Leo Boček

Eine Verschärfung isoperimetrischer Ungleichungen für Kurven und Polygone

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 115 (1990), No. 2, 142--146

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108369`

EINE VERSCHÄRFUNG ISOPERIMETRISCHER UNGLEICHUNGEN FÜR KURVEN UND POLYGONE

LEO BOČEK, Praha

(Eingegangen am 29. 1. 1988)

Zusammenfassung. In der Betrachtung werden isoperimetrische Ungleichungen bewiesen die die Ungleichungen aus [1] verschärfen und gleichzeitig die in [2] und [3] abgeleiteten Ungleichungen für euklidische Räume beliebiger Dimension verallgemeinern.

Keywords: Isoperimetrische Ungleichung, Kurven, Polygone.

AMS Classification: 52A40.

Im ersten Teil der Arbeit werden rektifizierbare Kurven im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n betrachtet. Wir behalten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus [2], nur ist jetzt $k, l, p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Es sei also

$$x_k = x_x(\tau), \quad \tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

eine Parameterdarstellung einer geschlossenen Kurve $\mathscr{C}$, wo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kartesische Koordinaten in E_n sind und der Parameter τ proportional zur Bogenlänge s der Kurve $\mathscr{C}$ ist, $\tau = 2\pi\, s/L$, L ist die Gesamtlänge der Kurve.

Wir setzen wieder

$$F_{kl} = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x_k x'_l - x_l x'_k)\, d\tau .$$

Für $k \neq l$ ist $|F_{kl}|$ der Flächeninhalt des Bereiches, der in der $(x_k x_l)$-Ebene durch die orthogonale Projektion der Kurve $\mathscr{C}$ begrenzt ist, wobei man noch mit gewisser Vielfachheit arbeitet.

Sind c_{kl} $(k < l)$ beliebige reelle Zahlen, die nicht alle gleich Null sind, so wurde in [1] (Satz 2) die Ungleichung

$$L^2 \geqq 4\pi\, C^{-1/2} \sum_{k<1} c_{kl} F_{kl} \tag{1}$$

bewiesen, wo $C = \sum_{k<l} c_{kl}^2$. In den Arbeiten [2] und [3] wurde diese Ungleichung für die Fälle $n = 4$ und $n = 5$ verschärft, was wir weiter für beliebiges n verallgemeinern. Wir setzen zuerst $c_{kk} = 0$ und $c_{kl} = -c_{lk}$ für $k > l$ und stellen uns die Frage, wie man diese Zahlen bei einer Koordinatentransformation ändern muss, wenn der Ausdruck

$$\sum_{k<l} c_{kl}F_{kl} = \tfrac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}F_{kl}$$

invariant sein soll. Es ist leicht zu zeigen, dass sich die c_{kl} wie die Koordinaten einer antisymmetrischen Bilinearform verhalten. Da wir nur die Koordinatentransformationen betrachten, die von einem kartesischen Koordinatensystem zu wieder so einem führen, die also durch eine orthonormierte Matrix gegeben sind, sind auch die Werte C und

$$D = \sum_{k,l,p,q} (c_{kl}c_{pq} + c_{kp}c_{ql} + c_{kq}c_{lp})^2$$

invariant. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $D = 0$ genau dann gilt, wenn die durch c_{kl} gegebene Bilinearform ein Monom ist, also eine Bilinearform, die man als antisymmetrisches Tensorprodukt zweier Linearformen bekommt. Invariant gegenüber unseren Koordinatentransformationen sind auch alle Eigenwerte der Matrix (c_{kl}), die entweder gleich Null oder rein imaginär sind.

Zuletzt benutzen wir aus der linearen Algebra die bekannte Behauptung, nach der man zu jeder antisymmetrischen Bilinearform eine orthonormierte Basis so wählen kann, dass für die Koeffizienten c_{kl} dieser Form gilt

(2) $$c_{12} = -c_{21} = \lambda_1\,, \quad c_{34} = -c_{43} = \lambda_2, \ldots,$$
$$c_{2r-1,2r} = -c_{2r,2r-1} = \lambda_r\,, \quad \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_r > 0\,,$$
alle andere c_{kl} sind gleich Null.

Der Rang der Bilinearform ist dann gleich $2r$ und sie ist genau dann ein Monom, wenn $r = 1$ ist.

Satz 1. *Ist C eine geschlossene rektifizierbare Kurve in E_n und (c_{kl}) eine von der Nullmatrix verschiedene antisymmetrische $n \times n$-Matrix, dann gilt für die Länge L der Kurve $\mathscr{C}$ die Ungleichung*

(3) $$L^2 \geqq 4\pi\lambda^{-1} \sum_{k<l} c_{kl}F_{kl}\,,$$

wo λ das Maximum der Beträge der Eigenwerte der Matrix (c_{kl}) bezeichnet. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Kurve eine Kreislinie ist, deren Ebene die folgende Eigenschaft besitzt: Alle Vektoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dieser Ebene entsprechen dem Eigenwert λi, d.h. $\sum_{k,l} c_{pk}c_{kl}u_l = -\lambda^2 u_p$, $p = 1, 2, \ldots, n$.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, das Koordinatensystem so gewählt zu haben, dass (2) gilt, es ist dann $\lambda = c_{12}$. Wir setzen weiter voraus den Nullpunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt der Kurve $\mathscr{C}$ gewählt zu haben, also gilt

$\int_0^{2\pi} x_k \, d\tau = 0$ und nach dem Lemma von Wirtinger ist

$$\int_0^{2\pi} x_k'^2 \, d\tau \geqq \int_0^{2\pi} x_k^2 \, d\tau ,$$

das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_k = a_k \cos \tau + b_k \sin \tau$ ist. Es ist also

$$L^2/\pi = 2 \sum_k \int_0^{2\pi} x_k'^2 \, d\tau \geqq \sum_k \int_0^{2\pi} x_k'^2 \, d\tau + \sum_k \int_0^{2\pi} x_k^2 \, d\tau \geqq$$

$$\geqq \sum_{1=k}^{2r} \int_0^{2\pi} x_k'^2 \, d\tau + \sum_{t=1}^{r} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_t^2}{\lambda^2} (x_{2t-1}^2 + x_{2t}^2) \, d\tau \geqq$$

$$\geqq 2 \sum_{t=1}^{r} \frac{\lambda_t}{\lambda} \int_0^{2\pi} (x_{2t-1} x_{2t}' - x_{2t} x_{2t-1}') \, d\tau = \frac{4}{\lambda} \sum_{k<l} c_{kl} F_{kl} ,$$

womit die Ungleichung (3) bewiesen ist. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_{2t-1} = x_{2t} = 0$ für die t, für die $\lambda_t < \lambda$ ist, $x_k = 0$ für $k > 2r$ und $x_{2t-1} = a_t \cos \tau + b_t \sin \tau$, $x_{2t} = -b_t \cos \tau + a_t \sin \tau$ für die t, für welche $\lambda_t = \lambda$ gilt.

Den Beweis des Satzes könnten wir auch mittels der Fourierschen Reihen führen. Der Satz stellt erstens eine Verschärfung der Ungleichung (1) dar, wobei (1) und (3) nur dann identisch sind, wenn c_{kl} ein Monom bestimmen. Zweitens ist der Satz eine Verallgemeinerung der Behauptungen aus den Arbeiten [2] und [3], wo er für $n = 4$ und $n = 5$ bewiesen ist.

Ein ähnliches Verfahren können wir auch für geschlossene Polygone in E_n anwenden und damit eine Verschärfung der Ungleichungen aus dem Satz 3 in [1] bekommen. Wir müssen dann nur die diskrete Analogie des Lemmas von Wirtinger benutzen. Nach diesem Lemma gilt für Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0$ die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{x}_j\|^2 , \tag{4}$$

sobald $\sum_{j=1}^{m} \mathbf{x}_j = 0$ gilt. Das Gleichheitszeichen gilt in der Ungleichung genau dann, wenn $\mathbf{x}_j = \mathbf{a} \cos 2\pi j/m + \mathbf{b} \sin 2\pi j/m$ ist.

Ist also ein geschlossener Polygon in E_n durch die Eckpunkte mit den Ortsvektoren $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn})$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_m$, $j = 1, 2, \ldots, m$ gegeben und lassen wir den Nullpunkt des Koordinatensystems mit dem Schwerpunkt des Polygons zusammenfallen, so gilt (4). Es seien weiter c_{kl} $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ reelle Zahlen, die nicht alle gleich Null sind und für die $c_{lk} = -c_{kl}$ gilt. Es sei für $k \neq l$

$$F_{kl} = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (x_{j-1,k} x_{jl} - x_{j-1,l} x_{jk})$$

der „orientierte" Flächeninhalt des Vielecks, das durch die orthogonale Projektion des Polygons in die Ebene der Achsen x_k, x_l entstanden ist. Wir möchten wieder eine obere Grenze für den Ausdruck $\sum c_{kl} F_{kl}$ finden.

Satz 2. *Für ein geschlossenes m-Polygon in E_n mit den Eckpunkten $\mathbf{x}_k$ und für jede antisymmetrische von der Nullmatrix verschiedene Matrix (c_{kl}) gilt*

$$(5)\qquad \sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|^2 \geqq 4\lambda^{-1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \sum_{k<l} c_{kl} F_{kl} ,$$

wo λ das Maximum der Beträge der Eigenwerte der Matrix (c_{kl}) bezeichnet. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn das Polygon eben und regelmässig ist und die Vektoren der Ebene des Polygons wieder dem in Betrag maximalen Eigenwert der Matrix (c_{kl}) entsprechen.

Beweis. Genauso wie im ersten Teil der Arbeit können wir auch hier voraussetzen, das Koordinatensystem und entsprechend die Zahlen c_{kl} so geändert zu haben, dass (2) gilt und den Nullpunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt des Polygons gewählt zu haben. Es gilt dann

$$\sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m}\right) \sum_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m}\right) \sum_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|^2 \geqq$$

$$\geqq \tfrac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m}\right) \sum_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|^2 + \tfrac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m}\right) 4 \sin^2 \frac{\pi}{m} \sum_j \|\mathbf{x}_j\|^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|^2 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} \left(4 \sum \|\mathbf{x}_j\|^2 - \sum \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|^2\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|^2 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} \sum \|\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_{j-1}\|^2 \geqq$$

$$\geqq \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{r} \left[(x_{j,2t-1} - x_{j-1,2t-1})^2 + (x_{j,2t} - x_{j-1,2t})^2\right] +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{r} \frac{\lambda_t^2}{\lambda^2} \left[(x_{j,2t-1} + x_{j-1,2t-1})^2 + (x_{j,2t} + x_{j-1,2t})^2\right] \geqq$$

$$\geqq \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{r} \frac{\lambda_t}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \left[-(x_{j,2t-1} - x_{j-1,2t-1})(x_{j,2t} + x_{j-1,2t}) +\right.$$

$$\left.+ (x_{j,2t} - x_{j-1,2t})(x_{j,2t-1} + x_{j-1,2t-1})\right] =$$

$$= \frac{2}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{r} \lambda_t (x_{j,2t} x_{j-1,2t-1} - x_{j,2t-1} x_{j-1,2t}) =$$

$$= \frac{4}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \sum_{t=1}^{r} \lambda_t F_{2t-1,2t} = \frac{4}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \sum_{k<l} c_{kl} F_{kl} .$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (5) genau dann, wenn $x_{j,2t-1} = x_{j,2t} = 0$ für alle j

und die t, für die $\lambda_t < \lambda$ ist, weiter $x_{jk} = 0$ für alle j und $k > 2r$ und

$$x_{j,2t-1} = a_t \cos \frac{2\pi j}{m} + b_t \sin \frac{2\pi j}{m}$$

$$x_{j,2t} = -b_t \cos \frac{2\pi j}{m} + a_t \sin \frac{2\pi j}{m}$$

für t mit der Eigenschaft $\lambda_t = \lambda$, womit der Satz bewiesen ist.

Literatur

[1] *L. Boček:* Isoperimetrische Ungleichungen für räumliche Kurven und Polygone. Časopis pěst. mat. *104* (1979), 86—92.

[2] *Z. Nádeník:* Eine isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Kurven im vierdimensionalen Raum. Časopis pěst. mat. *105* (1980), 302—310.

[3] *V. Šobr:* Isoperimetrische Ungleichungen für geschlossene Kurven. Časopis pěst. mat. *113* (1988), 403—414.

Souhrn

ZOSTŘENÍ ISOPERIMETRICKÝCH NEROVNOSTÍ PRO KŘIVKY A POLYGONY

LEO BOČEK

V práci jsou dokázány isoperimetrické nerovnosti, jež jsou zostřením nerovností z práce [1] a současně zobecňují nerovnosti odvozené v [2] a [3] na euklidovské prostory libovolné dimenze.

Резюме

УСИЛЕНИЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ КРИВЫХ И ПОЛИГОНОВ

LEO BOČEK

В работе доказаны изопериметрические неравенства, которые являются усилением неравенств из работы [1] и одновременно обобщением неравенств из [2] и [3] на евклидовы пространства произвольной размерности.

Anschrift des Verfassers: Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.