Časopis pro pěstování matematiky

František Hladík

Poznámka o řešení rovnice $y'' + fy' + \varphi y = 0$, jejíž jedno partikulární řešení je derivací druhého

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 2, 202--203

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108376

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

POZNÁMKA O ŘEŠENÍ ROVNICE $y'' + fy' + \varphi y = 0$, JEJÍŽ JEDNO PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ JE DERIVACÍ DRUHÉHO

FRANTIŠEK HLADÍK, Písek

(Došlo dne 8. prosince 1959)

Mějme rovnici

$$y'' + fy' + \varphi y = 0\,, \tag{1}$$

kde f a φ jsou funkce, mající v otevřeném intervalu J spojité derivace 2. řádu, při čemž $f'(x) \neq 0$ všude v J.

Věta. *K tomu, aby rovnice* (1) *měla v J partikulární řešení A, jehož derivace $A' = B$ je též řešením* (1), *je nutné a stačí, aby f a φ splňovaly v J rovnici*

$$u' + fu + u^2 + \varphi = 0\,, \quad \textit{kde} \quad u = -\frac{\varphi'}{f'}\,. \tag{2}$$

Je-li tato podmínka splněna, je

$$A = \exp\left(-\int \frac{\varphi'}{f'}\,\mathrm{d}x\right). \tag{3}$$

Poznámka. Ověříme-li tedy platnost (2), můžeme napsat ihned dvě partikulární řešení rovnice (1):

$$A = \exp \int u \,\mathrm{d}x\,, \quad B = A' = u \exp \int u\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Nechť A a A' jsou řešeními (1) v J; pak je v J

$$A'' + fA' + \varphi A = 0\,, \tag{4}$$

$$A''' + fA'' + \varphi A' = 0\,. \tag{5}$$

Derivujeme-li (4) a užijeme-li vztahu (5), dostaneme ihned vztah

$$f'A' + \varphi' A = 0\,, \tag{6}$$

z něhož plyne (3).

Položme $u = -\dfrac{\varphi'}{f'}$; derivováním (3) dostaneme postupně

$$A' = Au\,, \tag{7}$$

$$A'' = A'u + Au' = A(u^2 + u')\,; \tag{8}$$

dosadíme-li (7) a (8) do (4) a zkrátíme-li A, získáme ihned vztah (2), který je tedy nutnou podmínkou pro platnost (4) a (5).

Dokažme, že (2) je postačující podmínkou existence funkce A, splňující (4) i (5): Položíme-li $A = \exp \int u \, dx$, tj. je-li $u = \frac{A'}{A}$, bude podle (2)

$$\frac{A''A - A'^2}{A^2} + f \frac{A'}{A} + \frac{A'^2}{A^2} + \varphi = 0\,,$$

tj. bude platit (4). Vzhledem k tomu, že jsme zvolili A tak, že $u = -\frac{\varphi'}{f'} = \frac{A'}{A}$ tj. $f'A' + \varphi'A = 0$, plyne z rovnice (4) (derivováním) rovnost (5).

Příklad. Rozřešíme popsanou metodou rovnici

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)\,y = 0\,.$$

Jest $f(x) = -4x$, $\varphi(x) = 4x^2 - 2$, takže $u = 2x$. Dosazením se přesvědčíme, že (2) platí. Řešení jsou tedy

$$A = \exp x^2\,, \quad B = A' = 2x \exp x^2\,.$$

Literatura

E. Kamke: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Lipsko, 6. vydání, 1959.