Časopis pro pěstování matematiky

Vladimír Petrův

O symetrické derivaci spojitých funkcí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 336–342

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108283`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O SYMETRICKÉ DERIVACI SPOJITÝCH FUNKCÍ

VLADIMÍR PETRŮV, Praha

(Došlo dne 16. září 1957) DT: 517.23

V práci je dokázáno, že pro všechny spojité funkce $x \in C$, až na množinu funkcí I. kategorie, je pro všechna $t \in (0, 1)$ horní symetrická derivace rovna $+\infty$ a dolní rovna $-\infty$. Dále je to zobecněno na výraz tvaru $\dfrac{x(t+h) - x(t-h)}{\varphi(h)}$.

Budu užívati obvyklých označení: C bude znamenati množinu všech funkcí, spojitých v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, s obvyklou normou $\|x\| = \max\limits_{t \in \langle 0,1\rangle} |x(t)|$ (tedy: konvergence v C je totéž jako stejnoměrná konvergence). C je úplný normovaný lineární prostor a to separabilní (např. množina všech polynomů s racionálními koeficienty je v něm hustá). O množině $A \subset C$ budeme říkati, že je residuel, je-li $C - A$ I. kategorie v C, tj. je-li $C - A$ rovno spočetnému sjednocení řídkých množin.

Jest známo, že platí:[1])

I. Označme A_1 množinu všech $x \in C$ takových, že pro skoro všechna $t \in \langle 0, 1\rangle$ je

$$x^+(t) = \limsup_{h \to 0+} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = +\infty\,,$$

$$x_+(t) = \liminf_{h \to 0+} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = -\infty\,,$$

$$x^-(t) = \limsup_{h \to 0-} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = +\infty\,,$$

$$x_-(t) = \liminf_{h \to 0-} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = -\infty\,;$$

pak A_1 je residuel.[2])

[1]) Otázkami tohoto druhu se jako první zabývali S. BANACH (viz [1]) a S. MAZURKIEWICZ (viz [2]).

[2]) Viz [3].

II. Budiž A_2 množina všech $x \in C$, pro něž platí:

V $\langle 0, 1\rangle$ existují 4 neprázdné dokonalé množiny M^+, M_+, M^-, M_- tak, že

$$\begin{aligned}
&\text{pro každé } t \in M^+ \text{ je } x^+(t) = x_+(t) = +\infty ,\\
&\text{pro každé } t \in M_+ \text{ je } x^+(t) = x_+(t) = -\infty ,\\
&\text{pro každé } t \in M^- \text{ je } x^-(t) = x_-(t) = +\infty ,\\
&\text{pro každé } t \in M_- \text{ je } x^-(t) = x_-(t) = -\infty ;
\end{aligned}$$

pak A_2 je residuel.[3])

III. Speciálně: Budiž A_3 množina všech $x \in C$, pro něž v žádném bodě z $\langle 0, 1\rangle$ neexistuje jednostranná derivace (ani nevlastní); pak A_3 je I. kategorie.

V. Jarník dokazuje v citované již práci (mimo jiné) výsledky obecnější, které dostaneme tak, že ve větách I a II místo výrazů $\dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$ vezmeme obecnější výrazy $\dfrac{x(t+h) - x(t)}{\varphi(h)}$, kde $\varphi(h)$ je definováno pro všechna $h, h.\ \varphi(h) > 0$, pro $h \neq 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.[4])

V této poznámce budu vyšetřovati výraz $\dfrac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$ resp. obecněji $\dfrac{x(t+h) - x(t-h)}{\varphi(h)}$; dále budeme označovati znakem x^s horní symetrickou derivaci

$$x^s(t) = \limsup_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$$

a znakem x_s dolní symetrickou derivaci

$$x_s(t) = \liminf_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}.\text{[5])}$$

V případě, že $x^s(t) = x_s(t) = \alpha$, budeme říkati, že funkce x má v bodě t symetrickou derivaci rovnou α $(-\infty \leqq \alpha \leqq +\infty)$.

Budiž $\varphi(h)$ definováno pro $h > 0$, $\varphi(h) > 0$, $\lim\limits_{h\to 0+} \varphi(h) = 0$; dokáži nyní tuto větu:

---

[3]) Viz [4].

[4]) U věty II ještě za dodatečného předpokladu $\limsup\limits_{h\to 0+} \dfrac{\varphi(h)}{h} < +\infty$ pro „pravostranné" tvrzení věty. Je-li $\limsup\limits_{h\to 0+} \dfrac{\varphi(h)}{h} = +\infty$, platí tvrzení právě opačné (viz [3]). Stejně zleva.

[5]) Zřejmě je jedno, bereme-li limitu pro $h \to 0$ nebo pro $h \to 0+$ nebo pro $h \to 0-$, tedy pojmy „derivace" a „derivace zprava" a „derivace zleva" dávají v symetrickém případě totéž.

Věta 1. *Budiž B množina všech $x \in C$ takových, že platí: Pro každé $t \in (0, 1)$ je*

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{\varphi(h)} = +\infty ,$$

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{\varphi(h)} = -\infty ;$$

pak B je residuel.

Důkaz. Označme B_n resp. B'_n ($n \geqq 2$, n přirozené) množinu všech $x \in C$ takových, že existuje alespoň jedno t, $\frac{1}{n} \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$ tak, že pro všechna h, $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ jest $\frac{x(t+h) - x(t-h)}{\varphi(h)} \leqq n$, resp. $\geqq -n$. Zřejmě je

$$C - B = \bigcup_{n=2}^{+\infty} B_n + \bigcup_{n=2}^{+\infty} B'_n .$$

Potřebujeme dokázat, že $C - B$ je I. kategorie. Stačí tedy dokázat, že každá B_n je řídká, neboť pro množiny B'_n to dostaneme ihned přechodem k funkci $-x$. Budiž n pevné.

Dokážeme nejprve, že B_n je uzavřená: Budiž $x_m \in B_m$, $x_m \to x_0$; tedy ke každému x_m existuje $t_m \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$ tak, že pro všechna h, $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ je $\frac{x_m(t_m + h) - x_m(t_m - h)}{\varphi(h)} \leqq n$. Všechna tato t_m však leží v kompaktním intervalu $\left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$, můžeme tedy předpokládati, že existuje $\lim_{m \to +\infty} t_m = t_0$ (jinak bychom přešli k posloupnosti vybrané). Pak však též platí $\frac{x_0(t_0 + h) - x_0(t_0 - h)}{\varphi(h)} \leqq n$ pro všechna $0 < h \leqq \frac{1}{n}$; kdyby tomu totiž tak nebylo, existovalo by h_0 $\left(0 < h_0 \leqq \frac{1}{n}\right)$ tak, že

$$\frac{x_0(t_0 + h_0) - x_0(t_0 - h_0)}{\varphi(h_0)} = n + 2\varepsilon \quad (\varepsilon > 0) .$$

Protože x_0 je spojitá funkce, existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro všechna t, $|t - t_0| < \delta$, platí

$$\frac{x_0(t + h_0) - x_0(t - h_0)}{\varphi(h_0)} > n + \varepsilon .$$

Protože $x_m \to x_0$ znamená stejnoměrnou konvergenci v $\langle 0, 1 \rangle$, existuje tedy

m_1 tak, že pro $m > m_1$, $|t - t_0| < \delta$ je též

$$\frac{x_m(t + h_0) - x_m(t - h_0)}{\varphi(h_0)} > n\,.$$

Existuje však (neboť $t_m \to t_0$) m_2 tak, že pro $m > m_2$ je $|t_m - t_0| < \delta$, a tedy pro $m > \max(m_1, m_2)$ je

$$\frac{x_m(t_m + h_0) - x_m(t - h_0)}{\varphi(h_0)} > n$$

kde $0 < h_0 \leqq \frac{1}{n}$, což je spor.

Stačí tedy ještě ukázat, že B_n je hraniční,[6]) tj. že každá otevřená koule prostoru C obsahuje alespoň jeden bod nepatřící do B_n. Protože však množina všech polynomů p je hustá v C, stačí to dokázat pro otevřené koule, jejichž středem je polynom. Budiž tedy K koule o poloměru r ($r > 0$) a středu p. Protože p je polynom, existuje $M > 0$ tak, že pro všechna t a h taková, že $h > 0$, $0 \leqq t + h \leqq 1$, $0 \leqq t - h \leqq 1$, je (podle věty o přírůstku funkce)

$$\left|\frac{p(t + h) - p(t - h)}{2h}\right| = |p'(t + \Theta h)| < M \qquad (|\Theta| < 1).$$

Označme $\psi(k) = \sup\limits_{0<h\leqq k} \varphi(h)$. Zřejmě $\lim\limits_{k\to 0+} \psi(k) = 0$.

Definujme nyní funkci $y_{r,s}$ pro $r > 0$, $0 < s < \frac{1}{8}$ takto $\left(\text{budiž } d = \left[\frac{1}{8s}\right]\right)$:[7])

$$\begin{aligned}
y_{r,s}(8ms) &= 0 \quad \text{pro} \quad m = 0, 1, \ldots, d\,,\\
y_{r,s}(8ms + 4s) &= \frac{r}{2} \quad \text{pro} \quad m = 0, 1, \ldots, d - 1\,,\\
y_{r,s}(8ms + 6s) &= 0 \quad \text{pro} \quad m = 0, 1, \ldots, d - 1\,,\\
y_{r,s}(8ms + 7s) &= \frac{r}{2} \quad \text{pro} \quad m = 0, 1, \ldots, d - 1\,,\\
y_{r,s}(1) &= 0
\end{aligned}$$

a mezi těmito $4d + 2$ body proložme $y_{r,s}$ lineárně. Průběh funkce $y_{r,s}$ je naznačen na obr. 1.

Zřejmě $\|y_{r,s}\| < r$, tedy $p + y_{r,s} \in K$.

Zvolme s tak, aby:

$$0 < 8s < 1\,, \quad 16s < \frac{1}{n}\,, \quad 16Ms < \frac{r}{16}\,, \quad \frac{r}{16\psi(8s)} > n\,.$$

---

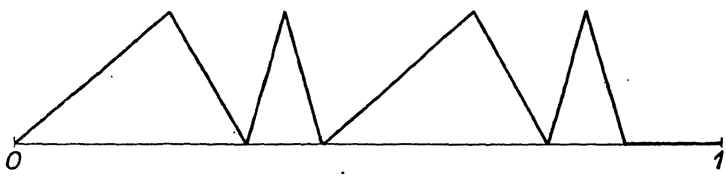
[6]) Uzavřená množina je řídká tehdy a jen tehdy, je-li hraniční.

[7]) Tj. d celé, $d \leqq \frac{1}{8s} < d + 1$.

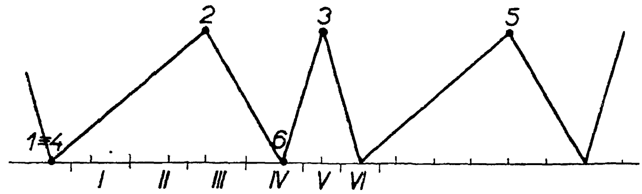
Ke každému $t \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$ zvolme h_t takto:

$$\begin{array}{rlll}
\text{I.} & \text{Je-li } 8ms + \frac{1}{2}s \leqq t < 8ms + 2s\,, & \text{je} & t - h_t = 8ms\,. \\
\text{II.} & \text{Je-li } 8ms + 2s \leqq t < 8ms + \frac{7}{2}s\,, & \text{je} & t + h_t = 8ms + 4s\,. \\
\text{III.} & \text{Je-li } 8ms + \frac{7}{2}s \leqq t < 8ms + 5s\,, & \text{je} & t + h_t = 8ms + 7s\,. \\
\text{IV.} & \text{Je-li } 8ms + 5s \leqq t < 8ms + \frac{13}{2}s\,, & \text{je} & t - h_t = 8ms\,. \\
\text{V.} & \text{Je-li } 8ms + \frac{13}{2}s \leqq t < 8ms + \frac{15}{2}s\,, & \text{je} & t + h_t = 8(m + 1)\,s + 4s\,. \\
\text{VI.} & \text{Je-li } 8ms + \frac{15}{2}s \leqq t < 8(m + 1)\,s + \frac{1}{2}s\,, & \text{je} & t - h_t = 8ms + 6s\,.
\end{array}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, d - 1)\,.$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Pro větší přehlednost si to nakresleme; římská číslice udává příslušný interval proměnné t a arabská jemu odpovídající bod $[t + h_t, y_{r,s}(t + h_t)]$ v případech II, III, V a bod $[t - h_t, y_{r,s}(t - h_t)]$ v případech I, IV, VI (obr. 2): Pak je vždy

$$0 < h_t < 8s < \frac{1}{n} \text{ a } y_{r,s}(t + h_t) - y_{r,s}(t - h_t) \geqq \frac{r}{8}\,;$$

tedy

$$\frac{p(t + h_t) + y_{r,s}(t + h_t) - p(t - h_t) - y_{r,s}(t - h_t)}{\varphi(h_t)} >$$

$$> \frac{1}{\varphi(h_t)} \left(\frac{r}{8} - 2Mh_t \right) \geqq \frac{1}{\psi(8s)} \left(\frac{r}{16} + \frac{r}{16} - 2Mh_t \right) > \frac{r}{16\psi(8s)} > n\,.$$

Tedy $p + y_{r,s}$, non $\in B_n$, q. e. d.

Věta 2. *Budiž B_2 množina všech $x \in C$ takových, že pro všechna $t \in (0, 1)$ je $x^s(t) = +\infty$, $x_s(t) = -\infty$; pak B_2 je residuel.*

Důkaz. Ve větě 1 volíme $\varphi(h) = 2h$.

Důsledek. Budiž B_3 množina všech $x \in C$ takových, že alespoň v jednom bodě z intervalu (0, 1) existuje symetrická derivace; pak B_3 je I. kategorie. Tedy pro symetrickou derivaci máme výsledek opačný než pro jednostrannou derivaci obyčejnou (viz III).

Poznámka. Právě tak jako to činí S. BANACH ve svém článku [1], lze věty obsažené v Jarníkově článku [3] a větu obsaženou v tomto článku zobecnit na jisté funkcionály.

LITERATURA

[1] *S. Banach:* Über die Bairsche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math. *III* (1931), 174–179.

[2] *S. Mazurkiewicz:* Sur les fonctions non dérivables, Studia Math. *III* (1931), 92–94.

[3] *V. Jarník:* Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen, Fundamenta Math. *XXI* (1933), 48–58.

[4] *S. Saks:* On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, Fundamenta Math. *XIX* (1932), 211–219.

Резюме

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

ВЛАДИМИР ПЕТРУВ (Vladimír Petrův), Прага

(Поступило в редакцию 16/IX 1957 г.)

Обозначим через C пространство всех функций, непрерывных на интервале $\langle 0, 1\rangle$, с обыкновенной нормой. Известно, что функции, неимеющие ни в одной точке t $(0 \leqq t < 1)$ ни конечную, ни бесконечную правостороннюю, производную, образуют только множество первой категории. Обозначим символом

$$x^s(t) = \limsup_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$$

верхнюю симметрическую производную функции x в точке t и символом

$$x_s(t) = \liminf_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$$

— нижнюю симметрическую производную функции x в точке t. Если

$$x^s(t) = x_s(t) = \alpha \quad (-\infty \leqq \alpha \leqq +\infty)\,,$$

то говорим, что в точке t существует симметрическая производная функции x и что она равняется α. Доказывается, что функции, неимеющие ни в одной точке t $(0 < t < 1)$ ни конечную, ни бесконечную симметрическую производную, образуют residuel (т. е. множество, дополнением которого является множеством первой категории). Справедлива еще более общая теорема:

Пусть $\varphi(h)$ *определено для* $h > 0$, *пусть* $\varphi(h) > 0$, *и* $\lim\limits_{h \to 0+} \varphi(h) = 0$; *тогда существует* residuel B *так, что для всякой функции* $x \in B$ *справедливо следующее: для всякого* $t \in (0, 1)$ *будет*:

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{\varphi(h)} = +\infty, \quad \liminf_{h \to 0+} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{\varphi(h)} = -\infty.$$

Zusammenfassung

ÜBER DIE SYMMETRISCHE ABLEITUNG STETIGER FUNKTIONEN

VLADIMÍR PETRŮV, Praha

(Eingelangt am 16. September 1957)

Es sei C der Raum aller im Interval $\langle 0, 1 \rangle$ stetiger reeller Funktionen x mit der üblichen Norm. Es ist bekannt, dass die Funktionen, die für kein t $(0 \leqq t < 1)$ weder eine endliche noch unendliche rechtsseitige Ableitung besitzen, nur eine Menge erster Kategorie bilden. Man bezeichne mit

$$x^s(t) = \limsup_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$$

die obere symmetrische Derivierte von x im Punkte t und mit

$$x_s(t) = \liminf_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$$

die untere symmetrische Derivierte von x im Punkte t. Wenn $x^s(t) = x_s(t) = \alpha$ $(-\infty \leqq \alpha \leqq +\infty)$ gilt, so wollen wir sagen, dass die Funktion x im Punkte t die symmetrische Ableitung α besitzt. Es wird bewiesen, dass die Funktionen, die für kein t $(0 < t < 1)$ weder eine endliche noch eine unendliche symmetrische Ableitung besitzen, eine Residualmenge bilden.

Noch allgemeiner gilt der Satz:

Es sei $\varphi(h)$ *für alle* $h > 0$ *definiert*, $\varphi(h) > 0$, $\lim\limits_{h \to 0+} \varphi(h) = 0$. *Dann gibt es im Raume* C *eine Residualmenge* B, *so, dass jede Funktion* x *aus* B *folgende Eigenschaft besitzt: Für jedes* t *aus* $(0, 1)$ *ist*

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{\varphi(h)} = +\infty, \quad \liminf_{h \to 0+} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{\varphi(h)} = -\infty.$$