Pavel Bartoš

Poznámka o počte riešení rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$ v prirodzených číslach

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 4, 411--415

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108335

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

POZNÁMKA O POČTE RIEŠENÍ ROVNICE $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$ V PRIRODZENÝCH ČÍSLACH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 26. marca 1969)

Ako je známe racionálne číslo a/b (a, b prirodzené čísla), pre ktoré rovnica

(1) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$$

má riešenie v prirodzených číslach x, y, nazýva sa číslom A_2 [1]). Nutné a postačujúce podmienky pre to, aby a/b bolo číslom A_2 vyslovuje napr. veta Schinzelova (pozri [1] veta 1, str. 6–7) a veta N. Nakayamaova (pozri [2] str. 193). O počte týchto riešení však (ak a/b je číslom A_2) podľa P. Erdösa (pozri [2] str. 194) nič nie je známe.

V tomto článku odvodíme nutné a dostačujúce podmienky pre riešiteľnosť rovnice (1) v prirodzených číslach v takej forme, ktorá umožňuje vo zvláštnych prípadoch (napr. keď $a = 1$, alebo keď b je prvočíslo atď.) určenie počtu týchto riešení a vo všeobecnom prípade aspoň určenie horného ohraničenia tohoto počtu.

Veta 1. *Každé riešenie rovnice* (1) *v prirodzených číslach x, y je tvaru*

(2) $$x = \frac{b + k_1}{a}, \quad y = \frac{b + k_2}{a}$$

kde k_1, k_2 sú prirodzené čísla, pre ktoré platí

(3) $$k_1 k_2 = b^2, \quad a \mid b + k_1, \quad a \mid b + k_2$$

a obrátene každá dvojica čísel x, y týchto vlastností je riešením rovnice (1) *v prirodzených číslach.*

Dôkaz. 1. Keďže $1/x < a/b$, je $x > b/a$. Položme preto $x = (b + k_1)/a$, kde k_1

---

[1]) Pozri napr. [3] str. 57.

je prirodzené číslo (lebo $k_1 = ax - b$). Po dosadení do (1) máme $a/(b + k_1) + 1/y = a/b$, odkiaľ po malej úprave

$$y = \frac{1}{a}\left(b + \frac{b^2}{k_1}\right) = \frac{b + k_2}{a},$$

kde $k_2 = b^2/k_1$, takže $b^2 = k_1k_2$ a číslo $k_2 = ay - b$ je tiež číslo prirodzené. Podmienky (2) a (3) sú teda nutné.

2. Dosaďme (2) do ľavej strany (1). Máme

$$\frac{a}{b + k_1} + \frac{a}{b + k_2} = \frac{a(2b + k_1 + k_2)}{b^2 + b(k_1 + k_2) + k_1k_2} =$$

$$= \frac{a(2b + k_1 + k_2)}{2b^2 + b(k_1 + k_2)} = \frac{a}{b}.$$

Podmienky (2) a (3) sú teda aj dostačujúce. Tým je veta dokázaná.

Riešenia

$$\left(\frac{b + k_1}{a}, \frac{b + k_2}{a}\right) \text{ a } \left(\frac{b + k_2}{a}, \frac{b + k_1}{a}\right)$$

nepovažujeme za rôzne, a tak všetky riešenia rovnice (1) dostaneme, ak sa obmedzíme na $k_1 \leqq b$. Pri $k_1 < b$ je $x < y$ a pri $k_1 = b$ je $x = y$.

Veta 2. *Počet $n(a/b)$ riešení rovnice (1) v prirodzených číslach x, y je*

$$n\left(\frac{a}{b}\right) \leqq \tfrac{1}{2}(d(b^2) + 1) \tag{4}$$

kde $d(b^2)$ je počet všetkých kladných deliteľov čísla b^2. Pre $a = 1$ platí rovnosť.

Dôkaz. Ak k prebieha všetky delitele čísla b^2, potom tieto delitele môžeme dať do párov k_1, $k_2 = b^2/k_1$ združených deliteľov. Ak dvojica (k_1, k_2) združených deliteľov čísla b^2 dáva riešenie rovnice (1), potom to isté riešenie dáva aj dvojica (k_2, k_1) (pozri (3) a dohovor pred vetou 2). Pritom ak $k_1 < b_1$ je dvojica (k_1, k_2) rôzna od (k_2, k_1). Tak dostávame najviac $\frac{1}{2}(d(b^2) - 1)$ riešení rovnice (1). K tomu pristupuje ešte (eventuálne) riešenie, ktoré odpovedá dvojici (b, b), teda spolu rovnica (1) nemá viac než $\frac{1}{2}(d(b^2) + 1)$ riešení.

Pri $a = 1$ je každá dvojica (2) skutočne riešením rovnice (1), takže vo vzťahu (4) platí rovnosť. Ako uvidíme nie je to jediný prípad rovnosti v (4).

Poznámka 1. Ak je kanonický rozklad čísla b na prvočinitele $b = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots \dots, p_j^{\alpha_j}$, potom $d(b^2) = \prod_{i=1}^{j} (2\alpha_i + 1)$, takže číslo $\frac{1}{2}(d(b^2) + 1)$ je prirodzené.

Poznámka 2. Snadno sa presvedčíme, že v (4) platí rovnosť aj vtedy, keď $a = 2$ a b je nepárne číslo. Ak je však $a = 2$ a b párne číslo, máme po krátení zlomku a/b dvoma rovnicu $1/x + 1/y = 1/b'$, kde $b' = \frac{1}{2}b$ je prirodzené číslo, a tak podľa vety 2 platí

$$n\left(\frac{2}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(d(b'^2) + 1\right) = \frac{1}{2}\left(d\left(\frac{b^2}{4}\right) + 1\right).$$

V ďalšom predpokladáme $(a, b) = 1$.

Lema 1. *Nech $b^2 = k_1k_2$ je rozklad v obore prirodzených čísel a nech $(a, b) = 1$. Potom platí*

$$a \mid b + k_1 \Leftrightarrow a \mid b + k_2 .$$

Dôkaz. Zrejme existujú prirodzené čísla m, n, l také, že $k_1 = m^2l$, $k_2 = n^2l$, $b = mnl$. Potom $b + k_1 = ml(m + n)$, $b + k_2 = nl(m + n)$. Pretože $(a, b) = (a, m) = (a, n) = (a, l) = 1$, platí

$$a \mid b + k_1 \Rightarrow a \mid m + n \Rightarrow a \mid b + k_2$$

a analogicky obrátene. Tým je lema dokázaná.

Z lemy 1 bezprostredne vyplýva

Lema 2. *Ak $(a, b) = 1$, potom podmienka (3) vo vete 1 je ekvivalentná s podmienkou*

$$k_1k_2 = b^2, \quad a \mid b + k_1, \quad k_1 \leqq b . \tag{3'}$$

Veta 3. *Nech $(a, p) = 1$, p je prvočíslo. Potom*

$$n\left(\frac{a}{p}\right) \leqq 2 \tag{5}$$

a rovnosť v (5) platí práve vtedy, keď buď $a = 1$ alebo $a = 2$ a súčasne p je nepárne prvočíslo. Ďalej $n(a/p) = 1$ práve vtedy, keď $a > 2$ a $a \mid p + 1$.

V ostatných prípadoch je $n(a/p) = 0$.

Dôkaz. Pre k_1 prichádzajú v dôsledku $(3')$ do úvahy len hodnoty 1 a p, takže $n(a/p) \leqq 2$. Nech existujú dve rôzne riešenia rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{p}. \tag{6}$$

Potom $a \mid p + 1$ a súčasne $a \mid p + p$ (pozri (3)). Odtiaľ vyplýva $a \mid p - 1$. Z podmienok $a \mid p + 1$, $a \mid p - 1$ dostávame $a \mid 2$, takže $a \leqq 2$. Teda ak (6) má dve rôzne riešenia, potom $a \leqq 2$. Ak $a = 1$, platí v (5) rovnosť na základe vety 2, keďže $d(p^2) = 3$. Ak $a = 2$ a (6) má dve rôzne riešenia, musí byť $p + 1$ párne (keďže $2 \mid p + 1$) a tak p musí byť nepárne prvočíslo. Obrátene, ak p je nepárne prvočíslo, má rovnica $1/x + 1/y = 2/p$ dve rôzne riešenia (pozri poznámku 2).

Ak $n(a/p) = 1$, potom nastáva aspoň jeden z týchto prípadov: 1. $a \nmid p + 1$, $a \mid 2p$; 2. $a \mid p + 1$, $a \nmid 2p$. V prípade 1. je a jedno z čísel $1, 2, p, 2p$. Hodnoty p, $2p$ sú vylúčené tým, že $(a, p) = 1$ a hodnota $a = 1$ tým, že $a \nmid p + 1$. Teda $a = 2$. No potom z $a \nmid p + 1$ vyplýva $p = 2$, takže $(a, p) > 1$. Teda prípad 1. nemôže nastať a tak nastáva 2. Z 2. vyplýva $a > 2$ (pri $a \leqq 2$ je $a \mid 2p$ – pozri 2.) a $a \mid p + 1$. Obrátené, ak $a > 2$ a $a \mid p + 1$ má rovnica (6) na základe vety 1 a predošlej časti dôkazu práve jedno riešenie. Tým je dôkaz skončený.

Poznámka. Rozklady na súčet kmeňových zlomkov, ktoré zodpovedajú riešeniam, uvedeným v tejto vete, sú nasledovné:

1. dve rôzne riešenia:

a) $$a = 1,\ k_1 = 1\,;\quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p}\,;\quad k_1 = p\,;\quad \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}\,;$$

b) $$a = 2,\ p \text{ nepárne},\ k_1 = 1\,;\quad \frac{1}{\frac{1}{2}(p+1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}p(p+1)} = \frac{2}{p}\,;$$

$$k_1 = p\,;\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

2. jediné riešenie;

$$a > 2,\ a \mid p + 1,\ k_1 = 1\,;\quad \frac{1}{\frac{1}{a}(p+1)} + \frac{1}{\frac{1}{a}p(p+1)} = \frac{a}{p}\,.$$

Riešenie 2) je uvedené ako dôsledok 4 k vete 1 v [1] str. 11, avšak jeho unicita nie je ani spomenutá, ani dokázaná.

Literatúra

[1] *Sierpiński W.:* O rozkładach liczb wymiernych na ułamky proste. Warszawa, 1957.

[2] *Erdös P.:* Az $1/x_1 + 1/x_2 + \ldots + 1/x_n = a/b$ egyenlet egészszámu megoldásairól. Mat. Lap. *1* (1950), 192–210.

[3] *Sedláček J.:* Keine Angst vor Mathematik. Leipzig, 1965.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ÜBER DIE ANZAHL DER LÖSUNGEN DER GLEICHUNG $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$ IN NATÜRLICHEN ZAHLEN

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Im Artikel wird eine Methode zur Lösung und Bestimmung der Anzahl der Lösungen der Gleichung (1) in natürlichen Zahlen angeführt.