M. M. Vainberg

К применению вариационного метода в теории дифференциальных уравнений

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 2, 119--145

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108354`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 95 * PRAHA 13. 5. 1970 * ČÍSLO 2

К ПРИМЕНЕНИЮ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. М. ВАЙНБЕРГ, Москва

(Поступило в редакцию 14/XII 1967 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди различных методов исследования тех или иных задач для уравнений с частными производными известную роль играет и вариационный метод.

Первые применения этого метода восходят к Гауссу, Кельвину и Риману и связаны с известным „принципом Дирихле", согласно которому среди всех функций $u(x)$, принимающих заданные значения на границе S области D, та функция, которая сообщает минимум интегралу

$$\int_D \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] \mathrm{d}x\,, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

является гармонической в D.

В более общем виде „принцип Дирихле" формулируется следующим образом. Всякое эллиптическое самосопряженное уравнение

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu = f \tag{1.1}$$

является уравнением Эйлера для интеграла

$$I = \int_D \left[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i} - cu^2 + 2uf\right] \mathrm{d}x\,. \tag{1.2}$$

Отсюда ясно, что отыскание решений уравнения (1.1), удовлетворяющих граничному условию

$$u(x) = \varphi(x)\,, \quad x \in S \tag{1.3}$$

связано с отысканием минимума интеграла I.

Не касаясь здесь возражения Вейерштрасса и связанных с этим возражением дальнейших исследований, посвященных „принципу Дирихле", мы перейдем к рассмотрению некоторых задач для нелинейных дифференциальных уравнений и покажем как они сводятся к нахождению минимума соответствующих функционалов.

2. СВЕДЕНИЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Хорошо известна связь между краевыми задачами для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа и соответствующими линейными интегральными уравнениями. Подобная связь имеет место и в нелинейном случае.

Приведем два примера

Пример 2.1. Пусть положительная функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $0 \leqq x \leqq l$ и $f(u, x)$ – вещественная функция, непрерывная в полосе $-\infty < u < +\infty$ $0 \leqq x \leqq l$. Тогда задача об отыскании решений уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + f(u, x) = 0\,, \tag{2.1}$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{aligned} \alpha_1\, u(0) + \alpha_2\, u'(0) + \alpha_3\, u(1) + \alpha_4\, u'(1) = 0\,, \\ \beta_1\, u(0) + \beta_2\, u'(0) + \beta_3\, u(1) + \beta_4\, u'(1) = 0\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где не все α_i, а также не все β_i, равны нулю, причем

$$p(1)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = p(0)\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

эквивалентна задаче об отыскании всех дважды непрерывно дифференцируемых решений нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y)\, f(u(y), y)\, \mathrm{d}y\,, \tag{2.4}$$

где $G(x, y)$ – положительная и симметричная функция Грина.

Отметим, что условие (2.3) в частности выполняется, если (2.2) заменено на

$$\begin{aligned} A_1\, u(0) + A_2\, u'(0) = 0\,, \\ B_1\, u(1) + B_2\, u'(1) = 0\,, \end{aligned} \tag{2.2'}$$

где A_1 и A_2 (а также B_1 и B_2) одновременно не равны нулю.

Пример 2.2. Пусть D – ограниченная област трехмерного евклидова пространства с достаточно гладкой границей S и $f(u, x)$ – непрерывная функция в цилиндре $-\infty < u < +\infty$, $x \in D$. Тогда внутренняя задача Дирихле для уравнения

$$\Delta u + f(u, x) = 0 \tag{2.5}$$

эквивалентна задаче об отыскании решений нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_D G(x, y) f(u(y), y) \, \mathrm{d}y, \tag{2.6}$$

где $G(x, y)$ – положительная симметричная функция Грина.

Интегральные операторы Γu, стоящие в правых частях равенств (2.4) и (2.6), называются операторами Гаммерштейна, а уравнения (2.4) и (2.6) – нелинейными уравнениями Гаммерштейна.

Оператор Гаммерштейна Γ представляет собою произведение двух операторов – линейного интегрального оператора A

$$Au = \int_D G(x, y) \, v(y) \, \mathrm{d}y$$

и нелинейного оператора h

$$hu = f(u(x), x), \quad x \in D$$

называемого оператором Немыцкого. Именно

$$\Gamma u = Ahu. \tag{2.7}$$

Таким образом уравнение Гаммерштейна принимает вид

$$u = Ahu. \tag{2.8}$$

Если интересоваться классическими решениями, то задача (2.1)–(2.2) или краевая задачи для уравнения (2.5) сводится к отысканию непрерывно дифференцируемых решений уравнения Гаммерштейна (2.8). В случае обобщенных решений упомянутые задачи для дифференциальных уравнений сводятся к отысканию решений нелинейного интегрального уравнения (2.8), принадлежащих некоторым функциональным пространствам. При этом возникают вопросы о действии операторов h и A. Если, например, оператор Немыцкого h действует из пространства Лебеги L^{p_1} в пространство Лебеги L^{p_2}, а линейный интегральный оператор A действует из L^{p_2} в L^{p_1}, то можно искать решения уравнения (2.8), принадлежащих L^{p_1}.

Условия действия линейных интегральных операторов в пространствах Лебега достаточно изучены. Известна также следующая теорема об операторе Немыцкого.

Для того, чтобы оператор Немыцкого h

$$hu = f(u(x), x),$$

где $f(u, x)$ непрерывна по $u \in (-\infty, +\infty)$ и измерима по Лебегу по $x \in D$, был непрерывным оператором, действующим из L^{p_1} в L^{p_2}, необходимо и достаточно, чтобы

$$|f(u, x)| \leqq a(x) + b|u|^r,$$

где $r = p_1/p_2$, $b > 0$, $a(x) \in L^{p_2}$.

3. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД И ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Варизационный метод доказательства существования решений нелинейных уравенений заключается в том, что по операторам, входящим в рассматриваемое уравнение, строятся функционалы такие, чтобы критические точки этих функционалов служили решениями рассматриваемого уравнения или прообразами этих решений. При этом важную роль играют потенциальные операторы, к рассмотрению которых мы и переходим.

Пусть E — линейное пространство и E^* — пространство, сопряженное к E.

Оператор $F(x)$, действующий из E в E^*, называется градиентом фунционала $f(x)$, заданного в E, если

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = (h, F(x)),$$

где h — проозвольный вектор из E и $(h, F(x))$ — линейный фунцкионал от h при каждом фиксированном x.

Пишут тогда, что

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x).$$

Оператор $F(x)$, являющийся градиентом фунционала $f(x)$, называется потенциальным, а $f(x)$ называется потенциалом оператора $F(x)$.

Приведем два примера.

Пример 3.1. Пусть H — вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим в H функционал

$$f(x) = (x, x).$$

Тогда

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} [2(x, h) + t(h, h)] = (h, 2x),$$

так что

$$\operatorname{grad}(x, x) = 2x\,. \tag{3.1}$$

Пример 3.2. Пусть A – самосопряженный оператор, заданный в H и для всякого $x \in H$

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x)\,.$$

Рассмотрим другой функционал, заданный в H

$$\varphi(x) = f(Ax)\,.$$

Тогда

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(Ax + tAh) - f(Ax)}{t} = (Ah, F(Ax)) = (h, AF(Ax))\,,$$

т. е.

$$\operatorname{grad} f(Ax) = AF(Ax)\,. \tag{3.2}$$

Приведем условия потенциальности операторов.

Пусть оператор $\Phi(x)$ действует из пространства E в E^* и непрерывен в некоторой открытой односвязанности области $\omega \subset E$.

Тогда, для того, чтобы оператор $\Phi(x)$ был потенциальным в области ω, необходимо и достаточно существование функционала $\varphi(x)$ такого, что для любого отрезка $L \subset \omega$ с концами x_1 и x_2 выполняется равенство

$$\int_L (\mathrm{d}x, \Phi(x)) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)\,.$$

При этом $\varphi(x)$ является потенциалом и он определяется формулой

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_0^1 (x - x_0, \Phi(x_0 + t(x - x_0))\,\mathrm{d}t\,,$$

где

$$\varphi_0 = \varphi(x_0) = \text{const}\,.$$

Применим данную теорему к двум примерам.

Пример 3.3. Пусть оператор Немыцкого h

$$hu = f(u(x), x)$$

действует из пространства L^p в пространство L^q $(p^{-1} + q^{-1} = 1,\ p > 1)$, т. е.

$$|f(u, x)| \leqq a(x) + b|u|^r\,, \quad r = pq^{-1} = p - 1\,, \quad b > 0\,, \quad a(x) \in L^q\,, \quad x \in D\,.$$

Покажем, что он является потенциальным. С этой целью мы рассмотрим отрезок $u(x) + t\,v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – произвольные функции пространства $L^p(D)$ (D – ограниченная област m – мерного евклидова пространства), $0 \leqq t \leqq 1$. Вдоль этого отрезка мы рассмотрим криволинейный интеграл

$$J = \int_0^1 (\mathrm{d}(u + tv), h(u + tv)) =$$

$$= \int_0^1 (\mathrm{d}(u(x) + t\,v(x)), f(u(x) + t\,v(x), x)) = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_D f(u(x) + t\,v(x), x)\,v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Изменяя порядок интегрирования (что возможно в силу теоремы Фубини), получим

$$J = \int_D \mathrm{d}x \int_0^1 f(u(x) + t\,v(x), x)\,v(x)\,\mathrm{d}t\,.$$

Полагая $u(x) + t\,v(x) = z$, получим

$$J = \int_D \mathrm{d}x \int_{u(x)}^{u(x)+v(x)} f(z, x)\,\mathrm{d}z = \int_D [\Psi(u(x) + v(x)) - \Psi(u(x))]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \varphi(u(x) + v(x)) - \varphi(u(x))\,,$$

где $\varphi(u)$ – функционал.

Данное равенство доказывает предложение. Далее, имеем, что потенциал оператора Немыцкого определяется формулой

(3.3)

$$\varphi(u) = \varphi_0 + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_D f(0 + t\,u(x), x)\,u(x)\,\mathrm{d}t = \varphi_0 + \int_D \mathrm{d}x \int_0^{u(x)} f(v, x)\,\mathrm{d}v\,.$$

Пример 3.4. Пусть A – самосопряженный оператор в вещественном гильбертовом пространстве. Покажем, что он является потенциальным. Так же, как в предыдущем примере, мы рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^1 (Au + tAv, v)\,\mathrm{d}t = (Au, v) + \tfrac{1}{2}(Av, v)\,.$$

В силу самосопряженности A имеем

$$(A(u + v), u + v) = (Au, u) + 2(Au, v) + (Av, v)\,.$$

Следовательно

$$J = \tfrac{1}{2}(A(u + v), u + v) - \tfrac{1}{2}(Au, u) = \varphi(u + v) - \varphi(u)$$

т. е. A — потенциальный оператор и его потенциал

$$\varphi(u) = \tfrac{1}{2}(Au, u) + C,$$

где C — произвольное постоянное.

Если нелинейное уравнение $\Phi(x) = 0$ таково, что $\Phi(x)$ — потенциальный оператор, то решениями этого уравнения служат критические точки потенциала оператора Φ. В том случае, когда Φ не является потенциальным оператором возникает задача о замене уравнения $\Phi = 0$ эквивалентным уравненим $\Psi = 0$, где Ψ — потенциальный оператор. Данная задача получила положительное решение для уравнения Гаммерштейна в вещественном гильбертовом пространстве и в пространствах L^p, где $p \geqq 2$.

4. СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА К УРАВНЕНИЮ С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть A — самосопряженный положительный оператор в вещественном гильбертовом пространстве H и F — нелинейный потенциальный оператор в H. Рассмотрим оператор

$$\Gamma = AF,$$

частным случаем которого является оператор Гаммерштейна. Как известно оператор Гаммерштейна не является потенциальным, а потому уравнение в L^2

$$(I - Ah)\,u = 0,$$

где I — единичный оператор, не является уравнением с потенциальными операторами. Ввиду этого, вместо уравнения

$$u - A\,F(u) = 0, \quad u \in H \tag{4.1}$$

мы рассмотрим уравнение

$$v - A^{1/2}\,F(A^{1/2}v) = 0, \quad v \in H, \tag{4.2}$$

где $A^{1/2}$ — положительный квадратный корень из A. Ясно, что всякое решение v_0 уравнения (4.2) является решением уравнения (4.1). Для того, чтобы убедиться в этом достаточно применить оператор $A^{1/2}$ к левой части (4.2) и положить $u_0 = A^{1/2}v_0$.

Далее, двум различным решениям уравнения (4.2) отвечают два различных решения уравнения (4.1). Действительно, если v_1 и v_2 — два различных решения уравнения (4.2), то

$$0 < (v_1 - v_2, v_1 - v_2) = (A^{1/2}[F(A^{1/2}v_1) - F(A^{1/2}v_2)], v_1 - v_2) =$$
$$= (F(A^{1/2}v_1) - F(A^{1/2}v_2), A^{1/2}v_1 - A^{1/2}v_2),$$

т. е.

$$u_1 - u_2 = A^{1/2}v_1 - A^{1/2}v_2 \neq 0 .$$

Для доказательства эквивалентности уравнений (4.1) и (4.2) остается показать, что двум решениям уравнения (4.1) отвечают два различных решения уравнения (4.2). Допустим поэтому, что нам известны два различных решения уравнения (4.1)

$$u_i = A\,F(u_i) \quad (u_i \in H,\ i = 1, 2) .$$

Положим

$$v_i = A^{1/2}\,F(u_i) ,$$

тогда в силу предыдущего мы будем иметь

$$(*) \qquad u_i = A^{1/2}v_i$$

и, подставляя данные значения u_i в предыдущее равенство, получим

$$v_i = A^{1/2}\,F(A^{1/2}v_i) ,$$

т. е., что v_i – решения уравнения (4.2). Решения v_1 и v_2 различны, ибо в случае их совпадения, как видно из (*), должны были совпадать u_1 и u_2.

Отметим еще, что если $F(u)$ – невозрастающий оператор, т. е.

$$(u_1 - u_2, F(u_1) - F(u_2)) \leqq 0 ,$$

то уравнение (4.2) не может иметь более одного решения. Действительно, пусть v_1 и v_2 – два различных решения. Тогда

$$\begin{aligned}(v_1 - v_2, v_1 - v_2) &= (A^{1/2}[F(A^{1/2}v_1) - F(A^{1/2}v_2)], v_1 - v_2) = \\ &= (F(A^{1/2}v_1) - F(A^{1/2}v_2), A^{1/2}v_1 - A^{1/2}v_2) \leqq 0 ,\end{aligned}$$

что невозможно.

Покажем теперь, что левая часть уравнения (4.2) представляет собою потенциальный оператор. Действительно, согласно равенству (3.1)

$$v = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,(v, v) .$$

Далее, если $f(u)$ – потенциал оператора $F(u)$, то согласно равенству (3.2) мы имеем

$$A^{1/2}\,F(A^{1/2}v) = \mathrm{grad}\,f(A^{1/2}v) .$$

Уравнение (4.2) принимает, следовательно, вид

$$\mathrm{grad}\,[(v, v) - 2f(A^{1/2}v)] = 0 .$$

Таким образом задача о нахождении решений уравнения (4.2), принадлежащих пространству H, сводится к нахождению критических точек функционала

$$\varphi(v) = (v, v) - 2f(A^{1/2}v)\,. \tag{4.3}$$

В частности, задача о нахождении в L^2 решений уравнения Гаммерштейна

$$u - Ahu = 0\,, \tag{4.4}$$

где A — самосопряженный положительный интегральный оператор, сводится к отысканию критических точек функционала (см. пример 3.3 и формулу (3.2))

$$\varphi(u) = \int_D u^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_D \mathrm{d}x \int_0^{A^{1/2}u} f(v, x)\,\mathrm{d}v\,, \tag{4.5}$$

где

$$Au = \int_D K(x, y)\,u(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

До сих пор мы предполагали, что A — положительный оператор. Разумеется, случай отрицательного оператора сводится к положительному оператору путем изменения знака обеих частей уравнения.

Перейдем к рассмотрению общего случая.

Пусть A — самосопряженный оператор, заданный во всем вещественном гильбертовом пространстве H, причем положительная его часть A_+ и его отрицательная часть A_- не являются пустыми. Покажем как в данном случае уравнение (4.1) сводится к отысканию критических точек некоторого функционала.

Так как самосопряженный оператор A задан ве всем пространстве H, то он ограничен. Положим

$$\alpha = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)\,, \quad \beta = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)\,.$$

Согласно условиям

$$-\infty < \alpha < 0\,, \quad 0 < \beta < +\infty\,.$$

Пусть E_t — разложение единицы оператора A; тогда

$$E(\Delta) = E_\beta - E_0 = P_1$$

представляет собою оператор проектирования на инвариантное подпространство $H_1 \subset H$, которое приводит A. Обозначим через P_2 оператор проектирования на подпространство

$$H_2 = H \ominus H_1$$

и положим для всякого $x \in H$

$$((x))^2 = \|P_1 x\|^2 - \|P_2 x\|^2\,.$$

Рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = 2f(Bx) - ((x))^2, \tag{4.6}$$

где f — потенциал оператора F и B — главный квадратный корень из оператора A, т. е.

$$B = B_+ - B_-,$$

где B_+ — положительный квадратный корень из положительной части A_+ оператора A, а B_- — положительный квадратный корень из абсолютного значения отрицательной части A_- оператора A.

Для функционала (4.6) имеем

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = 2BF(Bx) - 2(P_1 x - P_2 x),$$

так что равенство для критических точек: $\operatorname{grad} \varphi(x) = 0$ приводит к уравнению

$$BF(Bx) - (P_1 - P_2)\, x = 0. \tag{4.7}$$

Обозначив через T положителный квадратный корень из абсолютного значения оператора A, мы в силу равенств

$$TB = (B_+ + B_-)(B_+ - B_-) = B_+^2 - B_-^2 = A_+ + A_- = A,$$
$$T(P_1 - P_2) = (B_+ + B_-)(P_1 - P_2) = B_+ - B_- = B$$

получим из (4.7), после умножения на T

$$AF(Bx) - Bx = 0.$$

Полагая $Bx = u$, мы приходим к равенству (4.1). Таким образом каждое решение x уравнения (4.7) дает решение $u = Bx$ уравнения (4.1). Так же как раньше доказывается, что различные решения уравнения (4.7) приводят к различным решениям уравнения (4.1), и наоборот.

5. О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Мы видели, что задача об отыскании решений уравнения Гаммерштейна в пространстве L^2 сводится к нахождению критических точек функционала (4.5). Разумеется, всякая критическая точка $v(x)$ этого функционала удовлетворяет уравнению

$$v - A^{1/2} h A^{1/2} v = 0, \tag{5.1}$$

где $A^{1/2}$ – положительный квадратный корень из положительного интегрального оператора A

$$Au = \int_D K(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Если к левой части уравнения (5.1) применить оператор $A^{1/2}$ и положить $A^{1/2}v = u$, то получим

$$u - Ahu = 0\,. \tag{5.2}$$

Как известно, если самосопряженный в L^2 положительный оператор A является вполне непрерывным, то для него справедливо спектральное представление

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u, \varphi_k)}{\lambda_k}\, \varphi_k\,, \tag{5.3}$$

а для его положительного квадратного корня спектральное представление имеет вид

$$A^{1/2}u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u, \varphi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\, \varphi_k\,, \tag{5.4}$$

где φ_k – собственные функции оператора A, соответствующие его характеристическим числам λ_k.

Для дальнейшего мы воспользуемся следующей теоремой.

Если самосопряженный и положительный в L^2 линейный интегральный оператор A действует вполне непрерывно из пространства L^q в пространство L^p ($p \geqq 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$), то определенный формулой (5.4) линейный оператор действует вполне непрерывно из L^q в L^2 и из L^2 в L^p.

Если A является лишь ограниченным оператором из L^q в L^p то, разумеется, представления (5.3) и (5.4) не имеют место. Однако, и в этом случае определенный в L^2 положительный квадратный корень $A^{1/2}$ является ограниченным оператором из L^2 в L^p, а сопряженный к нему оператор $(A^{1/2})^*$ ограничен из L^q в L^2, причем

$$A^{1/2}(A^{1/2})^* = A\,. \tag{5.5}$$

Пусть оператор Немыцкого h действует из L^p в L^q, а линейный интегральный оператор A действует из L^q в L^p ($p \geqq 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$).

Будем рассматривать функционал (4.5) в пространстве L^2 и допустим, что v – критическая точка этого функционала. Тогда

$$\operatorname{grad} \varphi(v) = 0$$

или

$$v - (A^{1/2})^*\, h(A^{1/2}v) = 0\,.$$

Применяя оператор $A^{1/2}$ получим

$$A^{1/2}v - Ah(A^{1/2}v) = 0\,.$$

Так как $u = A^{1/2}v \in L^p$, то мы получим решение уравнения Гаммерштейна, принадлежащее пространству L^p.

Отметим, что проведенные здесь рассуждения применимы и тогда, когда оператор A является индефинитным, т. е.

$$A = A_+ + A_-\,,$$

где положительная часть A_+ и отрицательная часть A_- не являются пустыми. В этом случае нужно использовать главный квадратный корень из оператора A и квадратный корень из оператора $|A|$.

6. О МИНИМУМЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Для нахождения критических точек функционалов (4.3) или (4.5) мы воспользуемся некоторыми общими предложениями.

Функционал $f(x)$, заданный на некотором открытом множестве U банахова пространства E, называется слабо полунепрерывным снизу (сверху) в точке $x_0 \in U$, если какова бы ни была последовательность $\{x_n\} \in U$, слабо сходящаяся к x_0, имеет место неравенство

$$f(x_0) \leqq \varliminf_{n\to\infty} f(x_n)\,(\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \leqq f(x_0))\,.$$

Приведем несколько примеров слабо полунепрерывных снизу вещественных функционалов в вещественном гильбертовом пространстве.

Пример 6.1. Функционал $f(x) = (x, x)$ слабо полунепрерывен снизу, ибо из слабо сходимости $\{x_n\}$ к x_0 следует, что

$$(x_0, x_0) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} (x_n, x_n)\,.$$

Выделяя теперь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n_k}, x_{n_k}) = \varliminf_{n\to\infty} (x_n, x_n)\,,$$

мы в силу единственности предела будем иметь

$$(x_0, x_0) \leqq \varlimsup_{k\to\infty} (x_{n_k}, x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k}, x_{n_k}) = \varliminf_{k\to\infty} (x_n, x_n)\,.$$

Пример 6.2. Пусть A — положительный самосопряженный оператор во всем H. Тогда (см. пример 3.4) A является градиентом квадратичного функциоанала

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(Ax, x) + C = \tfrac{1}{2}(A^{1/2}x, A^{1/2}x) + C \quad (C = \mathrm{const})\,.$$

Полагая $y = A^{1/2}x$ мы в силу ограниченности $A^{1/2}$ находим, что если $\{x_n\}$ сходится слабо к x_0, что последовательность $y_n = A^{1/2}x_n$ сходится слабо к $y_0 = A^{1/2}x_0$, так что согласно предыдущему примеру данный функционал слабо полунепрерывен снизу.

Пример 6.3. Пусть T — самосопряженный оператор, заданный во всем H, причем положительная часть его спектра произвольна, а отрицательная часть спектра состоит из конечного числа собственных значений, имеющих конечную кратность. Рассмотрим потенциал оператора T

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}(Tx, x) + C\,.$$

Пусть T_+ и T_- представляют собою соответственно положительную и отрицательную части оператора T. Тогда $T = T_+ + T_-$ и

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}(T_+x, x) + \tfrac{1}{2}(T_-x, x) + C\,.$$

Но $\frac{1}{2}(T_+x, x)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал согласно примеру 6.2. Второе слагаемое слабо непрерывно, ибо T_- как оператор, действующий из H в конечномерное пространство, вполне непрерывен.

Следовательно, $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу, как сумма таких функционалов.

Вещественный функционал $f(x)$, заданный на выпуклом множестве ω аффинного пространства E, называется выпуклым на ω, если

$$f(tx_1 + (1 - t)\,x_2) \leqq tf(x_1) + (1 - t)\,f(x_2)\,,$$

где $x_1, x_2 \in \omega$, $0 < t < 1$ и строго выпуклым, если равенство исключено.

Лемма 6.1. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемый по Гато функционал и $Df(x, h)$ — — его линейный дифференциал Гато. Тогда, если в точке x_0 выполняется неравенство*

$$(6,1) \qquad f(x) - f(x_0) - Df(x_0, x - x_0) \geqq 0\,,$$

где $x \in U(x_0)$, $U(x_0)$ — некоторая окрестность точки x_0 линейного топологического пространства E, то $f(x)$ слабо полунепрерывен снизу в точке x_0. Если неравенство (6.1) *выполняется для любых $x, x_0 \in U$, то $f(x)$ является выпуклым (или строго выпуклым, когда при $x \neq x_0$ равенство исключено).*

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \in U$ – произвольная последовательность, сходящаяся слабо к x_0. Так как $Df(x_0, x_n - x_0)$ – линейный функционал относительно $x_n - x_0$, то

$$\varliminf_{n\to\infty} [f(x_n) - f(x_0)] \geqq \varliminf_{n\to\infty} Df(x_0, x_n - x_0) = \lim_{n\to\infty} Df(x_0, x_n - x_0) = 0\,,$$

т. е.

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) - f(x_0) \geqq 0\,.$$

Данное неравенство доказывает первую часть леммы.

Для доказательства второй части леммы мы применим неравенство (6.1) к векторам $x_1, x_2 \in U$, считая $x_1 \neq x_2$. Напишем

$$f(x_1) \geqq f(x_0) + Df(x_0, x_1 - x_0)\,,$$

$$f(x_2) \geqq f(x_0) + Df(x_0, x_2 - x_0)\,.$$

Умножая первое неравенство на t, а второе на $(1 - t)$, где $0 < t < 1$, мы после сложения получим

$$t\,f(x_1) + (1 - t)\,f(x_2) \geqq f(x_0) + Df(x_0, tx_1 + (1 - t)\,x_2 - x_0)\,.$$

Считая окрестность U выпуклой и полагая

$$x_0 = tx_1 + (1 - t)\,x_2$$

получим

$$t\,f(x_1) + (1 - t)\,f(x_2) \geqq f(tx_1 + (1 - t)\,x_2)\,,$$

ибо $Df(x_0, 0) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Для выполнения неравенства* (6.1) *достаточно, чтобы*

$$D^2f(x; h, h) \geqq 0\,.$$

Доказательство. Применяя формулу Лагранжа, получим

$$f(x) - f(x_0) = Df(x_0 + \tau(x - x_0), x - x_0) =$$

$$= Df(x_0, x - x_0) + [Df(x_0 + \tau(x - x_0), x - x_0) - Df(x_0, x - x_0)]\,.$$

Применяя к последней скобке формулу Лагранжа, получим

$$f(x) - f(x_0) = Df(x_0, x - x_0) + \tau D^2f(x_0 + \tau_1(x - x_0); x - x_0, x - x_0)\,,$$

где $0 < \tau < 1$, $0 < \tau_1 < 1$. Из последнего равенства в силу условия леммы вытекает неравенство (6.1).

Лемма 6.3. *Для того, чтобы выпуклый и дифференцируемый по Гато функционал $f(x)$ имел минимум в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0 .$$

Доказательство необходимости. Пусть h — произвольный вектор и x_0 — точка минимума $f(x)$. Рассмотрим вещественную функцию $f(x_0 + th)$. Для нее имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + th)\Big|_{t=0} = 0$$

или

$$Df(x_0, h) = 0$$

или

$$(h, \operatorname{grad} f(x_0)) = 0 .$$

Так как h — произвольный вектор из E, то $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$. Путем замены

$$x = z + x_0 , \quad f(z + x_0) = f_1(z)$$

имеем

$$\operatorname{grad} f_1(0) = 0 .$$

Полагая $f_1(z) - f_1(0) = \varphi(z)$, имеем

$$\varphi(0) = 0 , \quad \operatorname{grad} \varphi(0) = 0 .$$

Допустим, что в точке $z = 0$ $\varphi(z)$ не имеет минимума. Тогда найдется точка z_1 такая, что

$$\varphi(z_1) = \alpha < 0 .$$

Так как $\varphi(z)$ — выпуклый функционал, то

$$\varphi(tz_1 + (1 - t)\, 0) \leqq t\, \varphi(z_1) = t\alpha .$$

Следовательно

$$\frac{\varphi(0 + tz_1) - \varphi(0)}{t} \leqq \alpha < 0 .$$

Переходя к пределу при $t \downarrow 0$ получим

$$(z_1, \operatorname{grad} \varphi(0)) \leqq \alpha < 0$$

т. е.

$$\operatorname{grad} \varphi(0) \neq 0 .$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 6.4. *Строго ыпуклый функционал может лишь иметь одну точку минимума.*

Доказательство. Допустим, что $d_1 = f(x_1) = \min f(x)$ и $d_2 = f(x_2) = \min f(x)$, причем $d_1 \leqq d_2$ и $x_1 \neq x_2$. Рассмотрим окрестности U_1, U_2 точек x_1 и x_2 в которых соответственно $f(x) \geqq f(x_i)$, $i = 1, 2$. Тогда для всякого $t \in (0, 1)$ имеем

$$f(tx_2 + (1 - t)x_1) < td_2 + (1 - t)d_1 \leqq td_2 + (1 - t)d_2 = d_2,$$

т. е.

$$f(tx_2 + (1 - t)x_1) < d_2.$$

Но при t близком к 1 точка $tx_2 + (1 - t)x_1 = x_0 \in U_2$, так что $f(x_0) < d_2 = f(x_2)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 6.1. *Если на ограниченном слабо замкнутом множестве σ рефлексивного банахова пространства E задан слабо полунепрерывный снизу функционал $f(x)$, то этот функционал ограничен снизу и достигает на σ своей нижней грани.*

Доказательство. В доказательстве нуждаются лишь случай, когда σ бесконечно. Ограниченность снизу устанавливается так же, как в конечномерных пространствах, ибо всякое ограниченное множество рефлексивного пространства слабо компактно. Пусть $d = \inf f(x)$ и $\{x_n\}$ – минимизирующая последовательность. Так как последовательность $\{x_n\}$ слабо компактна и σ слабо замкнуто, то из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к $x_0 \in \sigma$. Для этой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ сохраняется равенство

$$d = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}).$$

Но в силу слабой полунепрерывности

$$f(x_0) \leqq \underline{\lim}_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = d.$$

Отсюда и из неравенства $d \leqq f(x)$ следует

$$d \leqq f(x_0) \leqq d$$

т. е. $d = f(x_0)$. Теорема доказана.

Пусть ω – ограниченное открытое множество рефлексивного банахова пространства, ω' – его граница и $\sigma = \omega \cup \omega'$. Мы будем рассматривать семейство $\mathfrak{M}$ всех таких σ, которые слабо замкнуты и на которых функционал $\varphi(x)$ слабо полунеперывен снизу.

Определение 6.1. Говорят, что функционал $\varphi(x)$ обладает m – свойством, если существует $\sigma_0 \in \mathfrak{M}$ такое, что для всех $x \in \omega_0'$ и некоторого $x_0 \in \omega_0$ выполняется неравенство

$$\varphi(x_0) < \varphi(x) .$$

Из теоремы 6.1 непосредственно вытекает предложение.

Теорема 6.2. *Пусть в рефлексивном банаховом пространстве задан, дифференцируемый по Гато слабо полунепрерывный снизу функционал $\varphi(x)$. Тогда, если этот функционал обладает m-свойством, то существует по меньшей мере одна критическая точка x_0, т.е.*

$$\operatorname{grad} \varphi(x_0) = 0$$

хотя бы для одного x_0.

Теорема 6.3. *Пусть дважды дифференцируемый по Гато вещественный функционал $f(x)$, заданный в рефлексивном банаховом пространстве удовлетворяет условию*

$$D^2 f(x;\, h, h) \geqq \gamma(\|x\|)\, \|h\|^2 , \tag{6.2}$$

где $\gamma(z)$ — убывающая и положительная функция такая, что

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R z\, \gamma(z)\, \mathrm{d}z = +\infty .$$

Тогда функционал $f(x)$ имеет единственную точку минимума.

Доказателство. Из неравенства (6.2) согласно леммам 6.1, 6.2 и 6.4 следует слабая полунепрерывность снизу функционала $f(x)$ и что он не может иметь более одной минимальной точки.

Покажем, что он обладает m-свойством, откуда будет следовать утверждение теоремы. Пусть

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x) .$$

Тогда

$$Df(x, h) = (h, F(x)) , \quad D^2 f(x;\, h, h) = (h, DF(x, h)) .$$

Используя теперь формулу (3.3), напишем

$$Df(x, h) = Df(0, h) + \int_0^1 D^2 f(tx;\, h, x)\, \mathrm{d}t$$

или

$$(h, F(x)) = (h, F(0)) + \int_0^1 (h, DF(tx, x))\, \mathrm{d}t .$$

Отсюда

$$(x, F(x)) = (x, F(0)) + \int_0^1 (x, DF(tx, x))\,dt \geqq (x, F(0)) + \int_0^1 \gamma(t\|x\|)\,\|x\|^2\,dt\,.$$

Используя данное неравенство, напишем согласно (3.3)

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 (x, F(tx))\,dt = f(0) + \int_0^1 (tx, F(tx))\,\frac{dt}{t} \geqq$$

$$\geqq f(0) + \int_0^1 \left[(tx, F(0)) + \int_0^1 \gamma(ut\|x\|)\,t^2\|x\|^2\,du\right]\frac{dt}{t}\,.$$

Полагая $\|x\| = R$, получим

$$f(x) \geqq f(0) + (x, F(0)) + \int_0^1\int_0^1 t\gamma(Rut)\,R^2\,du\,dt =$$

$$= f(0) + (x, F(0)) + \int_0^1 \left\{\int_0^R z\gamma(uz)\,dz\right\} du \geqq$$

$$\geqq f(0) + (x, F(0)) + \int_0^1 \left\{\int_0^R z\gamma(z)\,dz\right\} du =$$

$$= f(0) + (x, F(0)) + \int_0^R z\gamma(z)\,dz \geqq f(0) - R\|F(0) + \int_0^R z\,\gamma(z)\,dz =$$

$$= f(0) + R\left[-\|F(0)\| + \frac{1}{R}\int_0^R z\,\gamma(z)\,dz\right].$$

Следовательно, при достаточно большом R будет

$$f(x) > f(0)\,, \quad \|x\| = R$$

т. е. функционал $f(x)$ обладает m-свойством, ибо шар $\|x\| \leqq R$ в рефлексивном пространстве E слабо компактен и, разумеется слабо замкнут. Теорема доказана.

Замечание 6.1. Можно показать, что в условиях данной теоремы всякая минимизирующая последовательность сходится к точке минимума функционала.

7. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в вещественном гильбертовом пространстве H и $F(x)$ — потенциальный оператор в H. Мы будем рассматривать уравнение вида

$$x - A\,F(x) = 0\,. \tag{7.1}$$

Частным случаем данного уравнения, когда A – линейный интегральный оператор, а F – оператор Немыцкого, является уравнение Гаммерштейна.

Теорема 7.1. *Пусть A – ограниченный самосопряженный и положительный оператор в H, а оператор $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$, причем*

$$2\,f(x) \leqq a_1(x, x) + a_2(x, x)^\gamma + a_3\,, \tag{7.1}$$

где a_2 и a_3 – какие нибудь положительные числа, $0 < \gamma < 1$, $a_1\|A\| < 1$.

Пусть, далее, выполнено хоть одно из следующих условий:

(α) *$f(x)$ – непрерывный функционал и A – вполне непрерывный оператор.*

(β) *$f(x)$ – слабо полунепрерывный сверху функционал.*

Тогда уравнение (7.1) *разрешимо.*

Доказательство. Пусть B – положительный квадратный корень из A. Рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = (x, x) - 2f(Bx)\,.$$

Данный функционал слабо полунепрерывен снизу. Действительно, (x, x) слабо полунепрерывен снизу (см. пример 6.1). Если выполнено условие (α), то B вполне непрерывен, а потому он преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, так что $f(Bx)$ – слабо непрерывный функционал. Если выполнено условие (β), то $(-1)\,f(Bx)$ слабо полунепрерывен снизу. Далее, из неравенства (7.2) имеем при $a_1 \leqq 0$

$$\varphi(x) \geqq (x, x)^\gamma\,[(x, x)^{1-\gamma} - |a_2|\,\|A\|^\gamma] - |a_3|\,,$$

а при $a_1 > 0$ будет

$$\varphi(x) \geqq (x, x)^\gamma\,[(x, x)^{1-\gamma}\,(1 - a_1\|A\|) - |a_2|\,\|A\|^\gamma] - |a_3|\,.$$

Следовательно, функционал $\varphi(x)$ неограниченно растет вместе с $\|x\|$, а потому найдется сфера $\|x\| = z$ на которой $\varphi(x) > \varphi(0)$, т. е. функционал $\varphi(x)$ обладает m-свойством.

Так как функционал $\varphi(x)$ дифференцируем по Гато, то согласно теореме 6.2 найдется точка $x_0 \in H$ такая, что $\operatorname{grad}\,\varphi(x_0) = 0$ или

$$x_0 - BF(Bx_0) = 0\,.$$

Применяя оператор B и полагая $Bx_0 = u_0$, получим

$$u_0 - A\,F(u_0) = 0\,.$$

Теорема доказана.

Отметим, что для выполнения условия (7.2) достаточно, чтобы

$$(x, F(x)) \leqq a_1(x, x) + c_1(x, x)^{\gamma}\,,$$

где $a_1\|A\| < 1$, $0 < \gamma < 1$ и $(x, F(tx))$ есть суммируемая функция от t на $[0,1]$.

Непосредственным следствием данной теоремы служит предложение.

Теорема 7.1[1]**.** *Пусть выполнены условия:*

1. *Интегральный оператор* A

$$Au = \int_D K(x, y)\,u(y)\,\mathrm{d}y$$

с симметричным положительным ядром действует вполне непрерывно из L^q *в* L^p $(p \geqq 2, p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

2. *Функция* $f(u, x)$, *непрерывная по* $u \in (-\infty, +\infty)$ *и измеримая по* $x \in D$, *удовлетворяет условию*

$$|f(u, x)| \leqq a(x) + b|u|^{p-1}\,, \quad b > 0\,, \quad a(x) \in L^q\,.$$

3.

$$2\int_0^u f(z, x)\,\mathrm{d}z \leqq a_1 u^2 + b_1(x)\,|u|^{\alpha} + c(x)\,,$$

где $0 \leqq a_1 < \lambda_1$ (λ_1 *— наименьшее характеристическое число ядра* $K(x, y)$), $0 < \alpha < 2$, $0 \leqq b_1(x) \in L^{\gamma}$, $\gamma = 2(2 - \alpha)^{-1}$, $0 \leqq c(x) \in L^1$. *Тогда уравнение Гаммерштейна*

$$u - Ahu = 0$$

имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству L^p.

Теорема 7.2. *Пусть* A *— ограниченный самосопряженный и положительный оператор в* H, *а потенциальный оператор* $F(x)$ *удовлетворяет условию*

$$(h, DF(x, h)) \leqq a(h, h)\,, \tag{7.3}$$

где $a_1\|A\| < 1$. *Тогда уравнение* (7.1) *имеет в* H *единственное решение.*

Доказательство. Пусть $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$ и B — положительный квадратный корень из A. Рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}(x, x) - f(Bx)\,.$$

Для этого функционала имеем

$$D\varphi(x, h) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} = (x, h) - (Bh, F(Bx)),$$

$$D^2\varphi(x; h, x) = \lim_{t\to 0} \frac{D\varphi(x + tk, h) - D\varphi(x; h)}{t} = (k, h) - (Bh, DF(Bx, Bk)).$$

Отсюда и из неравенства (7.3) имеем при $a_1 \leqq 0$

$$D^2\varphi(x; h, h) \geqq (h, h),$$

а при $a_1 > 0$

$$D^2\varphi(x; h, h) \geqq (h, h) - a_1(Bh, Bh) \geqq (h, h) - a_1\|A\|\,(h, h) =$$
$$= (h, h)\,[1 - a_1\|A\|].$$

Отсюда согласно теореме 6.3 существует в H единственная точка минимума функционала $\varphi(x)$. Полагая как и в теореме 7.1 $z_0 = Bx_0$, получим

$$z_0 - A\,F(z_0) = 0.$$

Теорема доказана.

Следствием данной теоремы служит следующее предложение.

Теорема 7.2[1]. *Пусть выполнены условия:*

1. *Измеримая по $x \in D$ функция $f(u, x)$ имеет частную производную $f'_u(u, x)$, которая непрерывна по $u \in (-\infty, +\infty)$, причем для всех $u \in (-\infty, +\infty)$ и почти для всех $x \in D$ она ограничена снизу и удовлетворяет неравенству $f'_u(u, x) \leqq M$.*

2. *Интегральный оператор A*

$$Au = \int_D K(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y$$

является ограниченным самосопряженным и положительным в пространстве L^2.

3. *$M\|A\| < 1$, если $M > 0$.*

Тогда уравнение Гаммерштейна $u - Ahu = 0$ имеет в пространстве L^2 единственное решение.

Теорема 7.3. *Пусть выполнены условия:*

1. *A — ограниченный самосопряженный оператор в H, причем отрицательная часть спектра произвольна, а положительная часть спектра состоит из конечного числа собственных значений, имеющих конечную кратность, т. е. положительный спектр A принадлежит отрезку $[m, \beta]$, где $m > 0$.*

2. $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$, *причем*

$$f(x) \geqq \frac{1}{m}(x, x) + a_2(x, x)^\gamma + a_3\,, \tag{7.4}$$

где a_3 *и* a_2 *— какие нибудь отрицательные числа,* $0 < \gamma < 1$.

3. *Либо* $f(x)$ *— непрерывный функционал, а* A *— вполне непрерывный оператор, либо* $f(x)$ *— слабо полунепрерывный снизу функционал.*

Тогда уравнение (7.1) *разрешимо.*

Доказательство. Используя обозначения п. 4, мы рассмотрим функционал (4.6), для которого в силу (7.4) имеет место неравенство

$$\varphi(x) \geqq \frac{2}{m}(Bx, Bx) + 2a_2(Bx, Bx)^\gamma + 2a_3 + (P_2x, P_2x) - (P_1x, P_1x)\,.$$

Так как проектирующие операторы P_1 и P_2 приводят оператор B, то

$$\begin{aligned} \|Bx\|^2 &= \|BP_1x\|^2 + \|BP_2x\|^2 \geqq \|BP_1x\|^2 = \\ &= \int_{\sqrt{m}}^{\sqrt{\beta}} t^2\, \mathrm{d}(E_tP_1x, P_1x) \geqq m\|P_1x\|^2\,. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Отсюда и из предыдущего неравенства имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\geqq \|P_2x\|^2 + \|P_1x\|^2 + 2a_2(Bx, Bx)^\gamma + 2a_3 = \\ &= \|x\|^2 + 2a_2(Bx, Bx)^\gamma + 2a_3\,. \end{aligned}$$

Но

$$(Bx, Bx) = (|A|\, x, x) \leqq \|\,|A|\,\|\, \|x\|^2$$

где $|A|$ — абсолютное значение оператора A, и $a_2 < 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\geqq (x, x) + 2a_2\|\,|A|\,\|^\gamma (x, x)^\gamma + 2a_3 = \\ &= (x, x)\,[(x, x)^{1-\gamma} + 2a_2\|\,|A|\,\|^\gamma] + 2a_3\,. \end{aligned}$$

Из данного равенства следует существование сферы $\|x\| = z$, на которой

$$\varphi(x) > \varphi(0)\,. \tag{7.6}$$

Далее, функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу, как сумма таких функционалов. Действительно, согласно примеру 6.3 функционал $(-1)((x))^2$ слабо полунепрерывен снизу, а функционал $2f(Bx)$ слабо полунепрерывен снизу по условию теоремы. Отсюда и из неравенства (7.6) согласно теореме 6.2 следует существование точки $x_0 \in H$ такой, что

$$\operatorname{grad} \varphi(x_0) = 0\,.$$

Отсюда, как мы видели в п. 4 (см. равенство (4.7) и далее) следует, что

$$A\,F(z_0) - z_0 = 0\,,$$

где $z_0 = Bx_0$. Теорема доказана.

Из данной теоремы вытекает следующее предложение.

Теорема 7.3[1]**.** *Пусть выполнены условия:*

1. *Интегральный оператор A*

$$Au = \int_D K(x, y)\,u(y)\,\mathrm{d}y$$

действует вполне непрерывно из L^q в $L^p(p \geqq 2, p^{-1} + g^{-1} = 1)$ а в L^2 он является самосопряженным и имеет конечное число положительных собственных значений и бесконечное число отрицательных собственных значений.

2. *Функция $f(u, x)$, непрерывная по $u \in (-\infty, +\infty)$ и измеримая по $x \in D$, удовлетворяет неравенству*

$$|f(u, x)| \leqq a(x) + b|u|^{p-1}\,, \quad a(x) \in L^q\,, \quad b > 0\,.$$

3.

$$\int_0^u f(z, x)\,\mathrm{d}z \geqq \lambda_1 u^2 + b_1(x)\,|u|^\alpha + c(x)$$

где λ_1 — наибольшее положительное характеристическое число оператора A, $0 < \alpha < 2$, $0 \geqq b_1(x) \in L^\gamma$, $\gamma = 2(2 - \alpha)^{-1}$, $0 \geqq c(x) \in L^1$.

Тогда уравнение Гаммерштейна имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее L^p.

Теорема 7.4. *Пусть оператор A удовлетворяет условию I теоремы 7.3, а потенциальный оператор $F(x)$ дифференцируем по Гато и*

$$(h, DF(x, h)) \geqq \frac{2}{m}(h, h)\,. \tag{7.7}$$

Тогда уравнение (7.1) *имеет в H единственное решение.*

Доказательство. Так же, как при доказательстве теоремы 7.3, мы рассмотрим функционал (4.6). Для него имеем

$$D\varphi(x, h) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} = 2(Bh, F(Bx)) - 2(h, P_1x - P_2x)\,,$$

$$D^2\varphi(x; h, k) = \lim_{t\to 0} \frac{D\varphi(x + tk, h) - D\varphi(x, h)}{t} =$$
$$= 2(Bh, DF(Bx, Bk)) - 2(h, P_1k - P_2k)\,.$$

Отсюда и из неравенства (7.7) имеем

$$D^2\varphi(x;\, h, h) \geqq \frac{4}{m}(Bh, Bh) - 2((h))^2$$

или согласно неравенству (7.5)

$$D^2\varphi(x;\, h, h) \geqq 4(P_1 h, P_1 h) - 2\|h\|^2 = 2(h, h)\,.$$

Из данного неравенства согласно теореме 6.3 следует утверждение доказываемой теоремы.

Из данной теоремы вытекает следующее предложение.

Теорема 7.4[1]. *Пусть выполнены условия:*

1. *Интегральный оператор A*

$$Au = \int_D K(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y$$

является ограниченным и самосопряженным в L^2, причем отрицательная часть спектра произвольна (но не пустая), а положительная часть спектра A состоит из конечного числа (неравного нулю) собственных значений, имеющих конечную кратность.

2. *Измеримая по $x \in D$ функция $f(u, x)$ имеет частную производную $f'_u(u, x)$, которая непрерывна по $u \in (-\infty, +\infty)$, причем для всех $u \in (-\infty, +\infty)$ и почти для всех $x \in D$ она удовлетворяет неравенству: $|f'_u(u, x)| \geqq 2\lambda_1$ где λ_1 — наибольшее (положительное) характеристическое число оператора A.*

Тогда уравнение Гаммерштейна $u = Ahu$ имеет в L^2 единственное решение.

8. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Оператор $\varphi(x)$, действующий из линейного пространства E в двойственное пространство E', называется неубывающим, если для всяких двух векторов x_1, x_2 выполняется неравенство

$$(x_1 - x_2,\, \varphi(x_1) - \varphi(x_2)) \geqq 0\,. \tag{8.1}$$

Если равенство исключено при $x_1 \neq x_2$, то оператор $\varphi(x)$ называется возрастающим. Если

$$(x_2 - x_1,\, \varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \leqq 0\,, \tag{8.2}$$

то оператор $\varphi(x)$ называется невозрастающим или убывающим когда при $x_1 \neq x_2$ равенство исключено. Отметим, что запись (x, y) означает значение линейного функционала $y \in E'$ на векторе $x \in E$.

Оператор, удовлетворяющий одному из равенств (8.1) или (8.2) называют монотонным.

Лемма 8.1. *Если потенциальный оператор $F(\alpha)$, заданный на выпуклом множестве σ линейного пространства E, является возрастающим на этом множестве, то он имеет строго выпуклый и слабо полунепрерывный снизу потенциал $f(x)$.*

Доказательство. Пусть x и $x + h$ — произвольные точки множества σ. Применяя формулу Лагранжа, напишем

$$f(x + h) - f(x) = (h, F(x + \tau h)), \quad 0 < \tau < 1 .$$

Отсюда

$$f(x + h) - f(x) - (h, F(x)) = (h, F(x + \tau h) - F(x))$$

или

$$f(x + h) - f(x) - Df(x, h) = \frac{1}{\tau}(\tau h, F(x + \tau h) - F(x)),$$

если $h \neq 0$. Раз при $h \neq 0$

$$f(x + h) - f(x) - Df(x, h) > 0,$$

то утверждение леммы следует из предыдущего (см. лемму 6.1).

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия:*

1. *A — ограниченный самосопряженный и положительный оператор в вещественном гильбертовом пространства H.*

2. *Потенциальный оператор $F(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$(h, F(x + h) - F(x)) \leqq a(h, h); \quad x, h \in H,$$

где $a\|A\| < 1$. Тогда уравнение

$$x - A\,F(x) = 0 \tag{8.3}$$

имеет в H единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}(x, x) - f(A^{1/2}x),$$

где $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Как мы видели

$$\Phi(x) = \operatorname{grad} \varphi(x) = x - A^{1/2}F(A^{1/2}x),$$

откуда согласно условию 2 теоремы

$$(h, \Phi(x + h) - \Phi(x)) \geqq (h, h) - a(A^{1/2}h, A^{1/2}h) \geqq (h, h)\,[1 - a\|A\|].$$

Из данного неравенства следует, что Φ — возрастающий потенциальный оператор. Далее, имеем

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 (x, F(tx))\,\mathrm{d}t = f(0) + (x, F(0)) + \int_0^1 (tx, F(tx) - F(0))\,\frac{\mathrm{d}t}{t} <$$

$$< f(0) + (x, F(0)) + a\int_0^1 (tx, tx)\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = f(0) + (x, F(0)) + \tfrac{1}{2}a(x, x)\,.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x) - \varphi(0) \geqq \tfrac{1}{2}(x, x) - \tfrac{1}{2}a(A^{1/2}x, A^{1/2}x) - (x, F(0)) \geqq$$
$$\geqq \tfrac{1}{2}\|x\|\,[(1 - a\|A\|)\,\|x\| - 2\|F(0)\|]$$

а значит на некоторой сфере $\|x\| = z$ будет $\varphi(x) > \varphi(0)$, т. е. $\varphi(x)$ обладает m — свойством.

Отсюда согласно лемме 8.1 вытекает утверждение теоремы.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия:*

1. *A — ограниченный самосопряженный и положительный оператор в вещественном гильбертовом пространстве H.*

2. *$F(x)$ — убывающий потенциальный оператор, потенциал которого $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$2f(x) \leqq a_1(x, x) + a_2(x, x)^\gamma + a_3\,,$$

где $a_1\|A\| < 1$, $0 < \gamma < 1$, a_2 и a_3 — какие нибудь неотрицательные числа. Тогда уравнение (8.3) *имеет в H единственное решение.*

Доказательство данной теоремы использует лемму 8.1 и проводится примерно так же, как доказательство теоремы 7.1.

Замечание 8.1. Отметим, что единственность в условиях теоремы 8.2 вытекает и из следующих соображений. Оператор $\psi(x) = A^{1/2}\,F(A^{1/2}x)$ является возрастающим на множестве решений уравнения

$$x = \psi(x) \tag{8.4}$$

а так как из убывания $F(x)$ следует, что $\psi(x)$ убывающий оператор, то уравнение (8.4), а значит и уравнение (8.3) не может иметь более одного решения.

Возрастающим будет и $F(x)$ на множестве решений уравнения[1]) $x = AF(x)$.

---

[1]) Пусть $x_i = A\,F(x_i)$, $i = 1, 2$. Положим $z_i = A^{1/2}\,F(x_i)$. Тогда $x_i = A^{1/2}z_i$ и $z_i = A^{1/2}\,F(A^{1/2}z_i)$. В силу эквивалентности уравнений $x = A\,F(x)$ и $z = A^{1/2}\,F(A^{1/2}z)$ (это следует из предыдущего — см. п. 4), имеем

$$0 < (z_1 - z_2, z_1 - z_2) = (A^{1/2}[F(x_1) - F(x_2)], z_1 - z_2) = (F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2)\,.$$

Следуствием теоремы 8.2 является

Теорема 8.3. *Пусть выполнены условия:*

1. *Самосопряженный и положительный в L^2 оператор A*

$$Au = \int_D K(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y$$

является ограниченным из L^q в $L^p(p \geqq 2, p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

2. *Убывающая по u (почти при каждом фиксированном $x \in D$) функция $f(u, x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|f(u, x)| \leqq a(x) + b|u|^{p-1} \quad (a(x) \in L^q,\ b > 0)$$

и

$$2\int_0^u f(z, x)\, \mathrm{d}z \leqq a_1 u^2 + b(x)\, |u|^\alpha + c(x)\,,$$

где $0 \leqq a_1 \|A\|_2 < 1$ ($\|.\|_2$ *— норма в* L^2), $0 < \alpha < 2$,

$$0 \leqq b_1(x) \in L^\gamma\,, \quad \gamma = 2(2 - \alpha)^{-1}\,, \quad 0 \leqq c(x) \in L^1\,.$$

Тогда уравнение Гаммерштейна имеет в L^p единственное решение.

Аналогичные теоремы устанавливаются для уравнений вида (8.3) в случае квазидефинитности оператора A.

Литература

[1] *М. М. Вайнберг:* Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, М., 1956.

[2] *М. М. Вайнберг* и *Р. И. Качуровский:* К вариационной теории нелинейных операторов и уравнений, Докл. А. Н. СССР, *129* (1959), 1199.

[3] *М. М. Вайнберг:* О минимуме выпуклых функционалов, Успехи матем. наук, 1965, *20* : 1 (121), 239.

[4] *К. Миранда:* Уравнения с частными производными эллиптического типа, И. Л., Москва, 1957.

[5] *J. Nečas:* Sur la méthode variationnelle pour les équations aux derivées partielles non lineaires du type elliptique; l'existence et la régularité des solutions, Comment. Math. Univ. Carol., *7*, 3 (1966), 301.

[6] *И. И. Привалов:* Интегральные уравнения, ОНТИ, Москва Л., 1935.

Адресс автора: Москва, Московский областной педагогический институт им. Крупской, кафедра математического анализа.