in \bar{a}$ neexistuje xx-posloupnost s více než dvěma různými prvky.*

Pak pro libovolné prvky $x, y \in \bar{a}$, $x \neq y$, existuje nejvýš jedna xy-posloupnost.

Důkaz. Buď $x \neq y$, $x, y \in \bar{a}$, nechť $\{x_i\}_{i=0}^m$, $\{y_i\}_{i=0}^n$ jsou dvě různé xy-posloupnosti. Buď j prvé přirozené číslo, pro které je $x_{j+1} \neq y_{j+1}$ – takové j zřejmě existuje a je $0 \leqq j < \min(m, n)$. V $\{x_i\}_{i=j+1}^m$ buď k prvý index, pro který $x_k \in \{y_i\}_{i=j}^n$, l buď prvý index, pro který $y_l = x_k$. Jest $j + 1 \leqq k$, $l \leqq \min(m, n)$ a obě čísla existují.

[6]) O duálnosti viz Birkhoff [1], § 4 kap. I. V našem případě to znamená, že ve větě 4 nahradíme podmínku klesajících řetězců podmínkou řetězců rostoucích (Birkhoff [1], kap. III, § 4) a konfinalitu „koniniciálností“: $D \subset B$ je s B *koniniciální* právě když pro každé $x \in B$ existuje alespoň jedno $y \in D$ tak, že je splněna relace $y \leqq x$.

[7]) x, y buďte prvky z B; řekneme, že x pokrývá y (též: y je pokryto x) právě když platí relace $y < x$ a pro žádné $z \in B$ neplatí současně relace $y < z < x$.

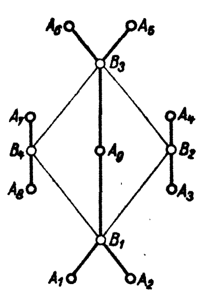
Pak $\{x_i\}_{i=j}^{k}$, $\{y_i\}_{i=j}^{l}$ jsou x_jx_k- a y_jy_l-posloupnosti a $x_j, \ldots, x_k, y_{l-1}, \ldots, y_j$ je x_jx_j posloupnost alespoň trojprvková, obsahuje totiž tři různé prvky x_j, x_{j+1} a y_{j+1}.

Věta 5. *Buď $\bar{a} \in B_{\mathrm{A}}$, v $\bar{a}$ buďte splněny podmínky* (3) *a* (4) *a pro každé $x \in \bar{a}$ buď $P_\lambda(x) \neq \emptyset$. Pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup \bar{a}$.*

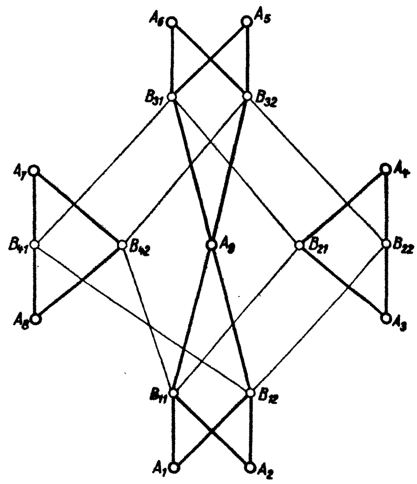
Důkaz. Buďte $x, y \in \bar{a}$, $x \neq y$ libovolné prvky, pak dle lemmat 13 a 14 existuje právě jedna xy-posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^{n}$; položme $n = n(x, y)$ a definujme ještě $n(x, x) = 0$. Zvolme $x \in \bar{a}$ a $u \in P_\lambda(x)$ a položme $\bar{f}(x) = u$. Buď $k \geqq 0$ celé a nechť pro každé $z \in \bar{a}$, $z \neq x$, pro které je $n(x, z) \leqq k$, je $\bar{f}(z)$ definováno tak, že platí $\bar{f}(z) \in P_\lambda(z)$; buď $y \in \bar{a}$, $y \neq x$, $n(x, y) = k + 1$. Buď $\{x_i\}_{i=0}^{k+1}$ příslušná xy-posloupnost, pak $\{x_i\}_{i=0}^{k}$ je xx_k-posloupnost a $\bar{f}(x_k) \in P_\lambda(x_k)$ je definováno. x_k pokrývá nebo je pokryto y, buď $x_k < y$. Pak $x_k \in D_{\mathrm{A}}^{0}(y)$ a dle definice λ existují takové prvky $v \in P_\lambda(y)$, že je $\bar{f}(x_k) \leqq v$; jeden z nich vyberme a označme $\bar{f}(y)$. Podobně definujeme $\bar{f}(y)$, je-li $y < x_k$. Z jedinečnosti xy-posloupnosti plyne, že $\bar{f}(y)$ definujeme právě jednou a $\bar{f}$ máme takto definováno na celé množině $\bar{a}$. Pro $x \in A$ položme $\bar{f}(x) = f(x)$. Buď $y, z \in \bar{a}$, $y < z$. Je-li $y \notin D_{\mathrm{A}}^{0}(z)$, pak existuje $a \in A$ tak, že je $y < a < z$, a je ovšem $\bar{f}(y) \leqq f(a) \leqq \bar{f}(z)$; buď $y \in D_{\mathrm{A}}^{0}(z)$. Pak dle (3) a lemmatu 14 je jediná yz-posloupnost $\{y_i\}_{i=0}^{m}$ maximální konečný řetězec mající y jako nejmenší a z jako největší prvek. Buď $n_0 = \min \{n(x, y_j)\}_{j=0, \ldots, m}$; pak dle lemmatu 14 existuje právě jedno y_i, pro které je $n_0 = n(x, y_i)$. Z definice $\bar{f}$ pak plyne, že je $\bar{f}(y_i) \leqq \ldots \leqq \bar{f}(y_m) = \bar{f}(z)$, $\bar{f}(y_i) \geqq \ldots \geqq \bar{f}(y_0) = \bar{f}(y)$. Pro $y \in \bar{a}$, $z \in A$ nebo $y \in A$, $z \in \bar{a}$ nebo $y, z \in A$ vyplývá nerovnost $\bar{f}(y) \leqq \bar{f}(z)$ snadno z inklusí $P_\lambda(y) \subset P_0(y)$, $P_\lambda(z) \subset P_0(z)$.

Korolár 4. *Je-li $\bar{a}$ konečný řetězec a $P_\lambda(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in \bar{a}$, pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup \bar{a}$.*

Důkaz plyne bezprostředně z věty 5, lze jej ale snadno vyvodit i z věty 4.



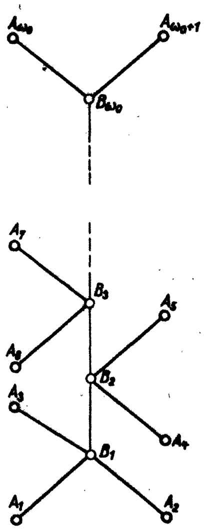
Obr. 3.



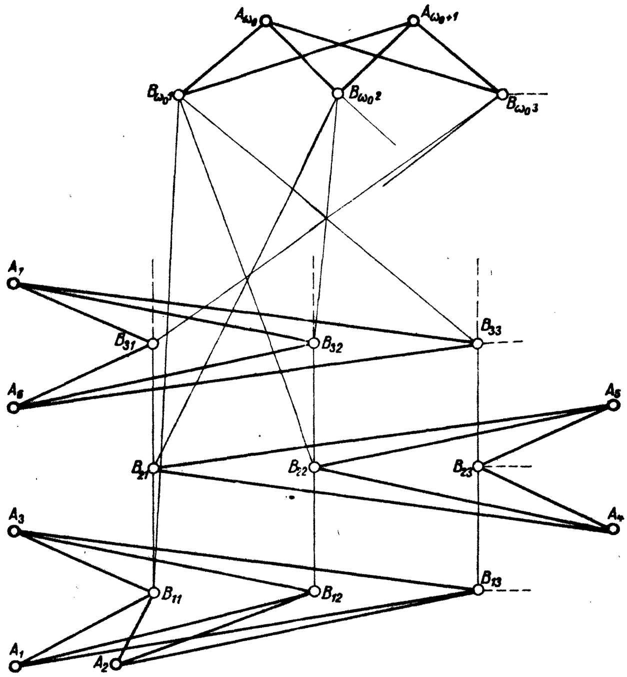
Obr. 4.

Nakonec ještě ukažme, že splnění nerovností $P_\lambda(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in \bar{a}$ není pro existenci $\bar{f}$ obecně podmínkou postačující:

1. Na obr. 3 je Hasseův diagram množiny B, na obr. 4 je Hasseův diagram množiny C. Prvky množin A a $f(A)$ označme výrazněji a navzájem si odpovídající prvky v A a $f(A)$ označme stejnými písmeny. ($A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}$.) Nechť čtenář uváží sám, že $\lambda = 0$, $P_0(B_i) = \{B_{i1}, B_{i2}\}$ pro $i = 1, 2, 3, 4$ a že $\bar{f}$ neexistuje. Pro tento případ je charakteristické, že není splněna podmínka (4).



Obr. 5.



Obr. 6.

2. Není-li splněna podmínka (3), může nastat tento případ: na obr. 5 je „Hasseův diagram" množiny B, na obr. 6 je Hasseův diagram množiny C. Prvky množin A a $f(A)$ opět označíme výrazněji a popíšeme je stejnými písmeny. ($A = \{A_1, A_2, \ldots, \ldots, A_{\omega_0}, A_{\omega_0+1}\}$.) Čtenář uváží, že je $\lambda = 0$, $P_0(B_i) = \{B_{i1}, B_{i2}, \ldots\}$ kde je $i = 1, 2, \ldots, \omega_0$ a že $\bar{f}$ neexistuje.

Literatura

[1] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, New York 1948 (ruský překlad: Теория структур, Изд. иностранной лит., Москва 1952).

[2] *M. Novotný:* Über isotone Funktionale geordneter Mengen, Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen d. Math. *5* (1959), 9—28.

[3] *M. Novotný:* Isotone Funktionale geordneter Mengen, tamtéž *6* (1960), 109—133.

Adresa autora: Praha 1, Spálená 51, (Nakladatelství technické literatury).

Резюме

ИЗОТОННОЕ РАСШИРЕНИЕ ИЗОТОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

ТЕО ШТУРМ (Teo Sturm), Прага

При помощи определенной трансфинитной множественной конструкции выводится условие, необходимое для существования изотонного расширения. В дальнейшем приводится доказательство, что это условие для существования изотонного расширения в некоторых важных случаях является также достаточным (например, в том случае когда множество, содержащее область изменения отображения, является цепью или же полной структурой; это условие достаточно даже тогда, когда множество прообразов удовлетворяет определенным общим условиям, принятым в теории упорядоченных множеств, или же условиям комбинаторического характера).

Zusammenfassung

ISOTONE ERWEITERUNG DER ISOTONEN ABBILDUNGEN

Teo Sturm, Praha

Mit Hilfe einer transfiniten Mengenkonstruktion leitet man die für die Existenz der isotonen Erweiterung notwendige Bedingung ab. Weiter wird ein Beweis gegeben, dass diese Bedingung für die Existenz der isotonen Erweiterung in einigen wichtigeren Fällen auch als hinreichend anzusehen ist (wenn z. B. die die Menge von Bildern enthaltende Menge eine Kette oder ein vollständiger Verband ist; wenn die Menge von Urbildern einigen allgemeinen Bedingungen genügt, die in der Theorie der geordneten Mengen üblich oder vom kombinatorischen Charakter sind).