Karel Šindelář

Zobecnění planárních bodů

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 88 (1963), No. 1, 84--105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108340

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

# ZOBECNĚNÍ PLANÁRNÍCH BODŮ

Karel Šindelář, Žilina

(Došlo dne 24. října 1961)

V článku jsou zavedena dvě zobecnění planárních bodů nadploch, a to jednak na vícenásobné body nadploch, na tak zvané jejich body hyperkonické, jednak na body ležící mimo nadplochy, na tak zvané aplanární body k nadplochám. V obou případech se vyšetřují vlastnosti bodů vzhledem k protínání nadplochy nadrovinami, které jimi procházejí, a dále jejich chování k Hessiánu a k polárám. Konečně se zkoumají vztahy aplanárních bodů k bodům planárním, zejména v rovině, tedy k bodům inflexním.

Planární body zavedené v [6] nebo v [9] jsou vždy regulární body ploch nebo nadploch, které mají určité zvláštnosti při protínání nadplochy její tečnou nadrovinou v takovém bodě. Na příkladě tak zvaných *bodů hyperplanárních* je v [9] ukázáno, jak lze pojem planárního bodu zobecnit i na body vícenásobné, to však jen ve velmi speciálním případě vícenásobných bodů uniplanárních.

Ukážeme, že takové zobecnění je možné jak v případě jakýchkoli bodů vícenásobných, tak – v jistém smyslu – i v případě bodů 0-násobných, tj. bodů ležících mimo nadplochu.

Poznámka k označování. V celém článku budeme používat týchž symbolů jako v [9]. Písmeno $f$ nebo $F$ bude vždy značit formu, jeho index $n$ (vpravo dole) bude udávat stupeň této formy a za ním – pokud bude třeba – budou v závorce uvedeny nezávisle proměnné, tedy celkem $f_n(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)$. Dalšími značkami, na příklad $f, {}^n f, f'$ a podobně, budou dvě různé takové formy od sebe odlišovány. Písmeno $n$ bude značit stupeň nadplochy, písmeno $r$ dimensi prostoru.

Tak jako v [9] se všude omezíme jen na algebraické nadplochy a variety.

## I. HYPERKONICKÉ BODY

**1.** Má-li algebraická nadplocha $\boldsymbol{V}$ planární bod $P$ řádu $k$-tého (kde $k$ je nějaké přirozené číslo), znamená to,[1]) že $P$ je regulární bod nadplochy takový, že v něm tečná nadrovina nadplochy má oskulaci vyššího řádu než v obyčejném případě (to je v pří-

[1]) Viz [9].

padě triviálního planárního bodu $k = 0$). Skutečně každá přímka tečné nadroviny procházející planárním bodem $k$-tého řádu nadplochy $\mathbf{V}$ má v tomto bodě s nadplochou průsečík alespoň $(k + 2)$-násobný, přičemž v tečné nadrovině existují přímky (alespoň jedna), které mají v bodě $P$ s nadplochou $\mathbf{V}$ průsečík právě $(k + 2)$-násobný, je-li $P$ planárním bodem $k$-tého řádu nadplochy $\mathbf{V}$.[2]) Mohli bychom tedy na příklad říci, že bod $P$ nadplochy $\mathbf{V}$ je jejím bodem planárním $k$-tého řádu právě tehdy, má-li v něm tečná nadrovina s nadplochou hyperoskulaci $k$-tého řádu.

Abychom v podobném smyslu mohli mluvit i o vícenásobných bodech nadploch, zaveďme tento pojem:

**Definice 1.** *Nechť $P$ je $s$-násobným bodem nadplochy $\mathbf{V}$ s oskulačním nadkuželem $\mathbf{K}$. Potom říkáme, že nadkužel $\mathbf{K}$ je hyperoskulačním nadkuželem $k$-tého řádu nadplochy $\mathbf{V}$ v bodě $P$ (nebo že má s nadplochou $\mathbf{V}$ v bodě $P$ hyperoskulaci $k$-tého řádu), právě tehdy, když všechny přímky nadkužele $\mathbf{K}$ procházející bodem $P$ mají v bodě $P$ s nadplochou $\mathbf{V}$ průsečík alespoň $(s + k + 1)$-násobný, přičemž existují takové přímky (alespoň jedna) nadkužele $\mathbf{K}$, které mají v bodě $P$ s nadplochou $\mathbf{V}$ průsečík právě $(s + k + 1)$-násobný.*

Na základě toho můžeme již zobecnit pojem planárního bodu na body vícenásobné.

**Definice 2.** *Nechť $s$ je přirozené číslo větší než jedna. Bod $P$, který je $s$-násobným bodem nadplochy $\mathbf{V}$ $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru, se nazývá jejím $s$-násobným hyperkonickým bodem $k$-tého řádu, když oskulační nadkužel $\mathbf{K}$ nadplochy $\mathbf{V}$ v bodě $P$ má s nadplochou $\mathbf{V}$ v bodě $P$ hyperoskulaci $k$-tého řádu.*

Poznámka 1. Podle vyslovené definice je každý $s$-násobný bod dané nadplochy jejím hyperkonickým bodem řádu $k \geqq 0$. Hyperkonické body řádu $k = 0$, jež nazveme *hyperkonické body triviální*, budeme však nadále ze svých úvah pravidelně vylučovat, pokud neuvedeme opak, takže hyperkonický bod bude v dalším znamenat vždy hyperkonický bod řádu $k \geqq 1$ podobně jako v [9] bod planární.

Poznámka 2. Definice 2 má zřejmě smysl i pro $s = 1$, ale pak jde o body planární.

**Věta 1.** *Nadplocha $\mathbf{V}$ $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru má v bodě $O_0$ $s$-násobný hyperkonický bod $k$-tého řádu s oskulačním nadkuželem*

$$f_s(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0 \tag{1}$$

*právě tehdy, když ji lze při vhodné volbě soustavy souřadnic vyjádřit rovnicí*

$$x_0^{n-s} . f_s(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \sum_{h=1}^{k} x_0^{n-s-h} . f_s(x_1, x_2, \ldots, x_r) . f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \\ + \sum_{h=s+k+1}^{n} x_0^{n-h} . f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,, \tag{2}$$

kde forma $f_{s+k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ není dělitelná formou $f_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)$.

[2]) Viz [9], věta 2 a věta 5.

Důkaz je evidentní s ohledem na analogii k důkazu [9] věty 1.

Poznámka. Forma $f_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, která je jako činitel obsažena v koeficientech u všech mocnin $x_0$ od $(n - s)$-té až do $(n - s - k)$-té, nemůže být jako činitel obsažena v koeficientech u nižších mocnin $x_0$, má-li aspoň jedna z přímek nadkužele (1) procházejících bodem $O_0$ protnout nadplochu $\boldsymbol{V}$ v bodě $O_0$ ne více než $(s + k + 1)$-násobně. Kdyby forma $f_s$ byla jako činitel obsažena i v koeficientu u $(n - s - k - 1)$-ní mocniny $x_0$, případně i v koeficientech u nižších mocnin $x_0$, byl by buď řád $s$-násobného hyperkonického bodu $O_0$ nadplochy (2) vyšší než $k$ nebo by nadplocha (2) obsahovala nadkužel (1) jako součást. I tato poslední možnost může však nastat. Obsahují-li koeficienty u všech mocnin $x_0$ i člen bez $x_0$ v rovnici (2) $f_s$ jako činitele, lze $f_s$ z celé levé strany rovnice (2) vytknout, takže potom celý nadkužel (1) a s ním i každá jeho přímka leží celá na nadploše (2) a má s ní tedy v každém svém bodě, tedy i v bodě $O_0$, průsečík s nekonečnou násobností. Bod $O_0$ budeme v takovém případě nazývat *absolutním hyperkonickým bodem nadplochy* (2) a budeme mu přisuzovat řád $k = \infty$. V dalším však budeme i absolutní hyperkonické body ze svých úvah vylučovat, pokud neuvedeme opak, takže hyperkonický bod nadplochy bude znamenat její takový hyperkonický bod, jehož řád $k$ je přirozené číslo.

**2.** Na rozdíl od bodů planárních mohou u bodů hyperkonických nastat i složitější případy.

Oskulační nadkužel (1) nemusí být vždy jednoduchý, může se rozpadat na součásti, jejichž hyperoskulace s nadplochou $\boldsymbol{V}$ nemusí být u všech těchto součástí téhož řádu. Je pak přirozené ve smyslu definice 2 přisuzovat příslušnému bodu na nadploše jako hyperkonickému takový řád, který je minimem řádů hyperoskulací všech součástí nadkužele (1). Je však možno a někdy je to i výhodné v tomto případě přisoudit hyperkonickému bodu celou soustavu řádů podle hyperoskulací jednotlivých součástí, na něž se hyperoskulační nadkužel v tomto případě rozpadá.

**Definice 3.** *Nechť nadplocha $\boldsymbol{V}$ má ve svém $s$-násobném bodě $P$ oskulační nadkužel $\boldsymbol{K}$, který se rozpadá na $m$ nerozložitelných součástí (nadkuželů) $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \ldots, \boldsymbol{K}_m$ stupňů $s_1, s_2, \ldots, s_m$ (přičemž ovšem platí $s_1 + s_2 + \ldots + s_m = s$) a nechť dále tyto nadkužele mají s nadplochou $\boldsymbol{V}$ v bodě $P$ (v témže pořadí) hyperoskulace řádů $k_1$, $k_2, \ldots, k_m$. Potom nazýváme bod $P$ $s$-násobným hyperkonickým bodem nadplochy $\boldsymbol{V}$ s oskulačním nadkuželem rozložitelným na $m$ součástí stupňů $s_1, s_2, \ldots, s_m$ a řádů $k_1, k_2, \ldots, k_m$.*

Zavedeme-li potom ještě označení

(3) $$t_j = \sum_{i=j+1}^{m} s_i\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m - 1\,, \quad t_m = 0\,,$$

změní se rovnice (2) nadplochy $\boldsymbol{V}$ tímto způsobem:

**Věta 2.** *Nadplocha $\boldsymbol{V}$ má ve svém bodě $O_0$ $s$-násobný hyperkonický bod s oskulačním nadkuželem (1) rozložitelným na součásti stupňů $s_1, s_2, \ldots, s_m$, takže platí*

(4) $$f_s(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \prod_{i=1}^{m} f_{s_i}(x_1, x_2, \ldots, x_r)\,,$$

*přičemž ovšem je*

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{m} s_i = s\,,$$

*a očíslování nadkuželů je takové, že jejich odpovídající řády* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *tvoří nerostoucí (konečnou) posloupnost*

$$(6) \qquad k_1 \geqq k_2 \geqq k_3 \geqq \ldots \geqq k_{m-1} \geqq k_m$$

*právě tehdy, když nadplochu* **V** *lze vyjádřit rovnicí*

$$(7) \qquad x_0^{n-s} \cdot \prod_{i=1}^{m} f_{s_i}(x_1, x_2, \ldots, x_r) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{k_m} x_0^{n-s-h} \cdot {}^m f_{h+t_m}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \cdot \prod_{i=1}^{m} f_{s_i}(x_1, x_2, \ldots, x_r) +$$

$$+ \sum_{h=k_m+1}^{k_{m-1}} x_0^{n-s-h} \cdot {}^{m-1} f_{h+t_{m-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \cdot \prod_{i=1}^{m-1} f_{s_i}(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \ldots +$$

$$+ \sum_{h=k_2+1}^{k_1} x_0^{n-s-h} \cdot {}^1 f_{h+t_1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \cdot f_{s_1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) +$$

$$+ \sum_{h=k_1+1}^{n-s} x_0^{n-s-h} \cdot {}^0 f_{h+t_0}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,,$$

*kde forma* $f_{k_m+1+t_{m-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *neobsahuje již jako činitele formu* $f_{s_m}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, *forma* $f_{k_{m-1}+1+t_{m-2}}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *neobsahuje již jako činitele formu* $f_{s_{m-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *a tak dále, až forma* $f_{k_1+1+t_0}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *neobsahuje již jako činitele formu* $f_{s_1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$.

D ů k a z věty 2 je zcela obdobný důkazu věty 1, až na to, že úvahy o nadkuželích, na něž se (1) rozpadá, je třeba provést pro každou jednotlivou součást zvláště.

Skládá-li se nadkužel (1) ze dvou nebo několika součástí s týmiž hyperoskulacemi, jsou si příslušná $k_i$ v nerostoucím uspořádání (6) rovna, takže pak je výraz na levé straně rovnice (7) v našem zápise vyjádřen méně sčítanci o odpovídající počet.

Může dokonce nastat i takový případ, že oskulační nadkužel (1) obsahuje vícenásobnou součást, případně i několik vícenásobných součástí. Rovnice nadplochy **V** má pak opět tvar (7), jen na pravé straně součinu (4) někteří činitelé splývají, přičemž si jsou rovny i jejich řády v uspořádání (6), takže i v tomto případě vymizí někteří sčítanci na levé straně rovnice (7).

Známý případ nastane, jsou-li všichni činitelé rozkladu (4) lineární a když všechny nadroviny, které jim odpovídají, spolu splývají. Potom je $m = s$ a všechna čísla $k_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) uspořádání (6) si jsou rovna. Označíme-li jejich společnou hodnotu $k$, je bod $O_0$ nadplochy **V** vyjádřené rovnicí (7) její bod uniplanární a je to[3]) $s$-násobný hyperplanární bod $k$-tého řádu nadplochy **V**.

[3]) Viz [9], str. 72, definice 5.

**3.** O vlastnostech variet, v nichž protínají nadplochu $\mathbf{V}$ nadroviny procházející jejím hyperkonickým bodem, lze vyslovit větu, která platí — podobně jako do jisté míry analogická věta pro body planární[4]) — i pro hyperkonické body triviální.

**Věta 3.** *Protne-li se nadplocha n-tého stupně $\mathbf{V}$ v r-rozměrném projektivním prostoru nadrovinou $\mathbf{L}$, která prochází jejím s-násobným hyperkonickým bodem k-tého řádu P, je bod P buď s-násobným hyperkonickým bodem průsečné variety $\mathbf{U}$ řádu aspoň k-tého, případně jejím absolutním hyperkonickým bodem, nebo je bod P aspoň $(s + k + 1)$-násobným bodem variety $\mathbf{U}$, nikoli však již jejím bodem hyperkonickým (leda triviálním). Tento poslední případ může nastat jen tehdy, když se oskulační nadkužel nadplochy $\mathbf{V}$ v bodě P rozpadá na součásti, z nichž aspoň jedna je lineární.*

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic jako ve větě 1, a to tak, aby nadrovina $\mathbf{L}$ byla vyjádřena rovnicí

$$x_1 = 0\,. \tag{8}$$

Nerozpadá-li se oskulační nadkužel v bodě $O_0$ na takové činitele, z nichž aspoň jeden je lineární, nelze činitele $x_1$ vytknout z formy $f_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, takže $O_0$ je $s$-násobným bodem průsečné variety $\mathbf{U}$ právě tak jako původní nadplochy $\mathbf{V}$. Avšak řád hyperkonického bodu $O_0$ může být v tomto případě vyšší, a to nastává tehdy, lze-li z formy $f_{s+k+1}(0, x_2, \ldots, x_r)$ vytknout formu $f_s(0, x_2, \ldots, x_r)$, případně může být $O_0$ i absolutním hyperkonickým bodem variety $\mathbf{U}$, lze-li $f_s(0, x_2, \ldots, x_r)$ vytknout ze všech forem od $f_{s+k+1}(0, x_2, \ldots, x_r)$ až do $f_n(0, x_2, \ldots, x_r)$.

Rozpadá-li se však oskulační nadkužel v bodě $O_0$ na součásti, z nichž aspoň jedna je lineární, může se stát, že forma $f_s(0, x_2, \ldots, x_r)$ je rovna nule, takže potom bod $O_0$ je alespoň $(s + k + 1)$-násobným bodem variety $\mathbf{U}$. V tomto případě však již není $O_0$ hyperkonickým bodem variety $\mathbf{U}$, neboť všechny členy s takovými mocninami $x_0$, jejichž koeficient obsahuje formu $f_s(0, x_2, \ldots, x_r)$ jako činitele, v rovnici variety $\mathbf{U}$ vymizí.

Poznámka. V dalším budeme doplněk o absolutním hyperkonickém bodě důsledně vynechávat a místo toho se budeme řídit úmluvou, že rčení hyperkonický bod řádu aspoň $k$-tého bude znamenat buď hyperkonický bod řádu $h$-tého, kde je $h \geqq k$, nebo absolutní hyperkonický bod.

Jak se chovají hyperkonické body k Hessiánu nadplochy, vyjadřuje věta zcela analogická k obdobné větě o bodech hyperplanárních.[5])

**Věta 4.** *Je-li bod P s-násobným bodem hyperkonickým k-tého řádu nadplochy n-tého stupně $\mathbf{V}$ v r-rozměrném projektivním prostoru $(s \geqq 2)$, nemusí být P vícenásobným bodem jejího Hessiánu než v případě obyčejného s-násobného bodu (tj. triviálního hyperkonického bodu).*

---

[4]) Viz [9], str. 58, věta 2.

[5]) Viz [9], str. 72, věta 14.

Důkaz. Použijeme-li opět vyjádření nadplochy **V** jako ve větě 1 rovnicí (2), dostaneme, vypíšeme-li její Hessián jako determinant $(r + 1)$-ho stupně, ve všech jeho prvcích $(n - 1 - s)$-té mocniny $x_0$ kromě jeho prvků prvního sloupce a prvního řádku, v nichž se vyskytují vesměs $(r - 2 - s)$-té mocniny $x_0$. Může tedy být $O_0$ až $[(r + 1) . (s - 1) + 1]$-násobným bodem Hessiánu dané nadplochy **V**, jako kdyby byl bod $O_0$ obyčejným $s$-násobným bodem této nadplochy.

**4.** O rozložitelnosti polár hyperkonických bodů platí věta, která je značně analogická větě o rozložitelnosti polár dokonce bodů planárních.[6])

**Věta 5.** *Bod $P$, který je $s$-násobným bodem nadplochy **V** $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru, je jejím hyperkonickým bodem aspoň $k$-tého řádu právě tehdy, když jeho $(n - s - k)$-tá polára k nadploše **V**, to je jeho polára $(s + k)$-tého stupně, obsahuje jeho $(n - s)$-tou poláru k nadploše **V**, to je jeho poláru $s$-tého stupně, jako součást.*

Poznamenejme k tomu, že věta 5 platí i pro triviální hyperkonické body nadploch.

Důkaz věty 5. Je-li nadplocha **V** vyjádřena rovnicí (2) jako ve větě 1, je $(n - s)$-tá polára jejího $s$-násobného hyperkonického bodu $k$-tého řádu k této nadploše přímo oskulační nadkužel (1) v tomto bodě. Tento oskulační nadkužel hyperkonického bodu je obdoba tečné nadroviny u bodu planárního, takže zbytek důkazu lze provést již zcela analogicky k důkazu o rozložitelnosti polár planárního bodu.[7])

Při podrobném provádění tohoto důkazu (jež však vzhledem k uvedené analogii není nijak obtížné) je třeba se opřít o pomocnou větu, která je zobecněním pomocné věty k uvedenému analogickému důkazu a jejíž úplné znění je toto:

*Obsahuje-li $p$-tá polára libovolného $s$-násobného bodu $P$ nadplochy **V** $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru oskulační nadkužel nadplochy **V** v bodě $P$ jako součást, obsahuje tento oskulační nadkužel jako součást i každá $q$-tá polára bodu $P$ k nadploše **V**, je-li $q \geqq p$, pokud existuje.*

Důkaz této pomocné věty, který lze provést přesně tak jako v uvedeném případě,[8]) však také vynecháme.

**5.** Zajímavý případ tu nastává, je-li oskulační nadkužel složený jako ve větě 2. Tento oskulační nadkužel, to je $(n - s)$-tá polára hyperkonického bodu $P$ k nadploše **V**, se pak skládá podle vztahu (4) ze součástí, po případě i s různými hyperoskulacemi s danou nadplochou v jejím hyperkonickém bodě. O rozložitelnosti polár pak platí věta 5, pokládáme-li za řád hyperkonického bodu minimum hyperoskulací všech součástí oskulačního nadkužele právě tak, jak jsme poznamenali v předběžné úvaze k definici 3. Kromě toho však platí v tomto případě i další podrobnější vztahy o rozložitelnosti polár, jak ukazuje tato věta:

[6]) Viz [9], str. 64, věta 9.
[7]) Viz [9], str. 64, věta 9.
[8]) Viz [9], str. 64, pomocná věta.

**Věta 6.** *Bod $P$ je $s$-násobným hyperkonickým bodem (třeba triviálním) nadplochy* $\mathbf{V}$ *s oskulačním nadkuželem* $\mathbf{K}$ *rozložitelným na $m$ součástí* $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_m$ *stupňů* $s_1, s_2, \ldots, s_m$ *a řádů aspoň* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *právě tehdy, když jeho $(n - s - k)$-tá polára, to je jeho polára $(s + k)$-tého stupně, k nadploše* $\mathbf{V}$ *obsahuje příslušný nadkužel* $\mathbf{K}_i$ *jako součást pro* $i = 1, 2, \ldots, m$.

Důkaz je analogický důkazu věty 5.

## II. APLANÁRNÍ BODY

**1.** Nalezené vlastnosti polár bodů planárních,[9]) hyperplanárních[10]) i hyperkonických[11]) jsou pro ně tak charakteristické, že jejich pomocí lze dokonce tyto body i definovat. Na příklad lze vyslovit tuto definici ekvivalentní k původní definici planárních bodů.[12])

**Definice 4.** *Regulární bod $P$ algebraické nadplochy* $\mathbf{V}$ *$n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru je jejím planárním bodem $k$-tého řádu právě tehdy, když se jeho polára $(k + 1)$-ho stupně k nadploše* $\mathbf{V}$ *rozpadá tak, že jednou její součástí je lineární polára bodu $P$ k nadploše* $\mathbf{V}$*, avšak takto se nerozpadá již jeho polára $(k + 2)$-ho stupně k nadploše* $\mathbf{V}$.

Omezíme-li se na trojrozměrný prostor ($r = 3$) a pak na rovinu ($r = 2$), dostaneme nejprve obdobnou definici planárních bodů algebraických ploch a pak definici inflexních bodů algebraických čar, kterou zvláště vytkneme:

Důsledek. *Regulární bod $P$ algebraické čáry v rovině je jejím bodem inflexním $k$-tého řádu právě tehdy, když se jeho polára $(k + 1)$-ho stupně k dané čáře rozpadá tak, že obsahuje jako součást lineární poláru bodu $P$ k dané čáře, to je tečnu čáry v bodě $P$, avšak takto se již nerozpadá jeho polára $(k + 2)$-ho stupně k dané čáře.*

A takto pomocí obdobných vlastností polár lze analogicky definovat i body hyperplanární a hyperkonické.

K novému druhu bodů dojdeme, upustíme-li od požadavku, aby bod $P$ ležel na nadploše $\mathbf{V}$. Zřejmě i potom může mít vlastnost, jíž jsme použili k definici planárního (resp. inflexního) bodu, kterou jsme právě vyslovili. Zaveďme proto tento nový pojem:

**Definice 5.** *Bod $P$ ležící v $r$-rozměrném projektivním prostoru mimo nadplochu $n$-tého stupně* $\mathbf{V}$*, jehož polára $(k + 1)$-ho stupně k nadploše* $\mathbf{V}$ *obsahuje jeho lineární poláru k této nadploše jako součást, se nazývá aplanárním bodem $k$-tého řádu k nadploše* $\mathbf{V}$.

Všimněme si nejprve, jak lze nadplochu $\mathbf{V}$, k níž existuje nějaký aplanární bod $k$-tého řádu, zapsat co nejjednodušší rovnicí.

---

[9]) Viz [9], věta 9, str. 64.
[10]) Viz [9], věta 15, str. 72.
[11]) Věta 5 a věta 6 tohoto článku.
[12]) Viz [9], str. 56, definice 1.

**Věta 7.** *Bod $O_0$ ležící mimo nadplochu* **V** *n-tého stupně v r-rozměrném projektivním prostoru je k nadploše* **V** *aplanárním bodem k-tého řádu právě tehdy, když lze nadplochu* **V** *při vhodné volbě soustavy souřadnic vyjádřit rovnicí:*

$$x_0^n + \sum_{h=2}^{k} x_0^{n-h} \, . \, f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \sum_{h=k+2}^{n} x_0^{n-h} \, . \, f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0 \, . \tag{9}$$

Důkaz. Protože $O_0$ neleží na algebraické nadploše **V**, neleží ani na své lineární poláře k této nadploše, takže tuto poláru lze zvolit za souřadnicovou nadrovinu

$$x_0 = 0 \, . \tag{10}$$

To však znamená, že na levé straně rovnice (9) odpadají všechny členy obsahující $x_0$ v mocnině $(n - 1)$-ní. Označíme-li dále levou stranu rovnice (9) znakem

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_r) \, , \tag{11}$$

bude rovnice $(n - k - 1)$-ní poláry, tedy poláry $(k + 1)$-ho stupně, bodu $O_0$ k nadploše (9)

$$\frac{\partial^{n-k-1}}{\partial x_0^{n-k-1}} F(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0 \, . \tag{12}$$

Tato polára je nadplocha $(k + 1)$-ho stupně a obsahuje nadrovinu (10) jako součást právě tehdy, když v levé straně rovnice (9) chybí všechny členy obsahující $x_0$ v mocnině $(n - k - 1)$-ní.

Poznámka. Z důkazu věty 7 vyplývá, že aplanární body $k$-tého řádu k algebraické nadploše — na rozdíl od bodů planárních — nemusí mít žádnou z charakteristických vlastností aplanárních bodů nižších řádů, což zřejmě souvisí s odlišným chováním polár bodů planárních, hyperplanárních a hyperkonických na jedné straně a aplanárních bodů na druhé straně. Platí totiž:

**Věta 8.** *Nechť bod P leží v r-rozměrném projektivním prostoru mimo nadplochu* **V** *n-tého stupně. Obsahuje-li jeho p-tá polára k nadploše* **V** *jeho lineární poláru k téže nadploše jako součást, nemusí ji jako součást obsahovat žádná z jeho q-tých polár k nadploše* **V**, *pokud není ani $q = p$ ani $q = n - 1$.*[13])

**2.** Je-li však jakýkoli bod $P$ ležící mimo nadplochu **V** aplanárním bodem $k$-tého řádu k této nadploše, neznamená to ještě, že by nemohl být zároveň aplanárním bodem i jiných řádů k téže nadploše. Zejména důležitý případ nastane tehdy, je-li $P$ aplanárním bodem k nadploše **V** všech řádů až do $k$-tého. Zaveďme proto tento pojem:

**Definice 6.** *Bod P ležící v r-rozměrném projektivním prostoru mimo nadplochu* **V** *n-tého stupně se nazývá hlavním aplanárním bodem k-tého řádu k nadploše* **V**, *je-li vzhledem k ní aplanárním bodem všech řádů až do k-tého, to je všech h-tých řádů, kde $h = 1, 2, \ldots, k$.*

---

[13]) Odlišné chování polár bodů planárních vyjadřuje v [9] pomocná věta k větě 9 na str. 64 a polár bodů hyperkonických pomocná věta k větě 5 tohoto článku na str. 89.

Poznámka. Podle našich definic 5 a 6 lze libovolný bod $P$ ležící mimo danou nadplochu $\boldsymbol{V}$, který není aplanárním bodem žádného $h$-tého řádu k dané nadploše (kde $h$ může být jakékoli přirozené číslo), pokládat za aplanární bod a třeba i za hlavní aplanární bod nultého řádu k dané nadploše $\boldsymbol{V}$. Aplanární body tohoto nultého řádu, jimž budeme říkat *aplanární body triviální*, budeme však nadále ze svých úvah vylučovat, pokud neuvedeme opak.

Mimo uvedené triviální aplanární body lze však podle definice 6 i aplanární body prvního řádu k dané nadploše pokládat podle potřeby za hlavní aplanární body prvního řádu k této nadploše.

**Věta 9.** *Bod $O_0$ ležící mimo nadplochu $\boldsymbol{V}$ n-tého stupně v r-rozměrném projektivním prostoru je k nadploše $\boldsymbol{V}$ hlavním aplanárním bodem k-tého řádu právě tehdy, když nadplochu $\boldsymbol{V}$ lze při vhodné volbě soustavy souřadnic vyjádřit rovnicí:*

$$x_0^n + \sum_{h=k+2}^{n} x_0^{n-h} \cdot f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,, \tag{13}$$

*kde forma* $f_{k+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ není nulová.

Důkaz vyplývá z definice 6 a z věty 7.

Poznámka. Kdyby byla forma $f_{k+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ nulová, zůstal by bod $O_0$ hlavním aplanárním bodem nadplochy $\boldsymbol{V}$, ale jeho řád by byl vyšší než $k$. Kdyby byly všechny formy od této až do poslední $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ včetně nulové, přešla by nadplocha v $n$-násobnou nadrovinu, k níž by se všechny body ležící mimo ni chovaly tak jako bod $O_0$. V tomto případě budeme říkat, že bod $O_0$ (a s ním i kterýkoli bod ležící mimo nadplochu) je *absolutním aplanárním bodem* k nadploše $\boldsymbol{V}$, a budeme mu přisuzovat řád aplanárnosti $k = \infty$.

V uvedeném smyslu rozšíříme i na absolutní aplanární body význam rčení hlavní aplanární bod aspoň $k$-tého řádu, které bude znamenat, že jde buď o hlavní aplanární bod řádu $h$-tého, kde $h \geqq k$, nebo o absolutní aplanární bod.

Jinak ovšem — pokud nepřihlížíme k absolutním aplanárním bodům — je nejvyšší možný řád hlavního aplanárního bodu k dané nadploše $\boldsymbol{V}$ $n$-tého stupně $n - 2$ právě tak jako u bodů planárních.

U aplanárních bodů, které nejsou hlavní, je nejvyšší možný řád k nadploše $\boldsymbol{V}$ $n$-tého stupně dokonce $n - 1$. Tento případ může však nastat jenom tehdy, když nadplocha $\boldsymbol{V}$, již lze samu pokládat za nultou poláru bodu $P$ k této nadploše, se rozpadá tak, že obsahuje jako součást lineární poláru bodu $P$ k nadploše $\boldsymbol{V}$, takže její rovnice, vyjádříme-li ji ve tvaru (9), pak je:

$$x_0^n + \sum_{h=2}^{n-1} x_0^{n-h} \cdot f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,. \tag{14}$$

Podle toho může však být konečný řád aplanárního bodu $P$ k nerozložitelné nadploše $n$-tého stupně $\boldsymbol{V}$ nejvýše $n - 2$, i když to není hlavní aplanární bod.

3. Všimněme si nyní útvaru, který vznikne, protneme-li algebraickou nadplochu **V** jakoukoli nadrovinou procházející aplanárním bodem $P$ k této nadploše. Aplanární bod $P$ může přitom být i triviální. Především platí:

**Věta 10.** *Libovolnou nadrovinou* **L** *procházející aplanárním bodem P k-tého řádu k nadploše* **V** *n-tého stupně v r-rozměrném projektivním prostoru je nadplocha* **V** *proťata ve varietě* **U**, *jež má v bodě P aplanární bod k-tého řádu.*

Důkaz. Zvolíme-li vhodně soustavu souřadnic, padne bod $P$ do bodu $O_0$, rovnici nadplochy **V** lze dát tvar (9) a nadrovina **L** bude mít rovnici (8). Rovnice průsečnice v nadrovině (8) bude pak mít tvar:

$$x_0^n + \sum_{h=2}^{k} x_0^{n-h} \,.\, f_h(0, x_2, \ldots, x_r) + \sum_{h=k+2}^{n} x_0^{n-h} \,.\, f_h(0, x_2, \ldots, x_r) = 0\,, \tag{15}$$

takže bude vyjadřovat algebraickou nadplochu v prostoru $(r-1)$-rozměrném, pro kterou bod $O_0$ je aplanární $k$-tého řádu, a budou-li po dosazení z rovnice (8) kromě formy $f_{k+1}$ i některé jiné nulové, bude mimo to aplanární i jiných řádů.

Vzniká ovšem i opačná otázka: Protínají-li nadroviny $\mathbf{L}_i$ procházející bodem $P$ ležícím v $r$-rozměrném projektivním prostoru mimo nadplochu **V** $n$-tého stupně tuto nadplochu **V** v takových varietách $\mathbf{U}_i$, že bod $P$ je k nim aplanární $k$-tého řádu, je také aplanární k nadploše **V**? A dále: Ke kolika nejméně takovým varietám $\mathbf{U}_i$ musí být bod $P$ aplanární $k$-tého řádu, aby z toho plynulo, že je aplanární téhož řádu i k nadploše **V**? Na obě tyto otázky odpovídá spolu s větou 10 tato věta:

**Věta 11.** *Nechť* **V** *je algebraická nadplocha n-tého stupně v r-rozměrném projektivním prostoru a bod P leží mimo ni. Nechť dále bodem P prochází $k+2$ různých nadrovin $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \ldots, \mathbf{L}_{k+2}$ protínajících nadplochu* **V** *postupně ve varietách $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_{k+2}$ takových, že bod P je ke každé z nich aplanární k-tého řádu. Potom je bod P aplanární k-tého řádu i k nadploše* **V**.

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic jako ve větě 7. Rovnice nadplochy **V** pak bude mít tvar

$$x_0^n + \sum_{h=2}^{n} x_0^{n-h} \,.\, f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0 \tag{16}$$

a bod $P$ padne do bodu $O_0$.

Nadrovina **L** procházející bodem $O_0$, jejíž rovnici lze vhodnou volbou soustavy souřadnic dát tvar (8), protíná nadplochu **V** ve varietě **U**, k níž bod $O_0$ je aplanární $k$-tého řádu, právě tehdy, když forma $f_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ je dělitelná $x_1$, to je levou stranou anulované rovnice nadroviny **L**. Ale forma $f_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, která je $(k+1)$-ho stupně, nemůže být dělitelná více než $k+1$ různými lineárními formami – levými stranami anulovaných rovnic různých nadrovin – i když ji lze rozložit na samé lineární činitele, leda když je nulová. Potom ovšem je bod $O_0$ aplanární $k$-tého řádu i k nadploše **V**, jak jsme chtěli dokázat.

Poněkud jinak ovšem tomu je, je-li $P$ hlavní aplanární bod $k$-tého řádu k nadploše **V**. Potom platí:

**Věta 12.** *Libovolnou nadrovinou* $\mathbf{L}$ *procházející hlavním aplanárním bodem $P$ $k$-tého řádu k nadploše* $\mathbf{V}$ *$n$-tého stupně v projektivním prostoru $r$-rozměrném (kde $r$ je aspoň 3) je nadplocha proťata ve varietě* $\mathbf{U}$, *k níž bod $P$ je opět hlavní aplanární bod řádu alespoň $k$-tého.*

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic jako ve větě 9, a to tak, aby nadrovina $\mathbf{L}$ měla rovnici (8). Potom rovnice průsečnice v této nadrovině bude mít tvar:

$$x_0^n + \sum_{h=k+2}^{n} x_0^{n-h} \, . \, f_h(0, x_2, \ldots, x_r) = 0 \,, \tag{17}$$

takže tato průsečnice je skutečně algebraická nadplocha $n$-tého stupně v nadrovině $\mathbf{L}$, tedy v $(r - 1)$-rozměrném projektivním prostoru, která má v bodě $O_0$ hlavní aplanární bod aspoň $k$-tého řádu, jehož lineární polára je (10).

Opakováním takového protínání docházíme k tomuto zobecnění věty 12:

Důsledek. *Libovolným lineárním prostorem* $\mathbf{L}$ *(aspoň dvojrozměrným) procházejícím hlavním aplanárním bodem $P$ $k$-tého řádu nadplochy* $\mathbf{V}$ *$n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru ($r \geqq 3$) je nadplocha* $\mathbf{V}$ *proťata ve varietě* $\mathbf{U}$, *ke které je $P$ hlavní aplanární bod aspoň $k$-tého řádu.*

Není však naprosto vyloučeno, že by nadplocha $\mathbf{V}$, k níž $P$ je hlavní aplanární bod $k$-tého řádu, nemohla být proťata nějakou nadrovinou $\mathbf{L}$ procházející bodem $P$ v takové varietě, k níž bod $P$ by byl hlavním aplanárním bodem řádu vyššího než $k$-tého. Zaveďme proto tento nový pojem:[14])

**Definice 7.** *Nadrovina* $\mathbf{L}$ *procházející hlavním aplanárním bodem $P$ $k$-tého řádu k nadploše* $\mathbf{V}$ *$n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru a protínající nadplochu* $\mathbf{V}$ *ve varietě* $\mathbf{U}$, *k níž bod $P$ je hlavní aplanární bod řádu vyššího než $k$-tého, se nazývá asymptotická nadrovina nadplochy* $\mathbf{V}$ *vzhledem k aplanárnímu bodu $P$.*

Asymptotických nadrovin dané nadplochy $\mathbf{V}$ vzhledem k určitému aplanárnímu bodu $P$ — pokud vůbec existují — je však jen konečný počet, neboť platí:

**Věta 13.** *Je-li $P$ hlavní aplanární bod $k$-tého řádu k nadploše* $\mathbf{V}$ *$n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru, existuje nejvýše $k + 2$ asymptotických nadrovin nadplochy* $\mathbf{V}$ *vzhledem k bodu $P$.*

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic jako ve větě 9. Je-li potom (8) asymptotická nadrovina k nadploše (13) vzhledem k hlavnímu aplanárnímu bodu $O_0$, platí

$$f_{k+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1 \, . \, \overline{f_{k+1}}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \, . \tag{18}$$

Naopak je-li možno formu $(k + 2)$-ho stupně $f_{k+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ rozložit tak, aby aspoň některý z činitelů tohoto rozkladu byl lineární, odpovídá každému takovému činiteli asymptotická nadrovina, jejíž rovnici dostaneme, položíme-li každého takového lineárního činitele rovného nule. Avšak takových lineárních činitelů rozkladu dané formy může být nejvýše $k + 2$, přičemž kromě toho dvěma nebo i několika

[14]) Obdobně jako u bodů planárních v [9], str. 59, definice 3.

z nich může odpovídat tatáž asymptotická nadrovina. Nemůže tedy být více asymptotických nadrovin než $k + 2$. Ale nemusí existovat dokonce žádná asymptotická nadrovina, neboť pro $r$-rozměrný prostor $(r \geqq 3)$ je forma $f_{k+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ aspoň ternární, takže nemusí být rozložitelná nebo její rozklad nemusí obsahovat žádné lineární činitele.

Nyní již můžeme odpovědět na otázku, zda lze větu 12 obrátit obdobně jako jsme obrátili větu 10 a výsledek formulovali větou 11.

**Věta 14.** *Nechť bod $P$ leží mimo nadplochu $\mathbf{V}$ $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru. Nechť dále $k + 2$ nadrovin $\mathbf{L}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k + 2$, procházejících bodem $P$ protíná nadplochu $\mathbf{V}$ ve varietách $\mathbf{U}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k + 2$, vzhledem k nimž je bod $P$ vesměs hlavní aplanární bod aspoň $k$-tého řádu, přičemž aspoň k jedné z variet $\mathbf{U}_i$ nechť je $P$ hlavní aplanární bod právě $k$-tého řádu. Potom je $P$ hlavním aplanárním bodem $k$-tého řádu k nadploše $\mathbf{V}$.*

Důkaz. Nechť bod $P$ je hlavním aplanárním bodem $h$-tého řádu k nadploše $\mathbf{V}$ $(h \geqq 0)$. Z věty 13 plyne, že nemůže být $h < k$. Z věty 12 pak plyne, že nemůže být ani $h > k$. Nezbývá tedy jiná možnost než $h = k$.

Opakováním postupu uvedeného ve větě 14 docházíme k tomuto jejímu zobecnění:

Důsledek. *Nechť $1 < s < r$. Je-li nadplocha $\mathbf{V}$ $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru proťata $(k + 2)^{r-s}$ lineárními $s$-rozměrnými prostory $\mathbf{L}_h$, $h = 1, 2, \ldots, (k + 2)^{r-s}$ v samých takových varietách $\mathbf{U}_h$, $h = 1, 2, \ldots, (k + 2)^{r-s}$, vzhledem k nimž je bod $P$ ležící mimo $\mathbf{V}$ vesměs hlavním aplanárním bodem řádu aspoň $k$-tého, přičemž aspoň k jedné z nich je řádu právě $k$-tého, je $P$ hlavním aplanárním bodem $k$-tého řádu i k nadploše $\mathbf{V}$.*

**4.** Je známo,[15]) že inflexní body rovinných čar se od planárních bodů ploch a nadploch poněkud liší chováním k Hessiánu. Naproti tomu aplanární body všech nadploch, tedy i rovinných čar, mají všechny vlastnosti týkající se chování k Hessiánu společné, jak ukážeme.

**Věta 15.** *Je-li bod $P$ ležící mimo algebraickou nadplochu $\mathbf{V}$ $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru k nadploše $\mathbf{V}$ aplanárním bodem prvního řádu, je alespoň $r$-násobným bodem jejího Hessiánu.*

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic jako ve větě 7. Nadplocha $\mathbf{V}$ bude pak vyjádřena rovnicí (9) pro $k = 1$.

Stupeň jejího Hessiánu je $(r + 1)(n - 2)$. Vypíšeme-li jej jako determinant, budou všechny jeho prvky obsahovat $x_0$ nejvýše s mocnitelem $n - 3$ kromě prvků prvního sloupce a prvního řádku, kde nejvyšší možný mocnitel u $x_0$ je jen $n - 4$, až na první prvek determinantu (v němž se jeho první sloupec kříží s prvním řádkem), který obsa-

[15]) Viz [9], věta 7 a 8.

huje $x_0$ v mocnině $(n-2)$-hé. Je tedy nejvyšší možný mocnitel u $x_0$ v kterémkoli členu determinantu

$$(n-2)+r\,.\,(n-3)=(r+1)\,.\,(n-2)-r\,, \tag{19}$$

a protože stupeň Hessiánu je $(r+1)(n-2)$, je $O_0$ jeho bodem alespoň $r$-násobným.

Věta 15 vyjadřuje nutnou podmínku, kterou musí bod $P$, ležící mimo nadplochu **V** v $r$-rozměrném prostoru, splňovat, aby mohl být aplanárním bodem prvního řádu k nadploše **V**. Tato podmínka však není postačující, dokonce ani pro $r = 2$, to je pro aplanární body vzhledem k čarám v rovině.[16]) Ukážeme to na příkladě.

Ačkoli kubická čára

$$x_0^3 + x_0(4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2) + 36x_1^2x_2 + 108x_1x_2^2 + 81x_2^3 = 0 \tag{20}$$

neprochází bodem $O_0$ a tento bod je dvojnásobným bodem jejího Hessiánu, přeci není bod $O_0$ k dané kubické čáře aplanární.

O chování aplanárních bodů vyšších řádů (pokud nejsou hlavní) k Hessiánu příslušné nadplochy v libovolném projektivním prostoru dostáváme výsledek sice záporný, ale dosti překvapující.

**Věta 16.** *Je-li $P$ aplanárním bodem (nikoli hlavním) některého vyššího $k$-tého řádu $(2 \leqq k \leqq n-2)$ k nadploše **V** $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru, nemusí být bod $P$ bodem Hessiánu nadplochy **V**.*

Důkaz. Zvolíme-li soustavu souřadnic jako ve větě 7, bude nadplocha **V** vyjádřena opět rovnicí (9), ale pro $k \geqq 2$.

Rozepíšeme-li její Hessián jako determinant $(r+1)$-ho stupně, mohou všechny jeho prvky obsahovat $x_0$ v nejvyšší mocnině $(n-2)$-hé kromě prvků jeho prvního sloupce a prvního řádku, jež obsahují $x_0$ nejvýše v mocnině $(n-3)$-tí, až na první prvek determinantu (v němž se první řádek kříží s prvním sloupcem), který obsahuje $x_0$ v mocnině $(n-2)$-hé. Mohou tedy některé členy determinantu obsahovat $x_0$ v nejvyšší mocnině až $(r+1)(n-2)$-hé, což je stupeň determinantu.

Naproti tomu hlavní aplanární body nadplochy jsou vždy body jejího Hessiánu, a to dokonce vícenásobnými.

**Věta 17.** *Je-li bod $P$ hlavní aplanární bod $k$-tého řádu k nadploše **V** $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru, je bod $P$ alespoň $k\,.\,r$-násobným bodem jejího Hessiánu.*

Důkaz. Zvolíme-li soustavu souřadnic jako ve větě 9, bude mít nadplocha **V** rovnici (13) a její Hessián jako determinant bude ve všech svých prvcích obsahovat $x_0$ v nejvyšší mocnině $(n-k-2)$-hé kromě prvků svého prvního sloupce a prvního řádku, kde $x_0$ bude v nejvyšší možné mocnině $(n-k-3)$-tí s výjimkou prvního prvku determinantu (v němž se první sloupec kříží s prvním řádkem) obsahujícího $x_0$ v mocnině $(n-2)$-hé. Nejvyšší mocnitel u $x_0$ ve kterémkoli členu determinantu tedy je

$$(n-2)+r\,.\,(n-k-2)=(r+1)(n-2)-k\,.\,r\,.$$

[16]) Na rozdíl od inflexních bodů čar, jak uvádí např. [9], věta 8, str. 63.

A protože stupeň Hessiánu je $(r + 1)(n - 2)$, obsahuje Hessián bod $O_0$ aspoň v násobnosti $k \,.\, r$.

Poznámka. Protože každý aplanární bod prvního řádu lze považovat za hlavní, vyplývá věta 15 z věty 17. Ukázali jsme však, že věta 15 udává jen nutnou podmínku toho, aby bod ležící mimo nadplochu k ní byl aplanární prvního řádu. Tato podmínka není postačující, a to dokonce ani v nejjednodušších případech (pro $n = 3$, $r = 2$). Je tedy podmínka vyjádřená větou 17 také jen nutná, nikoli postačující, takže ani větu 17 podobně jako větu 15 nelze obrátiti.

O tom, jak se chovají k Hessiánu hlavní aplanární body nejvyššího možného řádu, tj. $(n - 2)$-ho, k nadploše $\boldsymbol{V}$ $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru, lze usoudit z věty 17, kam za $k$ dosadíme $n - 2$.

Důsledek. *Je-li P hlavní aplanární bod $(n - 2)$-ho řádu — tedy nejvyššího možného řádu — k nadploše $\boldsymbol{V}$ n-tého stupně v r-rozměrném projektivním prostoru, je P alespoň $(n - 2).r$-násobným bodem jejího Hessiánu.*

To však není vše, co lze o chování těchto bodů k Hessiánu nadplochy říci. Napíšeme-li příslušný Hessián v podobě determinantu $(r + 1)$-ho stupně, zjistíme na první pohled, že jak v jeho prvním řádku, tak v jeho prvním sloupci jsou samé nuly, až na první prvek determinantu (v němž se tyto řady kříží), který je $n(n - 1) \,.\, x_0^{n-2}$. Ostatní prvky determinantu proměnnou $x_0$ již vůbec neobsahují. Nadrovina (10) je však lineární polára bodu $O_0$ k nadploše $\boldsymbol{V}$, a tato nadrovina je tedy v Hessiánu nadplochy $\boldsymbol{V}$ obsažena jako $(n - 2)$-násobná součást. Z toho plyne:

**Věta 18.** *Lineární polára hlavního aplanárního bodu nejvyššího řádu — tj. $(n - 2)$-ho — k nadploše n-tého stupně $\boldsymbol{V}$ v r-rozměrném projektivním prostoru je $(n - 2)$-násobná součást jejího Hessiánu.*

**5.** Na základě nalezených vlastností aplanárních bodů můžeme udat postup,[17]) kterým lze k dané čáře, ploše nebo nadploše určené rovnicí najít všechny hlavní body aplanární.

Jde-li o nadplochu v $r$-rozměrném projektivním prostoru, lze podle věty 17 nejprve určit všechny takové body, které mohou být hlavními aplanárními body aspoň prvního řádu k dané nadploše pomocí jejího Hessiánu; jsou to ty body, které leží mimo danou nadplochu a jsou alespoň $k \,.\, r$-násobnými body jejího Hessiánu, kde $k$ je jakékoli přirozené číslo. Číslo $k$ pak udává nejvyšší možný řád příslušného bodu, je-li hlavním aplanárním bodem k dané nadploše. Zda tomu však tak skutečně je, nutno ověřit — není-li to patrné na první pohled z rovnice nadplochy — užitím polár nalezeného bodu. Jejich pomocí lze také s konečnou platností rozhodnout o řádu všech nalezených aplanárních bodů.

K určení všech hlavních aplanárních bodů k dané nadploše $\boldsymbol{V}$ $n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru se tedy nabízí tento postup:

[17]) Podobně jako u bodů planárních: [9], str. 69.

Nejprve napíšeme rovnici Hessiánu dané nadplochy a určíme všechny jeho body alespoň $r$-násobné, které neleží zároveň na dané nadploše. Dále napíšeme rovnice lineárních a kvadratických polár k dané nadploše všech bodů takto nalezených. Každý z nich, jehož kvadratická polára se rozpadá tak, že obsahuje jako součást jeho lineární poláru, je hlavním aplanárním bodem alespoň prvního řádu k dané nadploše. Z nalezených aplanárních bodů alespoň prvního řádu k dané nadploše vybereme ty, které jsou alespoň $2r$-násobnými body jejího Hessiánu, a napíšeme rovnice kubických polár všech takto vybraných bodů k dané nadploše. Každý z nich, jehož kubická polára obsahuje jako součást jeho poláru lineární, je hlavní aplanární bod alespoň druhého řádu k dané nadploše; zbývající body jsou hlavní aplanární body prvního řádu k dané nadploše. Z nalezených hlavních aplanárních bodů alespoň druhého řádu k dané nadploše vybereme podobně – užitím alespoň $3r$-násobných bodů Hessiánu a pak polár čtvrtého stupně – všechny ty body, které jsou hlavními aplanárními body alespoň třetího řádu k dané nadploše, přičemž ty, které zbudou, jsou k ní hlavní aplanární body druhého řádu; a tak pokračujeme dále, až již z bodů naposledy nalezených nelze dále vybrat hlavní aplanární body vyššího řádu. Určitě takto skončíme nejpozději u řádu $(n - 2)$-ho, je-li stupeň dané nadplochy $n$. Ale tím bude také náš úkol ukončen.

Podotkněme ještě k tomuto postupu, že jej nelze nikde zkrátit ani zjednodušit tak jako tomu bylo při určování inflexních bodů čar v rovině, neboť větu 17 nelze ani v nejjednodušších případech obrátit.

Příklad 1. Určeme všechny hlavní aplanární body k ekvianharmonické kubické ploše

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 . \tag{21}$$

Její Hessián je

$$x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0 \tag{22}$$

a jeho trojnásobné body jsou vrcholy souřadnicového simplexu, body $O_0(1, 0, 0, 0)$, $O_1(0, 1, 0, 0)$, $O_2(0, 0, 1, 0)$ a $O_3(0, 0, 0, 1)$. Kvadratická polára každého z nich k dané nadploše je jeho dvojnásobná polára lineární. Jsou to tedy vesměs aplanární body (prvního řádu) k dané nadploše.

Příklad 2. Určeme všechny hlavní aplanární body k ploše vyjádřené analogickou rovnicí pátého stupně:

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0 . \tag{23}$$

Její Hessián je

$$x_0^3 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot x_3^3 = 0 , \tag{24}$$

takže body Hessiánu, které jsou na něm aspoň trojnásobné, leží na rovinách souřadnicového simplexu a vyplňují je.

Lze však snadno ukázat, že žádný bod ležící na kterékoli z těchto rovin mimo její průsečnice s ostatními není hlavním aplanárním bodem dané plochy (23). Kdyby tomu totiž tak bylo, musela by existovat taková tři čísla $y_1, y_2, y_3$ vesměs nenulová

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \neq 0\,, \tag{25}$$

že bod $Y(0, y_1, y_2, y_3)$ by byl hlavním aplanárním bodem (aspoň prvního řádu) k dané ploše (23). Potom by ovšem kvadratická polára

$$y_1^3 \,.\, x_1^2 + y_2^3 \,.\, x_2^2 + y_3^3 \,.\, x_3^2 = 0 \tag{26}$$

bodu $Y$ k ploše (23) musela obsahovat jeho lineární poláru k téže ploše

$$y_1^4 \,.\, x_1 + y_2^4 \,.\, x_2 + y_3^4 \,.\, x_3 = 0 \tag{27}$$

jako součást, což znamená, že by musela existovat taková tři čísla $a$, $b$, $c$, o nichž by platilo

$$y_1^3 \,.\, x_1^2 + y_2^3 \,.\, x_2^2 + y_3^3 \,.\, x_3^2 = (ax_1 + bx_2 + cx_3) \,.\, (y_1^4 \,.\, x_1 + y_2^4 \,.\, x_2 + y_3^4 \,.\, x_3)\,. \tag{28}$$

Čísla $a$, $b$, $c$ by pak splňovala podmínky

$$\begin{gathered} ay_1^4 = y_1^3\,, \quad by_2^4 = y_2^3\,, \quad cy_3^4 = y_3^3\,, \\ ay_2^4 + by_1^4 = 0\,, \quad ay_3^4 + cy_1^4 = 0\,, \quad by_3^4 + cy_2^4 = 0\,, \end{gathered} \tag{29}$$

což znamená, že by podle prvních tří z nich platilo

$$a = \frac{1}{y_1}\,, \quad b = \frac{1}{y_2}\,, \quad c = \frac{1}{y_3}\,, \tag{30}$$

avšak po dosazení odtud do posledních tří rovnic ze soustavy (29) bychom dostali

$$\frac{y_1^5 + y_2^5}{y_1 y_2} = 0\,, \quad \frac{y_1^5 + y_3^5}{y_1 y_3} = 0\,, \quad \frac{y_2^5 + y_3^5}{y_2 y_3} = 0\,. \tag{31}$$

Tyto poslední tři rovnice nemohou však o souřadnicích bodu $Y(0, y_1, y_2, y_3)$ zároveň platit, neboť na příklad podle posledních dvou z nich by pak muselo být $y_1^5 = y_2^5 = -y_3^5$, což dosazeno do první by znamenalo $y_1^5 = y_2^5 = 0$, takže by bylo i $y_1 = y_2 = 0$, ale to odporuje předpokladu (25).

Tím je ukázáno, že plocha (23) nemá hlavní aplanární body (leda triviální) mimo osy soustavy souřadnic.

Ukážeme nyní dále, že ani na osách soustavy souřadnic nemá plocha (23) žádné aplanární body mimo vrcholy souřadnicového simplexu. Kdyby tomu totiž tak bylo, existoval by mimo danou nadplochu na příklad takový bod $Z(0, z_1, z_2, 0)$, o jehož souřadnicích by platilo

$$z_1 \,.\, z_2 \neq 0 \tag{32}$$

a jehož lineární polára k dané nadploše

$$z_1^4 \,.\, x_1 + z_2^4 \,.\, x_2 = 0 \tag{33}$$

by byla součástí jeho poláry kvadratické

(34) $$z_1^3 . x_1^2 + z_2^3 . x_2^2 = 0\,,$$

takže by existovala taková dvě čísla $p$, $q$, o nichž by platilo

$$z_1^3 . x_1^2 + z_2^3 . x_2^2 = (px_1 + qx_2) . (z_1^4 . x_1 + z_2^4 . x_2)\,;$$

to znamená, že čísla $p$, $q$ by splňovala podmínky

(35) $$z_1^3 = pz_1^4\,, \quad z_2^3 = qz_2^4\,, \quad 0 = qz_1^4 + pz_2^4\,.$$

Podle prvních dvou by pak muselo být

(36) $$p = \frac{1}{z_1}\,, \quad q = \frac{1}{z_2}\,,$$

což dosazeno do třetí ze soustavy (35) dává

(37) $$0 = \frac{z_1^4}{z_2} + \frac{z_2^4}{z_1} = \frac{z_1^5 + z_2^5}{z_1 . z_2}\,,$$

ale $z_1^5 + z_2^5$ nemůže být rovno nule pro žádný bod $Z(0, z_1, z_2, 0)$, který leží mimo danou plochu (23). Nalezli jsme tedy, že plocha (23) může mít na osách soustavy souřadnic mimo vrcholy souřadnicového simplexu jen body planární, nikoli však body aplanární.

Zbývají tedy již jen vrcholy souřadnicového simplexu body $O_0(1, 0, 0, 0)$, $O_1(0, 1, 0, 0)$, $O_2(0, 0, 1, 0)$ a $O_3(0, 0, 0, 1)$. Všechny tyto čtyři body jsou hlavní aplanární body dané plochy, jak se lze přesvědčit užitím jejich polár. Jejich pomocí lze také zjistit, že jde vesměs o hlavní aplanární body třetího to je nejvyššího možného řádu k dané ploše pátého stupně. Je to však možno zjistit také jediným pohledem z tvaru rovnice dané plochy (23).

**6.** Jak bylo vidět z obou uvedených příkladů, mohou ležet planární body ploch na polárách hlavních aplanárních bodů, zejména nejvyššího řádu, k daným plochám. Podobně je tomu i u nadploch ve vícerozměrných prostorech. Ve dvojrozměrném prostoru platí dokonce ještě více:

**Věta 19.** *Lineární polára hlavního aplanárního bodu $P$ nejvyššího řádu k dané čáře $n$-tého stupně v rovině protíná tuto čáru v samých inflexních bodech nejvyššího, tedy $(n - 2)$-ho řádu. Inflexní tečny dané čáry ve všech těchto průsečících procházejí daným hlavním aplanárním bodem $P$.*

Důkaz. Zvolme bod $P$ v bodě $O_0$ soustavy souřadnic. Potom lze podle věty 9 napsat rovnici čáry ve tvaru

(38) $$x_0^n + f_n(x_1, x_2) = 0\,.$$

Prochází-li tato čára vrcholem souřadnicového simplexu $O_1(0, 1, 0)$, čehož lze vždy dosáhnout vhodnou volbou soustavy souřadnic, má forma $f_n$ z rovnice (38) tvar

(39) $$f_n(x_1, x_2) = a_1 x_1^{n-1} x_2 + a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n$$

a tečna čáry (38) v jejím bodě $O_1$ má pak rovnici

(40) $$x_2 = 0 .$$

Přímka (40) prochází bodem $O_0$ a danou čáru (38) protíná v bodě $O_1$ $n$-násobně, takže $O_1$ je skutečně inflexním bodem dané čáry (38) nejvyššího možného to je $(n - 2)$-ho řádu (je jejím bodem Eckardtovým). Protože pak lze vždy vhodnou volbou soustavy souřadnic dosáhnout toho, aby libovolný průsečík dané čáry s polárou aplanárního bodu nejvyššího řádu k této čáře byl bod $O_1$ při zachování tvaru její rovnice (38), je dokázaná vlastnost společná všem průsečíkům čáry (38) s přímkou (40).

V prostorech vícerozměrných neplatí sice věta analogická k větě 19, ale přeci i tam zůstávají některé vlastnosti hlavních aplanárních bodů a jejich polár zachovány. Proto je vyjádříme jedinou větou platnou pro všechny prostory $r$-rozměrné, kde $r$ je jakékoli přirozené číslo.

**Věta 20.** *Je-li $P$ hlavní aplanární bod nejvyššího možného řádu $(n-2)$-ho k nadploše* **V** *$n$-tého stupně v $r$-rozměrném projektivním prostoru, existuje v tomto prostoru grupa* G *cyklických kolineací středových se středem v bodě $P$ a s nadrovinou samodružných bodů* **L**, *jež je lineární polárou bodu $P$ k nadploše* **V**, *jejíž kolineace mají tyto vlastnosti:*

a) *Ke každé z kolineací grupy* G *je nadplocha* **V** *invariantní.*

b) *Libovolná přímka* **p** *procházející bodem $P$ protne nadplochu* **V** *(pokud není její tečnou) v bodech $n$-bodového cyklu, vytvořeného na ní libovolnou z kolineací grupy* G, *pokud je cyklická $n$-tého stupně.*

c) *Libovolná přímka* **p**, *spojující bod $P$ se kterýmkoli bodem $Q$ ležícím na průsečnici nadplochy* **V** *s nadrovinou* **L**, *je tečnou nadplochy* **V**, *která s ní má společný $n$-násobný bod $Q$.*

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic jako ve větě 9, takže bod $P$ padne do vrcholu $O_0$ soustavy souřadnic, jeho lineární polára **L** bude mít rovnici (10) a nadplocha **V** bude vyjádřena rovnicí (13), do níž za $k$ je třeba dosadit $n - 2$, to je rovnicí

(41) $$x_0^n + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0 .$$

Libovolná kolineace vytvářející grupu G bude pak vyjádřena soustavou rovnic

(42) $$x_0 = x_0' , \quad x_h = \varepsilon_n x_h'$$

pro $h = 1, 2, \ldots, r$, kde $\varepsilon_n$ značí libovolnou $n$-tou primitivní odmocninu z jedné (kteréhožto označení budeme užívat i dále).

O vlastnosti a) je možno se okamžitě přesvědčit dosazením.

Abychom dokázali i vlastnost b), proveďme v nadrovině (10) transformaci souřadnic tak, aby průsečík přímky **p** s nadrovinou (10) padl do bodu $O_1$ soustavy souřadnic (pokud v něm již původně neležel). Má-li pak forma $f_n$ tvar

(43) $$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_r) = a x_1^n + b x_1^{n-1} x_2 + \ldots ,$$

budou průsečíky přímky **p** s nadplochou **V** body

$$(44) \qquad P_1(c, \varepsilon_n, 0, \ldots, 0),\ P_2(c, \varepsilon_n^2, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ P_n(c, \varepsilon_n^n, 0, \ldots, 0),$$

kde $c = \sqrt[n]{a}$. Zřejmě jsou body $P_1, P_2, \ldots, P_n$ seřazeny libovolnou kolineací (42) v $n$-bodový cyklus.

Padne-li konečně některý z průsečíků přímky **p** s nadplochou **V** – bodů $P_1$, $P_2, \ldots, P_n$ – do bodu $Q(0, 1, 0, \ldots, 0)$ na nadrovině **L** s rovnicí (10), tj. do některého samodružného bodu kolineace (42), ztotožní se v něm se všemi ostatními body cyklu, který vytváří, to je se všemi ostatními průsečíky přímky **p** s nadplochou **V**. Tím je i vlastnost c) dokázána.

**Věta 21.** *Je-li P hlavní aplanární bod nejvyššího, tj. $(n-2)$-ho řádu k dané nadploše* **V** *n-tého stupně v r-rozměrném projektivním prostoru, existuje – až na jednu nadplochu – celý svazek nadploch majících vesměs všechny vlastnosti nadplochy* **V**, *o nichž jedná věta 20. Je-li přitom* (41) *rovnice nadplochy* **V**, *je rovnice libovolné nadplochy tohoto svazku*

$$(45) \qquad x_0^n + \lambda \,.\, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,,$$

*z něhož je jen kuželová nadplocha*

$$(46) \qquad f_n(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$$

*vyňata.*

Důkaz. Zaveďme pro druhého sčítance levé strany rovnice (45) označení

$$(47) \qquad \lambda \,.\, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_r) = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_r)\,.$$

Potom nadplocha (45) bude vyjádřena rovnicí

$$(48) \qquad x_0^n + F_n(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,,$$

to je rovnicí téhož tvaru jako je (41), takže nadplocha, která je jí vyjádřena, má všechny vlastnosti nadplochy **V** s rovnicí (41), o nichž jedná věta 20.

Poznámka 1. Jednotlivé nadplochy soustavy (45) vytvářejí svými průsečíky s různými přímkami **p** procházejícími bodem $O_0$ různé bodové cykly kolineace (42).

Poznámka 2. Je-li nadplocha **V**, o níž jedná věta 20, kvadratická, lze libovolný bod $P$, ležící mimo ni, pokládat za hlavní aplanární bod nejvyššího tj. 0-tého řádu k nadploše. Vlastnosti a), b), c) z věty 20 jsou pak známé harmonické vlastnosti pólu a poláry kvadratické nadplochy. Tento případ je jediný, kdy kolineace grupy G i bodové cykly, které vytvářejí, mohou být při reálném bodu $P$ a jeho reálné poláře reálné.

### *Literatura*


[1] *E. F. Eckardt*: Über diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Math. Annalen 1876, Leipzig, 227–273.

[2] *A. B. Basset*: A Treatise on the Geometry of surfaces. Cambridge 1910.

[3] *J. L. Coolidge*: A Treatise on Algebraic plane curves. Oxford 1931.
[4] *G. Salmon*, *W. Fiedler*: Analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1922.
[5] *L. Godeaux*: Sur les droites d'une surface cubique. Mathesis 1933, Paris, 333—339.
[6] *J. Metelka*: Sur les points planaires des surfaces cubiques. Bulletin de l'Académie royale Belgique, Classe des Sciences 1947, Bruxelles, 143—155.
[7] *B. Bydžovský*: Úvod do algebraické geometrie. Praha 1948.
[8] *F. Enriques*: Le superficie algebriche. Bologna 1949.
[9] *K. Šindelář*: Planární a hyperplanární body. Časopis pro pěstování matematiky *86* (1961), Praha, 56—75.



## Резюме

# НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПЛАНАРНЫХ ТОЧЕК

КАРЕЛ ШИНДЕЛАРЖ (Karel Šindelář), Жилина

Понятие планарной точки обобщено, с одной стороны, на многократные точки гиперповерхностей, на так называемые *гиперконические точки*, с другой стороны, на точки, лежащие мимо гиперповерхности, которые называются *апланарными точками* к гиперповерхностям.

Введя определение порядка таким образом обобщенных точек, мы видим, что порядок гиперконических точек — это иногда целый ряд порядков. Напротив апланарные точки некоторого порядка не имеют в общем случае свойства апланарных точек всех более низких порядков. Но если такие свойства все-таки имеются, то точки называются *главными апланарными точками.*

Доказывается, что всякая гиперплоскcть, проходящая через гиперконическую точку $k$-го порядка заданной гиперповерхности, пересекает гиперповерхность в многообразии, у которого эта точка или является гиперконической по крайней мере $k$-го порядка, или ее кратность на многообразии увеличивается по крайней мере на $k$.

В отличие от планарных точек многократность гиперконических точек у гессияна гиперповерхности вообще не превышает многократность аналогичных конических точек.

Но поляры гиперконических точек к гиперповерхности распадаются весьма подобным образом.

На распадении поляр основывается определение апланарных и главных апланарных точек.

Гиперплоскости, проходящие через апланарные и главные апланарные точки к гиперповерхности, пересекают гиперповерхность в многообразии, у которого порядок такой апланарной точки никогда не уменьшается.

Поскольку дело касается гессияна, оказывается что всякая главная апланарная точка $k$-го порядка к гиперповерхности в $r$-мерном проективном простран-

стве является $k \cdot r$-кратной точкой ее гессияна. Но это условие апланарности точки всегда только необходимо и никогда не достаточно в отличие от точек перегиба кривых на плоскости.

Затем указан метод определения всех главных апланарных точек к заданной поверхности или гиперповерхности. Способ нахождения показан на примере эквиангармонической кубической поверхности и на аналогичной поверхности 5-го порядка.

В заключение перечислены некоторые свойства главных апланарных точек самого высшего порядка: их связность с планарными точками, которая очень явна в плоскости, то есть с точками перегиба; затем гармонические свойства таких точек и их поляр к гиперповерхности, которые являются обобщением гармонических свойств точки и ее поляры к гиперповерхности 2-го порядка.


## Résumé

# QUELQUES GÉNÉRALISATIONS DES POINTS PLANAIRES

KAREL ŠINDELÁŘ, Žilina

La notion de point planaire est généralisée d'une part aux points multiples des hypersurfaces, d'est-à-dire à leurs *points hyperconiques*, d'autre part aux points hors des hypersurfaces qu'on appelle *points aplanaires* par rapport aux hypersurfaces.

Passant à la définition d'ordre de ces points généralisés, on voit que les points hyperconiques peuvent avoir quelquefois en même temps toute une série d'ordres. Par contre, les points aplanaires d'un ordre déterminé n'ont pas en général toutes les propriétés des points aplanaires de tous les ordres inférieurs. S'il y en a pourtant, on les appelle *points aplanaires principaux.*

On démontre que chaque hyperplan passant par un point hyperconique d'ordre $k$ d'une hypersurface coupe l'hypersurface dans une variété sur laquelle ce point est soit hyperconique d'ordre $k$ au moins soit de multiplicité augmentée de $k$ au moins.

Par opposition aux points planaires, la multiplicité des points hyperconiques sur la hessienne de l'hypersurface ne dépasse en général celle des points coniques analogues.

Au contraire, les polaires des points hyperconiques se décomposent d'une manière bien analogue.

Sur la décomposition des polaires s'appuye même la définition des points aplanaires et des points aplanaires principaux.

Les hyperplans passant par les points aplanaires et les points aplanaires principaux par rapport à une hypersurface coupent l'hypersurface dans des variétés sur lesquelles l'ordre d'un tel point aplanaire ne diminue jamais.

Quant' à la hessienne, on démontre que chaque point aplanaire principal d'ordre $k$ par rapport à une hypersurface dans l'espace projectif à $r$ dimensions est un point

$k \cdot r$-tuple de sa hessienne. Mais cette condition nécessaire n'est jamais suffisante par opposition aux points d'inflexion des courbes.

Ensuite, on donne une méthode de déterminer tous les points aplanaires principaux par rapport à une surface ou hypersurface. On démontre ce procédé en déterminant tous les points aplanaires par rapport à la surface cubique équianharmonique et à une surface analogue d'ordre 5.

On termine par énumérer quelques propriétés des points aplanaires d'ordre suprême: c'est leur connexité avec les points planaires, très bien évidente dans le plan, c'est-à-dire avec les points d'inflexion; et finalement les propriétés harmoniques de ces points et de leurs polaires à l'hypersurface qui ne sont qu'une généralisation des propriétés harmoniques d'un point et de sa polaire à une hypersurface quadratique.