Václav Polák

O jistém pokrytí racionálních bodů v rovině nekonečnou jednoduchou lomenou čarou

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 2, 141--145

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108382`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O JISTÉM POKRYTÍ RACIONÁLNÍCH BODŮ V ROVINĚ NEKONEČNOU JEDNODUCHOU LOMENOU ČAROU

VÁCLAV POLÁK, Brno

(Došlo dne 30. dubna 1959)

Prof. K. KOUTSKÝ položil problém, dá-li se množina všech racionálních bodů v rovině pokrýt nekonečnou jednoduchou lomenou čarou tak, aby racionální body ležely nejvýše v jejích vrcholech. Práce podává konstrukci takové čáry. Přitom racionální body leží v každém druhém vrcholu. Celá úloha je pojata obecněji.

Nechť A, B, C, J jsou čtyři různé body euklidovské roviny o následujících vlastnostech:

(1) A, B, C neleží v přímce.

(2) J leží uvnitř trojúhelníka ABC.

Položme $\mathsf{S}_0 = \{A, B, C, J\}$ a nechť $\mathfrak{P}_0$ je množina všech přímek, na nichž leží alespoň dva různé body množiny S_0. Nechť S_1 je množina všech průsečíků přímek množiny $\mathfrak{P}_0$. Zřejmě $\mathsf{S}_0 \subset \mathsf{S}_1$. Nechť $\mathfrak{P}_1$ je množina všech přímek, na nichž leží alespoň dva různé body množiny S_1. Nechť S_2 je množina všech průsečíků přímek množiny $\mathfrak{P}_1$. Zřejmě $\mathsf{S}_1 \subset \mathsf{S}_2$. Vytvořme množinu $\mathfrak{P}_2$ atd. Položme $\mathsf{H}(A, B, C; J) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathsf{S}_i$.

Věta 1. *Množina* $\mathsf{H}(A, B, C; J)$ *je spočetná a v rovině hustá.*[1])

K důkazu této věty potřebujeme několik lemmat.

Lemma 1. *Nechť* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *je posloupnost bodů vytvořená konstrukcí uvedenou na obr. 1. Pak* $\lim_{i\to\infty} X_i = A$.

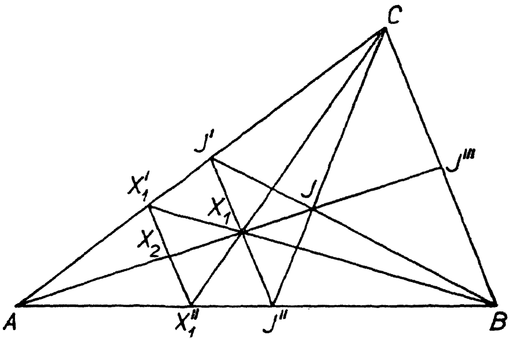
Lemma je zřejmé.

Lemma 2. *Nechť pro každé* $i = 1, 2, \ldots$ *máme definovánu čtveřici různých bodů* $A^{(i)}, B^{(i)}, C^{(i)}, J^{(i)}$ *o vlastnostech* (1), (2). *Nechť též čtveřice* A, B, C, J *má tyto vlastnosti. Nechť* $\lim_{i\to\infty} A^{(i)} = A$, $\lim_{i\to\infty} B^{(i)} = B$, $\lim_{i\to\infty} C^{(i)} = C$, $\lim_{i\to\infty} J^{(i)} = J$. *Sestrojme pro každé* i *posloupnost* $\{X_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ *uvedenou v obr. 1. Potom pro každé*

[1]) Viz A. F. MÖBIUS: Gesammelte Werke, Leipzig 1885, str. 237—251.

$n = 1, 2, \ldots$ *platí* $\lim\limits_{i\to\infty} X_n^{(i)} = X_n$, *kde* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost vytvořená čtveřicí* A, B, C, J.

Důkaz lemmatu provedeme pomocí úplné indukce. Nejdříve dokažme, že limita posloupnosti $\{X_1^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ pro $i \to \infty$ existuje a že platí $\lim\limits_{i\to\infty} X_1^{(i)} = X_1$. Poněvadž $C^{(i)} \to C$, $A^{(i)} \to A$, má též posloupnost $\{p(A^{(i)}, C^{(i)})\}_{i=1}^{\infty}$ [2] přímek limitu a platí $p(A^{(i)}, C^{(i)}) \to p(A, C)$. Podobně dokážeme, že $p(A^{(i)}, J^{(i)}) \to$ $\to p(A, J)$, $p(A^{(i)}, B^{(i)}) \to p(A, B)$, $p(B^{(i)}, J^{(i)}) \to p(B, J)$, $p(C^{(i)}, J^{(i)}) \to$ $\to p(C, J)$. Odtud plyne, že posloupnosti průsečíků $\{J'^{(i)} = p(A^{(i)}, C^{(i)}) \cap$ $\cap\, p(B^{(i)}, J^{(i)})\}_{i=1}^{\infty}$, $\{J''^{(i)} = p(A^{(i)}, B^{(i)}) \cap p(C^{(i)}, J^{(i)})\}_{i=1}^{\infty}$ mají limitu a platí $J'^{(i)} \to J'$, $J''^{(i)} \to J''$. Odtud plyne $p(J'^{(i)}, J''^{(i)}) \to p(J', J'')$ a odtud konečně plyne $X_1^{(i)} = p(J'^{(i)}, J''^{(i)}) \cap p(A^{(i)}, J^{(i)}) \to p(J', J'') \cap$ $\cap\, p(A, J) = X_1$. Tím máme lemma dokázáno pro $n = 1$. Nechť n je libovolné přirozené číslo a nechť lemma platí pro posloupnost $\{X_n^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$. Uvažujme o posloupnosti $\{X_{n+1}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$. Poněvadž $X_n^{(i)} \to X_n$, platí $X_n'^{(i)} = p(B^{(i)}, X_n^{(i)}) \cap p(A^{(i)}, C^{(i)}) \to p(B, X_n) \cap p(A, C) =$ $= X_n'$ a podobně $X_n''^{(i)} = p(C^{(i)}, X_n^{(i)}) \cap p(A^{(i)}, B^{(i)}) \to p(C, X_n) \cap p(A, B) =$ $= X_n''$. Odtud $X_{n+1}^{(i)} = p(X_n'^{(i)}, X_n''^{(i)}) \cap p(A^{(i)}, J^{(i)}) \to p(X_n', X_n'') \cap p(A, J) =$ $= X_{n+1}$ a lemma platí též pro posloupnost $\{X_{n+1}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$. Platí tedy lemma pro všechna přirozená n.



Obr. 1.

Lemma 3. *Nechť* A, B, C, J *je čtveřice bodů v rovině s vlastnostmi* (1), (2). *Potom množina* $\overline{AJ} \cap \mathsf{H}(A, B, C; J)$ *je hustá na úsečce* $\overline{AJ}$.

Důkaz. Nechť X je libovolný bod uvnitř úsečky $\overline{AJ}$. Sestrojme posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ podle obr. 1. Podle lemmatu 1 existuje n_0 tak, že X_{n_0} leží mezi A, X a je bodu X nejblíže. Položme $A^{(1)} = X_{n_0}$. Čtveřice bodů $A^{(1)}, B, C, J$ má vlastnosti (1), (2), bod X leží uvnitř úsečky $\overline{A^{(1)}J}$. Sestrojme opět posloupnost $\{X_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$. Existuje n_1 tak, že $X_{n_1}^{(1)}$ leží mezi $A^{(1)}$, X a je bodu X nejblíže. Položme $A^{(2)} =$ $= X_{n_1}^{(1)}$ atd. Platí $\lim\limits_{i\to\infty} A^{(i)} = X$. (Nechť $\lim\limits_{i\to\infty} A^{(i)} = Y \neq X$. Pak uvnitř úsečky $\overline{XY}$ neleží žádný z bodů $X_n^{(i)}$. Čtveřice Y, B, C, J má vlastnosti (1), (2). Sestrojme posloupnost $\{Y_n\}$ konstrukcí z obr. 1. Poněvadž X leží mezi J, Y, existuje N tak, že Y_N leží mezi X, Y (podle lemmatu 1). Podle lemmatu 2 ale platí $\lim\limits_{i\to\infty} X_N^{(i)} = Y_N$, tedy aspoň jedno $X_N^{(i)}$ leží mezi X, Y, což je spor.) Poněvadž $A^{(i)}$ patří vesměs do množiny $\mathsf{H}(A, B, C; J)$, jsme s důkazem hotovi.

[2]) $p(X, Y)$ značí přímku, jež spojuje dva různé body X, Y.

Jestliže $X = A$, bude $\lim_{n \to \infty} X_n = A$ (podle lemmatu 1). Jestliže $X = J$, uvažujme o čtveřici J, X_1', X_1'', X_1 (obr. 1) a použijme lemmatu 1. Důkaz je hotov.

Důkaz věty 1. Důkaz naší věty je nyní už patrný. Z lemmatu 3 pro čtveřici J''', J', J'', J (obr. 1) plyne, že množina $\mathsf{H} = \mathsf{H}(A, B, C; J)$ je hustá na úsečce $\overline{JJ'''}$. Odtud plyne, že H je hustá na úsečce $\overline{AJ'''}$ a tedy též na úsečkách $\overline{BJ'}$, $\overline{CJ''}$. Snadno se odtud odvodí, že H je hustá na přímkách $p(A, B)$, $p(B, C)$, $p(C, A)$ a odtud pak, že H je hustá v celé rovině. Skutečnost, že H je spočetná, plyne okamžitě z konstrukce. Věta 1 je dokázána.

Nechť p je libovolná přímka v rovině. Jestliže na přímce p leží alespoň dva různé body A, B množiny H, pak přímka p obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny H a tyto body jsou v přímce p rozloženy hustě. (Poněvadž H je v rovině hustá, existují body $C, J \in \mathsf{H}$ tak, aby A, B, C, J byla čtveřice bodů s vlastnostmi (1), (2). V důkaze věty 1 je pak obsaženo, že množina $p = p(A, B) \cap \mathsf{H}$ je hustá v přímce p.) Zřejmě existuje celé nezáporné číslo i tak, že $A, B \in \mathsf{S}_i$ a tedy $p \in \mathfrak{P}_i$. Odtud plyne, že spočetná množina $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{P}_i$ přímek tvoří množinu všech těch přímek v rovině, jež obsahují alespoň dva různé body množiny H. Množinu těchto přímek označme $\mathfrak{M}_\infty$. Nechť $\mathfrak{M}_1$ je množina všech přímek roviny, jež obsahují právě jediný bod z H. Množina $\mathfrak{M}_1$ je nespočetná, neboť libovolným bodem $A \in \mathsf{H}$ prochází pouze spočetně mnoho přímek z $\mathfrak{M}_\infty$, kdežto ostatní přímky procházející bodem A jsou z množiny $\mathfrak{M}_1$. Zbývající množinu přímek v naší rovině označme $\mathfrak{M}_0$. Jsou to přímky, jež neobsahují žádný bod z H. Množina $\mathfrak{M}_0$ je nespočetná, neboť v systému všech rovnoběžek s libovolnou přímkou q se vyskytne pouze spočetně mnoho přímek množiny $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_\infty$ (jinak by totiž množina H nebyla spočetná).

Označme R množinu všech racionálních bodů v rovině (obě souřadnice jsou racionální). Zřejmě přímka, obsahující dva různé racionální body, jich obsahuje nekonečně mnoho. Protnou-li se dvě takové přímky, pak jejich průsečík je bod racionální. Snadno se nahlédne, že $\mathsf{R} = \mathsf{H}((0, 0), (3, 0), (0, 3); (1, 1))$.

Nechť $(A_0 A_1 \ldots A_n A_{n+1})$ je jednoduchá n-lomená čára v rovině s vlastními vrcholy (vrcholy jsou body $A_1, A_2, \ldots, A_n$; vlastní vrchol je ten, jehož obě sousední strany leží v různých přímkách).[3] Řekneme, že $(\ldots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 \ldots)$ je *oboustranně nekonečná jednoduchá lomená čára*, jestliže pro každé přirozené n je $(A_{-n} A_{-n+1} \ldots A_{n-1} A_n)$ jednoduchá lomená čára s vlastními vrcholy.

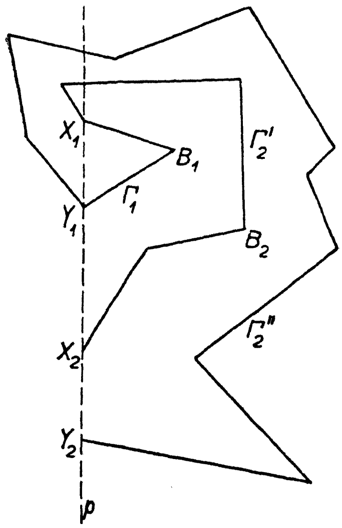
Předložená práce podává konstrukci jisté oboustranně nekonečné jednoduché lomené čáry, která kladně řeší nahoře uvedený problém.

Věta 2. *Ke každé množině $\mathsf{H} = \mathsf{H}(A, B, C; J)$ existuje jednoduchá oboustranně nekonečná lomená čára $\mathsf{P} = (\ldots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 \ldots)$ tak, že všechny vrcholy se sudými indexy tvoří množinu* H.

[3]) Definici viz např. K. Čulík: O existenci rovinných mnohoúhelníků s předepsanými úhly. Časopis pro pěstování matematiky, *80* (1955), 415—426.

Zřejmě každá strana čáry P leží v přímce množiny $\mathfrak{M}_1$. Konstrukci nelze provést úsporněji, neboť (podle předchozích poznámek) nemohou dva sousední vrcholy být body množiny H.

Důkaz. Existují zřejmě v rovině dva různé body X_1, Y_1 tak, že $p = p(X_1, Y_1) \in \mathfrak{M}_0$. Orientujme tuto přímku tak, aby $X_1 < Y_1$ a sestrojme libovolnou nekonečnou posloupnost bodů $X_1 < Y_1 < X_2 < < Y_2 < \ldots$ na přímce p tak, že tato posloupnost konverguje k úběžnému bodu U_∞ této přímky. Uspořádejme body množiny H libovolně do posloupnosti



Obr. 2.

$$\text{(b)} \qquad B_1, B_2, B_3, \ldots$$

Spojme bod B_1 s X_1 a Y_1. Body X_1, Y_1 lze zřejmě volit tak, aby strany čáry $\Gamma_1 = (X_1B_1Y_1)$ ležely v přímkách množiny $\mathfrak{M}_1$. Sestrojme jednoduchou lomenou čáru $\Gamma_2' = (X_1 \ldots B_2 \ldots X_2)$ s vlastními vrcholy (obr. 2) tak, že

(1) každý její vrchol je bod množiny H,

(2) první a poslední strana leží v přímkách množiny $\mathfrak{M}_1$,[4])

(3) čára neprotne nikde polopřímku Y_1U_∞,

(4) čára $\Gamma_1 \cup \Gamma_2' \cup \overline{Y_1X_2}$ je jednoduchý mnohoúhelník.

Konečně sestrojme jednoduchou lomenou čáru $\Gamma_2'' = (Y_1 \ldots Y_2)$ s vlastními vrcholy tak, že

(1) každý její vrchol je bod množiny H,

(2) první a poslední strana leží v přímkách množiny $\mathfrak{M}_1$,

(3) čára neprotne nikde polopřímku Y_1U_∞,

(4) čára $\Gamma_1 \cup \Gamma_2' \cup \Gamma_2'' \cup \overline{X_2Y_2}$ je jednoduchý mnohoúhelník.

Čára $\Gamma_1 \cup \Gamma_2' \cup \Gamma_2''$ je jednoduchá lomená čára s vlastními vrcholy. Množinu jejích vrcholů, vyjma vrcholy X_1, Y_1, označme M_2. (Bod X_1 je vlastní vrchol, neboť jinak by jeho sousední strany ležely na spojnici dvou bodů z H, tedy v přímce množiny $\mathfrak{M}_\infty$, což nelze. Podobně Y_1 je vlastní vrchol.) Zřejmě $B_1, B_2 \in \mathsf{M}_2 \subset \mathsf{H}$. Existuje jednoduchá lomená čára $\mathsf{G}_2 = (X_2 \ldots Y_2)$ s vlastními vrcholy tak, že

(1) má lichý počet vrcholů,

(2) množina vrcholů s lichým indexem je totožná s množinou M_2,

(3) její strany leží v přímkách množiny $\mathfrak{M}_1$,

(4) čára $\mathsf{G}_2 \cup \overline{X_2Y_2}$ je jednoduchý mnohoúhelník, který má s polopřímkou Y_2U_∞ jediný bod Y_2 společný.

[4]) Poněvadž každým bodem X_i resp. Y_i může procházet nejvýše jedna přímka množiny $\mathfrak{M}_\infty$, lze této podmínce snadno vyhovět.

(Čáru G_2 sestrojíme tak, že každou stranu čáry $\Gamma_1 \cup \Gamma_2' \cup \Gamma_2''$, kromě první a poslední a kromě stran sousedících s některým z vrcholů X_1 a Y_1, nepatrně „zlomíme".) Vyškrtejme z posloupnosti (b) body množiny M_2 a nechť B_{i_1} je první nevyškrtnutý bod. Zřejmě $i_1 > 2$.

Podobně jako v předchozích úvahách sestrojme jednoduchou lomenou čáru $\mathsf{G}_3 = (X_3 \dots Y_3)$ s vlastními vrcholy tak, že

(1) má lichý počet vrcholů,

(2) pro množinu M_3 jejích vrcholů s lichým indexem platí $B_{i_1} \in \mathsf{M}_3 \subset \mathsf{H}$,

(3) její strany leží v přímkách množiny $\mathfrak{M}_1$,

(4) čára $\mathsf{G}_3 \cup \overline{X_3Y_3}$ je jednoduchý mnohoúhelník, který má s polopřímkou Y_3U_∞ jediný bod Y_3 společný,

(5) $\mathsf{G}_2 \subset \mathsf{G}_3$.

Pokračujme dále úplnou indukcí. Zřejmě čára $\mathsf{G}_2 \cup \mathsf{G}_3 \cup \dots$ má požadované vlastnosti.

Резюме

О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК В ПЛОСКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ НЕПЕРЕСЕКАЮЩЕЙСЯ ЛОМАНОЙ

ВАЦЛАВ ПОЛАК (Václav Polák), Брно

В работе построена бесконечная непересекающаяся ломаная $(\dots A_{-1}A_0A_1 \dots)$, у которой все „четные" вершины составляют множество R всех рациональных точек (обе координаты рациональны) в плоскости. Действительно, ломаная построена для множества H, которое в плоскости плотно и которое является более общим, чем множество R.

Summary

ON A COVERING OF ALL RATIONAL POINTS IN THE PLANE BY AN INFINITE POLYGONAL CURVE

VÁCLAV POLÁK, Brno

A construction of an infinite simple polygonal curve $(\dots A_{-1}A_0A_1 \dots)$ is given, such that the even-numbered vertices form the set R of all the points in the Euclidean plane with rational coordinates. In fact a curve is constructed covering a set H, dense in the plane and of a type more general than R.