Nikolaj Podtjagin
O jednej triede racionálnych kriviek

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 2, 181--190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108249`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

O JEDNEJ TRIEDE RACIONÁLNYCH KRIVIEK

NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

(Došlo dne 2. března 1964)

V práci sa dokazuje, že všetky epicykloidy, hypocykloidy a ružice sú racionálne krivky pokiaľ sú uzavreté. Zároveň je uvedený spoločný vzorec pre ich stupeň.

G. LORIA v svojej práci [1] uviedol, že epicykloidy a hypocykloidy sú algebraické krivky a pre epicykloidy aj určil ich stupeň. Ovšem presný dôkaz toho chýbal. L. GRANÁT a M. FIEDLER v [2] uviedli presnú definíciu racionálnych kriviek a pre hypocykloidy aj určili ich stupeň.

Hlavným cieľom tohoto článku je uviesť presný dôkaz racionálnosti všetkých epicykloíd, hypocykloíd a tzv. ružíc a uviesť jediný vzorec pre určenie ich stupňa. Toto je možné urobiť, ak všetky tieto krivky určíme jedinou sústavou dvoch parametrických rovníc zvláštneho typu, v ktorých koeficienty majú určitý kinematický význam. Táto sústava rovníc okrem toho umožňuje zistiť niektoré dôležité vlastnosti, spoločné všetkým uvedeným krivkám. V článku sú ovšem uvedené len tie, ktoré sú potrebné k prevedeniu presného dôkazu základnej vety.

1. KRIVKY TRIEDY P

Východiskom naších úvah je nasledujúca jednoduchá úloha: Úsečka OA sa rovnomerne otáča okolo pevného bodu O. Druhá úsečka AM se rovnomerne otáča okolo pohyblivého konca A prvej úsečky. Treba určiť krivku, ktorú pri tomto zloženom pohybe opisuje koniec M úsečky AM.

Je zrejmé, že nie všetky krivky, ktoré koniec M úsečky AM opisuje, sú uzavreté. Tie, ktoré sú uzavreté, považujme za prvky istej množiny, ktorú pre stručnosť nazveme triedou P.

V ďalšom budeme písmenami a, b označovať samotné úsečky OA, AM i ich dĺžky.

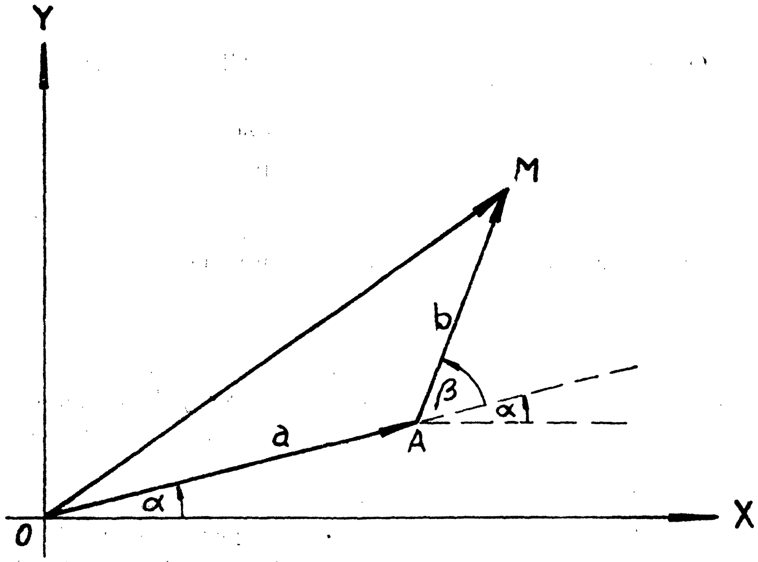
Už zo samotnej definície kriviek triedy P vyplývajú tieto ich vlastnosti:

1) pevným bodom O prechádza krivka vtedy a len vtedy, keď $a = b$,

2) vzdialenosť bodov každej krivky od pevného bodu O nie je väčšia ako $a + b$,

3) pre $a \neq b$ vzdialenosť bodov krivky od pevného bodu O nie je menšia ako $|a - b|$.

Pri určovaní rovníc kriviek triedy P postupujeme takto: Zvoľme pevný bod O za počiatok pravouhlej súradnicovej sústavy XY a predpokladajme, že v okamžiku počiatku pohybu body A a M ležali na osi X, pričom bod A sa nachádzal medzi bodmi O a M. Predpokladajme ďalej, že za istý čas t úsečka a sa pootočila o uhol α,



Obr. 1.

úsečka b sa pootočila o uhol β vzhľadom na úsečku a; vzhľadom na súradnicovú sústavu o uhol $\alpha + \beta$. Ak premietneme vektory $\overrightarrow{OA}$ a $\overrightarrow{AM}$ do súradnicových osí, dostaneme rovnice

$$x = \mathrm{a} \,.\, \cos \alpha + \mathrm{b} \,.\, \cos (\alpha + \beta)\,, \qquad (1)$$
$$y = \mathrm{a} \,.\, \sin \alpha + \mathrm{b} \,.\, \sin (\alpha + \beta)\,,$$

kde x a y sú súradnice bodu M v čase t.

Nech γ je uhlová rýchlosť otáčania úsečky a, γ' nech je uhlová rýchlosť otáčenia úsečky b, vzhľadom na úsečku a; vzhľadom na súradnicovú sústavu je $\gamma + \gamma'$. Z rovníc $\alpha = \gamma \,.\, t$, $\beta = \gamma' \,.\, t$ potom dostaneme

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\gamma}\,.$$

Ak teraz pomer uhlových rýchlostí γ'/γ označíme písmenom m, rovnice (1) môžeme písať v tvare

$$x = \mathrm{a} \,.\, \cos \alpha + \mathrm{b} \,.\, \cos (m + 1)\, \alpha\,, \qquad (2)$$
$$y = \mathrm{a} \,.\, \sin \alpha + \mathrm{b} \,.\, \sin (m + 1)\, \alpha\,.$$

Možno sa ľahko presvedčiť, že rovnice (2) určujú uzavretú krivku, určujú teda krivku triedy P vtedy a len vtedy, keď pomer m uhlových rýchlostí otáčania úsečiek b, a je vyjadrený racionálnym číslom. Položme $m = p/q$, kde p a q sú celé nesúdeliteľné čísla. Položme ďalej $\omega = \alpha/q$. Potom rovnice (2) nadobudnú tvar

(3) $$x = a \, . \cos q\omega + b \, . \cos (p + q)\, \omega \,, \quad y = a \, . \sin q\omega + b \, . \sin (p + q)\, \omega \,.$$

Pretože celé čísla p a q sú nesúdeliteľné, súradnice x a y bodov krivky P sú periodické funkcie parametra ω so spoločnou periodou 2π: pri zmene parametra ω od nuly do 2π krivka bude celá opísaná. V ďalšom budeme predpokladať, že parameter ω je nezáporný a mení sa len v intervale $[0,2\pi)$.

Pri vzájomne opačnom otáčaní sa úsečiek a, b podiel rýchlostí ich otáčania je záporný. V ďalšom pre určitosť budeme predpokladať, že číslo q je kladné. Číslo p je potom kladné, ak smery otáčania úsečiek a, b sú rovnaké, je však záporné, ak smery otáčania sa úsečiek a, b sú opačné.

Pretože krivky triedy P podľa definície, sú vytvorené otáčaním dvoch úsečiek a, b, konštanty a, b, p, q nemôžu sa rovnať nule. Rovnice (3) sú teda všeobecnými rovnicami kriviek triedy P za týchto predpokladov:

1) konštanty p, q sú celé nesúdeliteľné čísla,

2) ani jedna z konštánt a, b, p, q sa nerovná nule, pričom konštanty a, b, q sú kladné čísla.

2. ZÁKLADNÉ TYPY KRIVIEK TRIEDY P

Charakter kriviek triedy P je veľmi rozmanitý. Závisí od pomeru rýchlostí otáčania sa úsečiek a, b, i od pomeru dĺžok týchto úsečiek.

Určíme rôzne prípady, ktoré tu môžu nastať:

1° $a \neq b$, $p > 0$. Rovnice (3) v tomto prípade možno napísať v tvare

$$x = (R + r) \cos \omega' + b \, . \cos \left(\frac{R + r}{r} \, \omega' \right),$$

$$y = (R + r) \sin \omega' + b \, . \sin \left(\frac{R + r}{r} \, \omega' \right),$$

kde

$$R = \frac{a \, . \, p}{p + q}, \quad r = \frac{a \, . \, q}{p + q}, \quad \omega' = q \, . \, \omega \, .$$

To sú známe rovnice epicykloidy s pevným kruhom o polomere R a s pohyblivým kruhom o polomere r. Je to prostá epicykloida pre $a \, . \, q - b(p + q) = 0$, predĺžená pre $a \, . \, q - b(p + q) < 0$ a skrátená pre $a \, . \, q - b(p + q) > 0$.

2° a $\neq$ b, $p < 0$, $p + q > 0$. V tomto prípade rovnice (3) určujú epicykloidu so záporným polomerom pevného kruhu. Položme $p' = -p$, $q' = p + q$. Rovnice (3) potom možno písať v tvare

$$x = \mathrm{b} \,.\, \cos q'\omega + \mathrm{a} \,.\, \cos (p' + q')\,\omega\,,$$
$$y = \mathrm{b} \,.\, \sin q'\omega + \mathrm{a} \,.\, \sin (p' + q')\,\omega\,.$$

Pretože číslo p' je kladné, tieto rovnice určujú epicykloidu, ktorej polomer pevného kruhu sa rovná $R' = (\mathrm{b} \,.\, p')/(p' + q')$ a polomer pohyblivého kruhu sa rovná $r' = (\mathrm{b} \,.\, q')/(p' + q')$. Oba tieto polomery sú teraz kladné.

3° a $\neq$ b, $p + q < 0$. Rovnice (3) teraz možno písať v tvare

$$x = (R - r)\cos \omega' + \mathrm{b} \,.\, \cos \left(\frac{R - r}{r}\,\omega'\right),$$
$$y = (R - r)\sin \omega' - \mathrm{b} \,.\, \sin \left(\frac{R - r}{r}\,\omega'\right),$$

kde

$$R = \frac{\mathrm{a} \,.\, p}{p + q}\,, \quad r = -\frac{\mathrm{a} \,.\, q}{p + q}\,, \quad \omega' = q \,.\, \omega\,.$$

Vidíme, že krivka triedy P je teraz hypocykloidou, ktorej polomer pevného kruhu sa rovná R a polomer pohyblivého kruhu r. Pre $\mathrm{a} \,.\, q + \mathrm{b}(p + q) = 0$ je táto hypocykloida prostá, pre $\mathrm{a} \,.\, q + \mathrm{b}(p + q) > 0$ predĺžená a pre $\mathrm{a} \,.\, q + \mathrm{b}(p + q) < 0$ skrátená.

4° a $=$ b. Z rovníc (3) v tomto prípade dostaneme

$$x = 2\mathrm{a} \,.\, \cos \left(\frac{p}{2} + q\right)\omega \,.\, \cos \frac{p}{2}\,\omega\,, \tag{4}$$
$$y = 2\mathrm{a} \,.\, \sin \left(\frac{p}{2} + q\right)\omega \,.\, \cos \frac{p}{2}\,\omega\,.$$

Z toho

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{p}{2} + q\right)\omega\,. \tag{5}$$

Ak zavedieme polárne súradnice, potom

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi\,, \quad x^2 + y^2 = \varrho^2$$

a z rovnice (5) dostaneme

$$\omega = \frac{2}{p + 2q}(\varphi + 2k\pi), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Z rovníc (4) ďalej máme

$$\varrho^2 = 4a^2 . \cos^2 \frac{p}{2} \omega .$$

Máme teda

$$\varrho = \pm 2a . \cos \frac{p}{p + 2q}(\varphi + 2k\pi) .$$

To je však známa rovnica tzv. ružíc.

Vidíme, že ku krivkám triedy P patria všetky druhy epicykloíd, hypocykloíd a ružíc. Tvar (3) rovníc týchto kriviek, ako uvidíme ďalej, je zvlášť vhodný pre skúmanie ich vlastností. Zvláštny význam pritom má konštanta p.

3. ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI KRIVIEK TRIEDY P

Z rovníc (3) dostávame

$$\cos p\omega = \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}{2ab} . \tag{6}$$

Pre $a = b$ a $x = y = 0$ máme $\cos p\omega = -1$. Počiatok súradnicovej sústavy pre každú krivku triedy P v prípade, že $a = b$, je jej p-násobný bod, odpovedajúci hodnotám parametra

$$\omega = \frac{(2k + 1)\pi}{|p|}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, |p| - 1 .$$

Vzorec (6) pre $x^2 + y^2 = (a + b)^2$ dáva $\cos p\omega = 1$ a pre $x^2 + y^2 = (a - b)^2$ dáva $\cos p\omega = -1$. Z toho vyplýva, že každá krivka triedy P má $|p|$ bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $a + b$, ktoré odpovedajú hodnotám parametra ω určeným vzorcom

$$\omega = \frac{2k\pi}{|p|}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, |p| - 1 ,$$

a pre $a \neq b$ má $|p|$ bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $|a - b|$, ktoré sú určené vzorcom

$$\omega = \frac{(2k + 1)\pi}{p}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, |p| - 1 .$$

Ľahko sa možno presvedčiť o tom, že pre a $\neq$ b každému z týchto bodov odpovedá len jedna hodnota parametra ω. Predpokladajme opak, tj. nech napr. niektorému bodu, vzdialenému od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $|a - b|$, odpovedajú dve rôzne hodnoty parametra ω:

$$\omega_1 = \frac{(2k_1 + 1)\pi}{|p|}, \quad \omega_2 = \frac{(2k_2 + 1)\pi}{|p|}, \tag{7}$$

kde $k_1 < k_2$, $k_1 = 0, 1, 2, \ldots, |p| - 1$, $k_2 = 1, 2, 3, \ldots, |p| - 1$.

Pretože pre tieto hodnoty je $\cos p\omega = -1$ a pre túto hodnotu $\cos p\omega$ rovnice (3) nadobúdajú tvar

$$x = (a - b) \,.\, \cos q\omega\,, \quad y = (a - b) \,.\, \sin q\omega\,,$$

vidíme, že pre a $\neq$ b musia nutne platiť aj rovnosti

$$\cos q\omega_2 = \cos q\omega_1\,, \quad \sin q\omega_2 = \sin q\omega_1\,.$$

Tieto však môžu byť splnené len vtedy, keď $q\omega_2 - q\omega_1 = 2k\pi$, kde k je isté kladné celé číslo. Vzhľadom na rovnice (7) musí teda platiť

$$\frac{(2k_2 + 1) \,.\, q\pi}{|p|} - \frac{(2k_1 + 1) \,.\, q\pi}{|p|} = 2k\pi$$

alebo

$$k_2 - k_1 = \frac{k}{q}\,|p|\,.$$

Pretože celé čísla p a q nemajú spoločných deliteľov, celé číslo k musí byť deliteľné číslom q. Ak položíme $k = q \,.\, k'$, kde k' je opäť celé kladné číslo, dostaneme

$$k_2 - k_1 = k' \,.\, |p|\,.$$

Avšak celé nazáporné čísla k_1 a k_2 nie sú väčšie ako $|p| - 1$. Toto je však splnené len vtedy, keď $k' = 0$, tj. keď $k_2 = k_1$.

Tak isto by sme mohli dokázať, že každému bodu krivky triedy P, vzdialenému od počiatku súradnicovej ústavy na vzdialenosť a + b, odpovedá len jedna hodnota parametra ω.

Z rovníc (3) ďalej dostaneme

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 = a^2q^2 + b^2(p + q)^2 + 2abq(p + q) \,.\, \cos p\omega\,. \tag{8}$$

V bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť a + b, pre ktoré platí rovnosť $\cos p\omega = 1$, máme

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 = [aq + b(p + q)]^2\,.$$

Pretože každému z týchto bodov odpovedá len jediná hodnota parametra ω, vidíme, že tieto body u všetkých kriviek triedy P, s výnimkou prostých hypocykloíd, sú bodmi regulárnymi. Všetky body prostých hypocykloíd, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť a + b, sú body singulárne. Sú to body zvratu. Z rovníc (3) totiž ľahko možno určiť

$$\left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right)^2 = a^2q^4 + b^2(p+q)^4 + 2abq^2(p+q)^2 \,.\, \cos p\omega \,.$$

Pre $\cos p\omega = 1$ z toho dostávame

$$\left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right)^2 = [aq^2 + b(p+q)^2]^2 > 0 \,.$$

Pre body kriviek triedy P, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $|a - b|$, máme $\cos p\omega = -1$. Vzorec (8) pre tieto body potom dáva

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 = [aq - b(p+q)]^2 \,.$$

Pretože pre $a \neq b$ každému z týchto bodov odpovedá len jedna hodnota parametra ω, sú tieto body regulárnymi bodmi u všetkých kriviek triedy P s výnimkou ružíc a prostých epicykloíd. U ružíc týmto bodom odpovedá počiatok súradnicovej sústavy, ktorý je ich $|p|$-násobným bodom. U prostých epicykloíd sú tieto body bodmi singulárnymi. Opäť by sme sa mohli presvedčiť o tom, že sú to body zvratu.

Pre všetky body, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je menšia ako a + b, ale väčšia ako $|a - b|$, máme

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 \neq 0 \,.$$

V opačnom prípade by sme mali

$$a^2q^2 + b^2(p+q)^2 + 2abq(p+q) \,.\, \cos p\omega = 0 \,.$$

Táto rovnica zrejme nemôže byť splnená pre $p + q = 0$. Je teda ekvivalentná s rovnicou

$$\cos p\omega = -\frac{a^2q^2 + b^2(p+q)^2}{2abq(p+q)} \,.$$

Táto rovnica však môže byť splnená len pre $aq \pm b(p+q) = 0$, pretože vo všetkých ostatných prípadoch absolútna hodnota jej pravej strany je vždy väčšia ako jednotka. Vidíme, že zo všetkých kriviek triedy P singulárne body môže mať len prostá hypocykloida a prostá epicykloida. Pritom singulárnymi bodmi prostých hypocykloíd môžu byť len body vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť a + b a u prostých epicykloíd len body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $|a - b|$.

4. ZÁKLADNÁ VETA

Teraz dokážeme túto základnú vetu.

Veta: *Krivky triedy* P *sú racionálnymi krivkami, ktorých stupeň n je párne číslo, dané vzorcom*

$$n = |p| + |p + 2q| .$$

Dôkaz. Racionálnou krivkou n-tého stupňa, kde n je prirodzené číslo, nazývame množinu všetkých reálnych bodov (x, y), splňujúcich tieto dve podmienky:

a) pre skoro všetky hodnoty parametra t, patriace k určitej číselnej množine $\mathfrak{M}$, platia rovnosti

$$x = \frac{f(t)}{h(t)}, \quad y = \frac{\varphi(t)}{h(t)}, \quad h(t) \neq 0 ,$$

kde $f(t)$, $\varphi(t)$ a $h(t)$ sú polynómy najviac n-tého stupňa bez spoločných nulových bodov, z ktorých aspoň jeden je práve n-tého stupňa,

b) existuje aspoň jeden bod (x_0, y_0)

$$x_0 = \frac{f(t_0)}{h(t_0)}, \quad y_0 = \frac{\varphi(t_0)}{h(t_0)}, \quad h(t_0) \neq 0 ,$$

ktorému odpovedá len jedna hodnota $t_0 \in \mathfrak{M}$ parametra t, pre ktorú máme

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2_{t=t_0} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2_{t=t_0} \neq 0 . \tag{9}$$

Napíšeme teraz rovnice (3) v tvare

$$x = \frac{\mathrm{a}}{2}\left(e^{iq\omega} + e^{-iq\omega}\right) + \frac{\mathrm{b}}{2}\left[e^{i(p+q)\omega} + e^{-i(p+q)\omega}\right],$$

$$y = \frac{\mathrm{a}}{2i}\left(e^{iq\omega} - e^{-iq\omega}\right) + \frac{\mathrm{b}}{2i}\left[e^{i(p+q)\omega} - e^{-i(p+q)\omega}\right],$$

a položme $e^{i\omega} = t$. Tieto rovnice potom nadobudnú tvar

$$x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{a}\left(t^q + \frac{1}{t^q}\right) + \mathrm{b}\left(t^{p+q} + \frac{1}{t^{p+q}}\right)\right], \tag{10}$$

$$y = -\frac{i}{2}\left[\mathrm{a}\left(t^q - \frac{1}{t^q}\right) + \mathrm{b}\left(t^{p+q} - \frac{1}{t^{p+q}}\right)\right].$$

Ďalej máme

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\omega}\right)^2\right] = -e^{2i\omega}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\omega}\right)^2\right].$$

Z toho, čo sme povedali už skôr, teraz vyplýva, že na každej krivke triedy P vždy existuje aspoň jeden bod, ktorému odpovedá jediná hodnota parametra t_0, pre ktorú platí nerovnosť (9).

Druhá z vyššie uvedených podmienok racionálnosti kriviek je teda splnená u všetkých kriviek triedy P.

Rozoberme teraz tieto možné prípady:

1° $p > 0$. Ak napíšeme rovnice (10) v tvare

$$x = \frac{1}{2t^{p+q}} \left[a\left(t^{p+2q} + t^p\right) + b\left(t^{2(p+q)} + 1\right)\right],$$

$$y = -\frac{i}{2t^{p+q}} \left[a\left(t^{p+2q} - t^p\right) + b\left(t^{2(p+q)} - 1\right)\right],$$

vidíme, že krivky triedy P v danom prípade splňujú aj prvú z vyššie uvedených podmienok racionálnosti kriviek a pritom polynómy

$$f(t) = a\left(t^{p+q} + t^p\right) + b\left(t^{2(p+q)} + 1\right), \quad \varphi(t) = -i\left[a\left(t^{p+q} - t^p\right) + b\left(t^{2(p+q)} - 1\right)\right]$$

sú polynómy stupňa $2(p + q)$ a stupeň polynómu $h(t) = 2t^{p+q}$ je dva razy menší. Máme pri tom $h(t) \neq 0$ pre všetky hodnoty t.

To znamená, že pre $p > 0$ každá krivka triedy P je racionálna krivka stupňa $2(p + q)$. A pretože p a q sú čísla kladné, môžeme písať $2(p + q) = |p| + |p + 2q|$.

2° $p < 0$, $p + 2q \geqq 0$. Ak napíšeme rovnice (10) v tvare

$$x = \frac{1}{2t^q} \left[a\left(t^{2q} + 1\right) + b\left(t^{p+2q} + t^{-p}\right)\right], \quad y = -\frac{i}{2t^q} \left[a\left(t^{2q} - 1\right) + b\left(t^{p+2q} - t^{-p}\right)\right],$$

vidíme, že v danom prípade polynómy $f(t)$ a $\varphi(t)$ sú polynómy stupňa $2q$ a $h(t)$ je polynóm stupňa q, pritom $h(t) \neq 0$. Krivka triedy P je v tomto prípade racionálna krivka stupňa $2q$. Pretože teraz je p číslo záporné a $p + 2q$ je číslo nezáporné, máme $2q = |p| + |p + 2q|$.

3° $p + 2q < 0$. Teraz rovnice (10) napíšeme v tvare

$$x = \frac{1}{2t^{-(p+q)}} \left[a\left(t^{-p} + t^{-(p+2q)}\right) + b\left(1 + t^{-2(p+q)}\right)\right],$$

$$y = -\frac{i}{2t^{-(p+q)}} \left[a\left(t^{-p} - t^{-(p+2q)}\right) + b\left(1 - t^{-2(p+q)}\right)\right]$$

a vidíme, že v danom prípade krivka triedy P je racionálna krivka stupňa $-2(p + q)$. Avšak aj teraz máme $-2(p + q) = |p| + |p + 2q|$.

Literatúra

[1] *G. Loria:* Spezielle algebraische und transzendenten Kurven, Leipzig 1902.

[2] *L. Granát, M. Fiedler:* Racionální křivky s maximálním počtem reálných uzlových bodů, Časopis pro pěstování matematiky, 1954.

Резюме

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Николай ПОДТЯГИН (Nikolaj Podtjagin), Братислава

В статье доказывается, что целый класс алгебраических кривых, содержащий все эпициклоиды, гипоциклоиды и многолистные розы, можно определить уравнениями

$$(*) \qquad x = \mathrm{a} \cos q\omega + \mathrm{b} \cos (p + q)\,\omega\,, \quad y = \mathrm{a} \cos q\omega + \mathrm{b} \sin\,(p + q)\,\omega\,,$$

где ω – параметр, меняющийся в интервале $[0, 2\pi)$, a и b – любые положительные числа, p и q – целые числа, не имеющие общих делителей, причем число q положительно. Вид этих уравнений особенно выгоден при изучении различных общих свойств рассматриваемого класса кривых. Особенную роль при этом играет коэффициент p.

В статье доказываются некоторые из упомянутых общих свойств кривых данного класса, и доказывается теорема: кривые, определяемые уравнениями (*), суть рациональные кривые, степень которых n дана для всех формулой

$$n = |p| + |p + 2q|\,.$$

Resumé

SUR UNE CLASSE DE COURBES ALGÉBRIQUES

Nikolaj Podtjagin, Bratislava

On démontre dans cet article que la classe de courbes algébriques contenant toutes les épicycloïdes, hypocycloïdes et rosettes peut être donnée par les équations

$$(*) \qquad x = \mathrm{a} \cos q\omega + \mathrm{b} \cos (p + q)\,\omega\,, \quad y = \mathrm{a} \sin\, q\omega + \mathrm{b} \sin\,(p + q)\,\omega\,,$$

où ω figure comme paramètre variant dans l'intervalie $[0,2\pi)$, a et b sont des constantes positives arbitraires, p et q des nombres entiers n'ayant pas de communs diviseurs, q étant de plus positif. La forme de ces équations est avantageuse surtout pour l'étude des propriétés générales des courbes considérées. Un rôle prépondérant est joué par le coefficient p.

Dans l'article on montre quelques propriétés générales de ces courbes et on démontre le théorème: toute courbe définie par les équations (*) est une courbe algébrique dont l'ordre n est donné pour chacune d'elles par la formule unique

$$n = |p| + |p + 2q|\,.$$