Václav Alda
О собственных значениях дифференциальных уравнений $Mf = \lambda Nf$. III.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 2, 143--146

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108264`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ $Mf = \lambda Nf$, III.

ВАЦЛАВ АЛЬДА (Václav Alda), Прага

(Поступило в редакцию 2/I 1963 г.)

1. Проблема найти собственные значения краевой задачи

$$Mf = \lambda Nf, \tag{1'}$$

$$U_1 f = \ldots = 0 \tag{1''}$$

решена в работах [1], [2] Э. Камке (сравни также [3]) при условии, что M (оператор высшего порядка) является положительным. Наперекор этому в самой простой задаче

$$Mf = \lambda f$$

является как раз N положительным. Поэтому мы будем здесь заниматься случаем, когда в (1′) N положительно.

2. Мы будем предполагать, что

a) интервал, в котором ищем решение, это $\langle 0, 1 \rangle$

b) M является формально самосопряженным оператором с действительными достаточно гладкими коэффициентами порядка $2m$ и L – линейное многообразие функций, которые имеют непрерывную производную порядка $2m$ и которые удовлетворяют линейным однородным условиям

$$U_1 f = \ldots = U_{2m} f = 0 .$$

c) N является формально самосопряженным оператором с действительными непрерывными коэффициентами порядка $2n$

$$Nf = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu (q_\nu f^{(\nu)})^{(\nu)}, \quad q_n(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$

и на L выполнено $(Nf, f) \geqq k|f|^2$, $k > 0$.

d) $2m \geqq 2n + 2$.

e) К M существует обратный оператор

$$(M^{-1}f)(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где $G(.,.)$ – функция Грина.

f) $H_m, \ldots$ имеют то же значение как в [4].

3. Согласно е)

$$(M^{-1}Nf)(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu (q_\nu(\xi) f^{(\nu)}(\xi))^{(\nu)}\, d\xi .$$

Ввиду того, что G является симметрической, можем правую часть переписать в виде

$$\int_0^1 \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu (q_\nu(\xi) f^{(\nu)}(\xi))^{(\nu)}\, \overline{G(\xi, x)}\, d\xi .$$

Интегрируя теперь по частям, получим

$$(M^{-1}Nf)(x) = \int_0^1 \sum_\nu q_\nu(\xi) f^{(\nu)}(\xi) \frac{\partial^\nu \overline{G(\xi, x)}}{\partial \xi^\nu}\, d\xi + K, \tag{2}$$

где K содержит производные функции $\bar{G}$ по первой переменной до порядка $n - 1$ в точках 0 и 1.

Затем мы можем уравнение (2) дифференцировать μ раз по x и получим

$$(M^{-1}Nf)^{(\mu)}(x) = \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu(\xi) f^{(\nu)}(\xi) \frac{\partial^{\nu+\mu} \bar{G}(\xi, x)}{\partial \xi^\nu \partial x^\mu}\, d\xi + \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} K;$$

это наверное возможно, если только $\mu + \nu \leqq 2m - 1$, потому что в таком случае выступающие здесь производные функции G в областях $0 \leqq x \leqq \xi$ и $\xi \leqq x \leqq 1$ непрерывны (смотри [3, стр. 67]).

Из этого вытекает, что

$$\|M^{-1}Nf\|_\mu^2 \leqq A\|f\|_n^2, \quad \mu = 0, 1, \ldots$$

и, следовательно, $M^{-1}N$ есть ограниченный оператор из L_n в L_μ (L_k является полной оболочкой L в норме $\|.\|_k$). Для $\mu > n$ H_μ компактно погружено в H_n. Так как $L_\mu(L_n)$ является частью H_μ (H_n) и для $f \in L$ имеем $M^{-1}Nf \in L$, следует отсюда, что $M^{-1}Nf$ есть компактный оператор из L_n в L_n.

Уравнение (1′) преобразуем к виду

$$M^{-1}Nf = \mu f.$$

Оператор в левой части является в L_n компактным и симметричным; поэтому существует в L_n полная система собственных элементов.

Для собственных значений μ получаем формулу Рэлея

$$\|\mu\| = \sup \frac{(NM^{-1}Nu, u)}{(Nu, u)}. \tag{3}$$

4. Без дальнейших предположений о M нельзя формулу (3) упростить. Возьмем краевую задачу

$$L[y] = \lambda y(L[y] = -iy'),$$
$$y(0) = y(2\pi)$$

(здесь, правда, не выполнены условия из отд. 2, но для того, чтобы показать невозможность, написать собственные значения всегда в виде $|\lambda| = \inf (Mu, u)$: : (Nu, u) это достаточно).

Собственными значениями являются значения $\lambda = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Возьмем

$$R[y] = \frac{|(L[y], y)|}{\|y\|^2}, \quad y \neq 0,$$

y удовлетворяет краевым условиям.

Для $y_0 = 1$ получаем правильно $R[y_0] = 0$. Но для $y_1 = \sin x$ получаем $y_1 \perp y_0$ и $R[y_1] = 0$, что неправильно.

Литература

[1] *Kamke E.:* Definite selbstadjungierte Eigenwertaufgaben II. Math. Zeitschrift *46* (1940), 231—250.

[2] *Kamke E.:* Definite selbstadjungierte Eigenwertaufgaben III. Math. Zeitschrift *26* (1940), 251—286.

[3] *Collatz L.:* Eigenwertaufgaben .... Leipzig 1949.

[4] *Вацлав Альда:* О собственных значениях дифференциальных уравнений, II. Časopis pro pěstování matematiky *90* (1965), 134—142.

Výtah

O VLASTNÍCH HODNOTÁCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC $Mf = \lambda Nf$, III.

VÁCLAV ALDA, Praha

V práci je řešena úloha nalézt vlastní hodnoty diferenciální rovnice $Mf = \lambda Nf$ v případě, kdy je positivní operátor N nižšího řádu než operátor M. Úloha se dá převést na úlohu o vlastních hodnotách symetrického kompaktního operátoru v Hilbertově prostoru, jestliže řád dif. operátoru M je alespoň o 2 větší řádu operátoru N.

Summary

ON THE EIGENVALUES OF DIFFERENTIAL EQUATIONS $Mf = \lambda Nf$,. II.

VÁCLAV ALDA, Praha

In this article there is solved the problem of finding the eigenvalues of the differential equation $Mf = \lambda Nf$ in the case that the positive operator N has a lower order than the operator M. The problem may be reduced to the problem concerning the eigenvalues of a symetric compact operator in Hilbert space provided the order of the differential operator M exceeds the order of the operator N by 2 at least.