RECENSE

I. G. Malkin: **Теория устойчивости движения.** Gos. izd. tech.-teor. lit., Moskva, 1952.

Pravděpodobně každý fysik nebo technik má jakousi intuitivní představu o tom, kdy je pohyb stabilní a kdy je nestabilní. Zkoumání stability pohybu (resp. rovnovážné polohy) zůstávalo dlouhou dobu při tomto intuitivním chápání stability. Také metody, jichž se k takovému zkoumání užívalo, byly často nerigorosní. Teprve H. Poincaré a A. M. Ljapunov v devadesátých letech minulého století formulovali jasně problém stability pohybu. A byl to především A. M. Ljapunov, který ve své klasické knize „Obščaja zadača ob ustojčivosti dviženija" podal soustavně základní definice i věty a založil tak teorii stability jako samostatnou disciplinu teorie diferenciálních rovnic.

Uveďme Ljapunovovu definici stability. Budiž dána soustava diferenciálních rovnic

$$\dot{y}_s = Y_s\,(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n)\,, \tag{1}$$

při čemž o pravých stranách předpokládáme, že jsou spojité a zaručují jednoznačnost řešení pro všechna $t \geqq t_0$ a všechna $y_1, y_2, \dots, y_n$ ležící v jisté uzavřené oblasti G; budiž $y_s = f_s(t)$ $(s = 1, 2, \dots, n)$ řešení soustavy (1) s počátečními hodnotami $y_s(t_0) = y_{s0}$, definované pro všechna $t \geqq t_0$, při čemž $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \in G$. Potom řekneme, že řešení $y(t) \equiv (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \equiv (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ je *stabilní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna řešení $x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ soustavy (1), pro něž $|x_s(t_0) - y_s(t_0)| \leqq \delta$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, je $|x_s(t) - y_s(t)| < \varepsilon$ $(s = 1, 2, \dots, n)$ pro všechna $t \geqq t_0$. Dále řekneme, že toto řešení $y(t)$ je *asymptoticky stabilní*, jestliže $\delta > 0$ lze dokonce zvolit tak, že všechna řešení $x(t)$, vycházející z δ-okolí bodu $y_0 \equiv (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$, kromě podmínky právě uvedené ještě splňují podmínku $x_s(t) \to y_s(t)$ pro $s = 1, 2, \dots, n$ a $t \to \infty$.

Uveďme hned, že vyšetřování stability nějakého partikulárního řešení $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ převádíme zpravidla na vyšetřování stability triviálního řešení $(0, 0, \dots 0)$ tím, že provedeme substituci $x_s = y_s - f_s(t)$ $(s = 1, 2, \dots, n)$. Tak dostaneme soustavu rovnic pro proměnné x_s

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n)\,, \tag{2}$$

kde $X_s(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$. Přitom předpokládáme, že soustavu (2) lze psát ve tvaru

$$\dot{x}_s = p_{s1}(t)x_1 + p_{s2}(t)x_2 + \dots + p_{sn}x_n + X'_s(t, x_1, x_2, \dots x_n)\,, \tag{3}$$

kde funkce X'_s obsahují v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ členy vyššího stupně než prvého. Jak se modifikují definice stability a asymptotické stability obecného pohybu při specialisování na vyšetřování triviálního řešení je zřejmé.

Obraťme se k obsahu Malkinovy knihy. Vedle úvodní první kapitoly se celá kniha dělí na tři velké části podle toho, co se předpokládá o pravých stranách soustavy (3). V prvé části vyšetřuje autor takové soustavy, jejichž pravé strany nezávisí explicitně na t („autonomní" nebo „stacionární" soustavy), ve druhé části vyšetřuje ty soustavy, jejichž pravé strany jsou periodickými funkcemi času (periodické soustavy) a konečně ve třetí části vyšetřuje soustavy s pravými stranami, jež jsou „obecnými" funkcemi času („neautonomní" nebo „nestacionální" soustavy). Skladba každé z těchto tří částí je opět velmi obdobná. Nejprve se vyšetří podmínky stability či nestability triviálního řešení za toho předpokladu, že pravé strany jsou funkce lineární v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (t. j. $X'_s \equiv 0$), potom se zkoumají ty soustavy, u nichž lze o stabilitě triviálního řešení rozhodnout v podstatě pouze na základě lineárních částí pravých stran a konečně se probírají ty případy, kdy rozhodující vliv na stabilitu mají členy nelineární („kritické" případy).

Přejděme nyní k podrobnějšímu rozboru obsahu knihy. V prvé kapitole uvádí Malkin základní definice stability i asymptotické stability a zmiňuje se o způsobech řešení problému stability pohybu. Autor v celé knize užívá pouze druhé Ljapunovovy metody. Připomeňme, že Ljapunov druhou metodou nazývá metodu řešení problému stability spočívající v konstrukci jisté funkce $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (nyní běžně nazývané Ljapunovovou funkcí); o stabilitě lze potom rozhodnout z vlastností vlastní funkce V a její derivace podle pole (derivací funkce V podle pole nazýváme výraz

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n\,, \qquad (3)$$

kde X_s jsou pravé strany soustavy (22)). Naproti tomu prvou metodou nazýval Ljapunov metodu tkvící ve vyšetřování explicitního vyjádření integrálů soustavy diferenciálních rovnic, na př. ve tvaru nekonečných řad v proměnných $t, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$.

Kapitola druhá, třetí a čtvrtá jsou věnovány vyšetření stacionárních soustav. V kapitole druhé nejprve autor uvádí definici funkce definitní, semidefinitní a indefinitní (pro funkci nezávisící explicitně na čase) a také jednodušší kriteria, jak se charakter jistých funkcí určí. Snad nebude na škodu, připomeneme-li definice uvedených funkcí. Říkáme, že funkce $V(x_1, x_2, \ldots, x_0)$ je *positivně* (*negativně*) *definitní*, jestliže existuje takové okolí H počátku souřadnic, že a) $V(0, 0, \ldots, 0) = 0$ a b) $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ ($V(x_1, x_2, \ldots x_n) < 0$) pro ostatní $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$. U funkce *semidefinitní* připouštíme, aby funkce $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se rovnala nule také ještě v jiných bodech kromě počátku. Funkce *indefinitní* nabývá kladných i záporných hodnot v libovolně malém okolí počátku.

Nyní již můžeme uvést pro ilustraci obsahu celé teorie klasické Ljapunovovy věty o stabilitě a nestabilitě pro autonomní soustavy.

Budiž dána soustava diferenciálních rovnic

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,, \qquad (4)$$

kde $X_s(0, 0, \ldots, 0) = 0$ *pro* $s = 1, 2, \ldots, n$. *Jestliže existuje positivně definitní funkce* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *jejíž derivace podle pole je negativně semidefinitní* (*negativně definitní*), *pak triviální řešení je stabilní* (*asymptoticky stabilní*).

Z dvou Ljapunovových vět o nestabilitě uvedu pouze druhou, neboť prvá je obsažena v Četajevově větě o nestabilitě.

Jestliže pro soustavu (4) *existuje funkce* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *taková, že její derivace podle pole má tvar*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

kde λ *je kladné číslo a* W *je negativně semidefinitní, při čemž* V *není positivně semidefinitní, pak je triviální řešení nestabilní.*

Konečně Četajevova věta o nestabilitě praví:

Jestliže pro soustavu (4) *existuje funkce* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *taková, že v libovolně malém okolí* *počátku existují body, v nichž $V > 0$ a ve všech takových bodech je také $\frac{dV}{dt} > 0$, pak je triviální řešení nestabilní.*

Užití uvedených vět je demonstrováno na několika příkladech. Autor též připojuje geometrickou interpretaci vět o stabilitě. Poznamenejme však, že tato interpretace nevystihuje úplně analytickou formulaci, neboť se při ní předpokládá, že funkce V v okolí počátku monotonně roste nebo klesá, což se při analytické definici nežádá a také ovšem nemusí být splněno, jak ukazuje třeba na příklad pro $n = 1$ funkce $V = x^2 \left(2 - \cos \frac{1}{x}\right)$.

V e t ř e t í k a p i t o l e autor nejprve vyšetřuje stabilitu nulového řešení u lineární soustavy s konstantními koeficienty (je zřejmé, že ovšem u libovolné lineární soustavy je každé řešení stabilní (nestabilní), je-li jedno řešení stabilní (nestabilní)). Jelikož při úloze konstruovat funkci V k rozhodnutí o stabilitě triviálního řešení soustavy

$$\dot{x}_s = a_{s1} x_1 + a_{s2} x_2 + \dots a_{sn} x_n + X'_s(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{5}$$

se setkáme s nutností určit formu $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ m-tého stupně tak, aby byla splněna rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} (a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \dots a_{jn} x_n) = U \text{ resp. } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} (a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n) = \lambda V,$$

kde λ je dané číslo a U je daná forma m-tého stupně, vyjasňuje autor nejdříve podmínky řešitelnosti těchto dvou úloh. Potom už může snadno vyslovit tato kriteria stability podle prvého (t. j. lineárního) přiblížení:

a) *Jestliže všechny kořeny charakteristické rovnice* (jak známo, *charakteristickou* rovnicí nazýváme rovnici $|A - \varrho E| \doteq 0$, kde $A = (a_{sj})$ je matice koeficientů a_{sj} a E je jednotková matice) *soustavy prvého přiblížení*

$$\dot{x}_s = a_{s1} x_1 + a_{s2} x_2 + \dots + a_{sn} x_n \quad (s = 1, 2, \dots, n) \tag{6}$$

mají záporné reálné části, je triviální řešení soustavy (5) *asymptoticky stabilní, ať jsou členy vyšších stupňů X'_s jakékoliv.*

b) *Jestliže alespoň jeden kořen charakteristické rovnice soustavy* (6) *má kladnou reálnou část, je triviální řešení soustavy* (5) *nestabilní, ať jsou členy vyšších stupňů X'_s jakékoliv.*

Význam i užití těchto Ljapunovových vět je opět ukázáno na několika příkladech.

V právě formulovaných Ljapunovových kriteriích se neobjevuje případ, že některé kořeny charakteristické rovnice mají jen záporné a nulové části. To proto, že v takovém případě charakter triviálního řešení soustavy lineární nikterak neurčuje charakter triviálního řešení soustavy nelineární, t. zn. na př., že triviální řešení soustavy lineární je stabilní a podle toho, jaké členy vyšších stupňů přidáme, dostaneme, že triviální řešení soustavy (5) je buď stabilní nebo nestabilní. Případy, kdy některé kořeny charakteristické rovnice prvého přiblížení mají pouze záporné a nulové reálné části, tvoří tedy kritické případy. Ty jsou předmětem č t v r t é k a p i t o l y recensované knihy. Jejich vyšetření je dost složité a autor se omezuje na případ jednoho nulového kořene a dvou kořenů ryze imaginárních (zbývající kořeny mají reálnou část zápornou). Ukazuje se, že až na některé výjimečné případy lze vyšetřování takových soustav převést na vyšetření rovnice $\dot{x} = X(x)$ v případě jednoho nulového kořenu a soustavy rovnic $\dot{x} = \lambda y + X(x, y)$, $\dot{y} = - \lambda x + Y(x, y)$ v případě dvou ryze imaginárních kořenů. Tento druhý případ je autorem probrán značně důkladně třemi různými metodami, neboť jeho řešení je úzce spjato s hledáním periodických řešení takových soustav a to je problém velmi důležitý pro technickou praxi. Tato čtvrtá kapitola je uzavřena výkladem o „bezpečných" a „nebezpečných" hranicích oblasti stability. Koeficienty soustavy diferenciálních rovnic totiž často závisí na dalších veličinách — parametrech soustavy — a pro praxi velmi důležitým úkolem je určovat tyto parametry právě tak, aby zkoumané řešení nebo dokonce nějaká celá soustava řešení byla stabilní. Oblast těch bodů v prostoru parametrů, pro něž je soustava stabilní, nazýváme *oblastí stability*. Pro praktické chování soustavy je velmi důležité nejen jak blízko je pracovní bod soustavy k hranici oblasti stability, ale i jak se chová soustava, když parametry leží na hranici oblasti. Body hranice, pro něž je soustava ještě stabilní, se ukazují být méně „nebezpečné" než body, pro něž je už soustava nestabilní.

V páté kapitole přistupuje Malkin k vyšetřování soustav, jejichž pravé strany závisí explicitně na čase. Pro takové soustavy ovšem nevystačíme s Ljapunovovými funkcemi nezávislými na čase a je proto třeba zavést některé nové definice. Říkáme, že funkce $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je *positivně (negativní) definitní*, jestliže existuje taková positivně (negativně) definitní funkce $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, že pro všechna dostatečně velká t a pro $\|x\| < h$, kde h je dostatečně malé, platí $V \geqq W (V \leqq - W)$. Funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ nazveme *semidefinitní*, jestliže pro $t \geqq T$ a pro $\|x\| < h$ nenabývá hodnot určitého znaménka. Dále řekneme, že funkce je *stejnoměrně malá*, jestliže $V \to 0$ pro $\|x\| \to 0$ stejnoměrně vzhledem k t.

Pak Malkin uvádí věty Ljapunovovy a Četajevovu o stabilitě a nestabilitě triviálního řešení soustavy

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

jež jsou zcela obdobné oněm shora uvedeným, jen s tím rozdílem, že definitnost funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ musíme nyní chápat v právě definovaném smyslu a dále pro případ asymptotické stability musíme o funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ předpokládat, že je stejnoměrně malá.

V další části kapitoly se zabývá Malkin už speciálně periodickými soustavami. Vykládá nejprve základy Floquetovy teorie lineárních periodických soustav. Podle této teorie každé řešení soustavy

$$\dot{x}_s = p_{s1}(t)\, x_1 + p_{s2}(t)\, x_2 + \ldots + p_{sn}(t)\, x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{7}$$

kde $p_{sk}(t)$ jsou periodické funkce s periodou ω, lze napsat jako lineární kombinaci n lineárně nezávislých řešení, při čemž komponenty k-tého řešení mají tvar $x_{ks} = P_{ks}(t) e^{\lambda_k t}$, kde $P_{ks}(t)$ je polynom v proměnné t s koeficienty o periodě ω a λ_k je t. zv. *charakteristický exponent*. Všechny charakteristické exponenty λ_k dostaneme z rovností $\lambda_k = \dfrac{1}{\omega} \lg \varrho_k$; ϱ_k jsou řešení charakteristické rovnice $|X(\omega) - \varrho E| = 0$, kde $X(\omega)$ je matice utvořená z hodnot funkcí x_{ks} v čase ω, při čemž funkce $x_{ks}(t)$ tvoří fundamentální soustavu řešení rovnic (7) s počátečními podmínkami $x_{ks}(0) = \delta_{ks}$ (δ je Kroneckerův symbol). Ukazuje se, že funkce $P_{ks}(t)$ shora zavedené se všechny redukují na periodické funkce, jestliže matice $X(\omega) - \varrho E$ má jednoduché elementární dělitele. Můžeme proto již snadno vyslovit větu: *triviální řešení soustavy* (7) *je asymptoticky stabilní, jestliže všechny charakteristické exponenty mají reálnou část zápornou, je nestabilní, jestliže alespoň jeden charakteristický exponent má kladnou reálnou část a je stabilní (nestabilní), jestliže vedle charakteristických exponentů se zápornou reálnou částí existují také charakteristické exponenty s nulovou reálnou částí a matice $X(\omega) - \varrho E$ má (nemá) jednoduché elementární dělitele.* Jelikož fundamentální systém řešení soustavy (7) obecně nedovedeme určit, ukazuje Malkin jak lze užít metody malého parametru k alespoň přibližnému určení charakteristických exponentů; dále podrobněji vyšetřuje rovnici $\ddot{x} + p(t)\, x = 0$, $p(t)$ periodická. Uvádí také zajímavý Ljapunovův výsledek, že každá soustava (7) s periodickými koeficienty je reducibilní. Soustavu lineárních rovnic se spojitými a omezenými koeficienty nazýváme *reducibilní*, jestliže existuje regulární lineární transformace proměnných s omezenými koeficienty a_{ik}, při čemž jsou omezené jak $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_{ik}$ tak koeficienty inversní transformace, která soustavu převádí na lineární soustavu s konstantními koeficienty.

Na základě kriterií pro stabilitu triviálního řešení soustavy (7) vyslovuje Malkin kriteria pro stabilitu triviálního řešení soustavy

$$\dot{x}_s = p_{s1}(t)\, x_1 + p_{s2}(t)\, x_2 + \ldots + p_{sn}(t)\, x_n + X'_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{8}$$

kde $p_{ik}(t)$ jsou periodické funkce, a funkce X'_s vedle $X'_s(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, spojitosti a nějakých podmínek zaručujících jednoznačnost vyhovují ještě této podmínce: Existuje oblast $t \geqq t_0$, $\|x\| < h$, v níž jsou splněny nerovnosti $|X'_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqq A\{\sum_{i=1} |x_i|\}$, kde A je jistá konstanta (nepředpokládáme však periodičnost funkcí X'_s!). V případě, že konstanta A je dostatečně malá, dá se opět dokázat, že mají-li všechny charakteristické exponenty linearisované soustavy záporné reálné části, je také triviální řešení soustavy (8) asymptoticky stabilní a má-li alespoň jeden charakteristický exponent soustavy (7) kladnou reálnou část, je také triviální řešení soustavy (8) nestabilní. Případy, kdy charakteristické exponenty řešení soustavy (7) mají pouze záporné a nulové reálné části (alespoň jeden takový) jsou kritické. Ty jsou v knize opět vyšetřovány pro případ jednoho nulového charakteristického exponentu a dvou charakteristických exponentů ryze imaginárních. Způsob řešení je velmi obdobný tomu, jakým se úloha řeší u autonomních soustav.

V poslední šesté kapitole přistupuje Malkin k vyšetření nestacionárních soustav. Zabývá se nejprve stabilitou při trvale působících poruchách. Zatím jsme uvažovali jednorázové poruchy, které způsobovaly pouze výchylku počátečních hodnot. Nyní však vedle soustavy rovnic

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

budeme uvažovat soustavu

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

(funkce X_s a R_s jsou spojité a zaručují jednoznačnost řešení obou soustav i existenci triviálního řešení (0, 0..., 0) a řekneme, že soustava (9) má stabilní triviální řešení při trvale působících poruchách R_s, jestliže k libovolně malému $\varepsilon > 0$ existují kladná čísla $\eta_1(\varepsilon)$ a $\eta_2(\varepsilon)$ tak, že všechna řešení $x(t)$ soustavy (10) vyhovující v počáteční okamžik t_0 nerovnostem $\|x(t_0)\| \leqq \eta_1$ při libovolných funkcích R_s vyhovujících v oblasti $t \geqq t_0$, $\|x\| < \varepsilon$ nerovnostem $|R_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \eta_2$, vyhovují pro všechna $t \geqq t_0$ nerovnostem $\|x\| < \varepsilon$. Vyšetření podmínek stability za trvale působících poruch R_s je pro praxi velmi užitečné, neboť při odvozování rovnic pohybu často některé síly zanedbáváme, ať už proto, že neznáme jejich přesné chování nebo proto, abychom usnadnili matematické řešení problému. Důležitý Malkinův výsledek zní: *jestliže Ljapunovova funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ sestrojená pro soustavu* (9) *zaručuje asymptotickou stabilitu triviálního řešení této soustavy a její parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial x_j}$ jsou omezené, je triviální řešení stabilní při trvale působících silách.*

Další významnou otázkou, kterou se Malkin zabývá je obrácení vět o stabilitě a nestabilitě při druhé Ljapunovově metodě. Zatím jsme uváděli věty asi tohoto charakteru: jestliže je dána soustava rovnic a existuje funkce V a ona sama a její derivace podle pole mají takové a takové vlastnosti, pak triviální řešení soustavy je stabilní, asymptoticky stabilní, resp. nestabilní. Nyní si však klademe otázku: jestliže triviální řešení je stabilní resp. nestabilní, kdy existuje Ljapunovova funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, která nám dovolí o stabilitě rozhodnout? V recensované knize jsou uvedeny nejdůležitější výsledky v té době známé, t. j. že Ljapunovovu větu o stabilitě pro stacionární případ nelze obrátit a Ljapunovovu větu o asymptotické stabilitě lze obrátit pro lineární nestacionární soustavu (Malkin a PERSIDSKIJ) a pro obecnou stacionární a periodickou soustavu (MASSERA). Od té doby byl celý komplex těchto otázek podroben dalšímu rozboru a byla dokázána možnost obrácení Četajevovy a druhé Ljapunovovy věty o nestabilitě (VRKOČ, KRASOVSKIJ) a za velmi obecných předpokladů i Ljapunovovy věty o asymptotické stabilitě pro obecné nestacionární soustavy (Malkin). (Podrobnosti viz v referátu o přednášce s. dr J. KURZWEILA o obrácení Ljapunovových vět v předcházejícím čísle Časopisu, str. 359–361 a v chystaném článku s. dr J. Kurzweila).

Z předcházejícího je snad jasné, jaký význam mají kořeny charakteristické rovnice u lineárních autonomních soustav a charakteristické exponenty u lineárních periodických soustav pro posouzení stability triviálního řešení. U obecných neautonomních soustav nahrazuje tyto veličiny pojem *charakteristického čísla* zavedený Ljapunovem. Jako charakteristické číslo nějaké funkce $f(t)$ definujeme číslo $-\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{\lg |f(t)|}{t}$; jako charakteristické číslo jistého řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soustavy

$$\dot{x}_s = q_{s1}(t)\, x_1 + q_{s2}(t) x_2 + \ldots + q_{sn}(t)\, x_n \tag{11}$$

pak definujeme $-\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \lg \sum\limits_{i=1}^{u} |x_i|$. Systém n fundamentálních řešení soustavy (11) nazveme *normální*, jestliže charakteristická čísla řešení nabývají maximálních možných hodnot. U autonomních resp. periodických soustav se n charakteristických čísel normálního systému řešení rovná záporně vzatým kořenům charakteristické rovnice resp. záporně vzatým charakteristickým exponentům. Součet všech n charakteristických čísel normálního systému řešení se může nanejvýš rovnat číslu $\exp \int\limits_0^t \sum\limits_{s=1}^{n} q_{ss}(\tau)\, d\tau$. Jestliže se tato dvě čísla sobě vskutku rovnají a jestliže se charakteristické číslo funkce $\exp \int\limits_0^t \sum\limits_{s=1}^{n} q_{ss}(\tau)\, d\tau$ rovná záporně vzatému charakteristickému číslu funkce $\exp[-\int\limits_0^t \sum\limits_{s=1}^{n} q_{ss}(\tau)\, d\tau]$, říkáme, že soustava (11) je *regulární*. Již Ljapunov ukázal (jeho příklad Malkin také uvádí), že existují neregulární soustavy. Dá se však snadno dokázat, že každá reducibilní soustava je regulární. Poněvadž regulární soustavy hrají významnou úlohu při vyšetřování stability pohybu, je důležité umět určit již z koeficientů soustavy rovnic, zda soustava je regulární. Užitečnou větou v tomto směru je věta Ljapunovova udávající podmínku nutnou a postačující pro regularitu soustavy s trojúhelníkovou maticí. Věta Perronova udávající podmínku nutnou a postačující pro regularitu soustavy se čtvercovou maticí má spíše teoretickou cenu.

Několik paragrafů věnuje Malkin vyšetření pojmu stability charakteristického čísla. Říkáme, že charakteristická čísla $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$ soustavy (11) jsou stabilní, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze určit $\delta > 0$ tak, že charakteristická čísla $\lambda'_1 \leqq \lambda'_2 \leqq \ldots \leqq \lambda'_n$ normálního systému řešení rovnic

$$\dot{x}_s = (p_{s1}(t) + \varphi_{s1}(t))\, x_1 + \ldots + (p_{sn}(t) + \varphi_{sn}(t))\, x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

kde $|\varphi_{jk}(t)| < \delta$, vyhovují nerovnostem $|\lambda_i - \lambda'_i| < \varepsilon$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Skutečnost, že neregulární soustavy mohou mít nestabilní charakteristická čísla je dávno známa (PERRON). Teprve nedávno však VINOGRAD (Prikl. mat. mech. *17* (1953), str. 645–650) konstruoval regulární soustavu, jejíž charakteristická čísla jsou nestabilní. V Malkinově knize jsou uvedeny některé věty jednak udávající postačující podmínky pro stabilitu charakteristických čísel jednak dovolující odhadnout velikost charakteristických čísel dané soustavy.

Úloha rozhodnout o stabilitě nebo asymptotické stabilitě triviálního řešení soustavy

$$\dot{x}_s = q_{s1}(t)\, x_1 + q_{s2}(t)\, x_2 + \ldots + q_{sn}(t)\, x_n + X'_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{12}$$

na základě chování řešení soustavy (11) je v případě obecné neautonomní soustavy dost obtížná. Je totiž známo, že jsou-li $q_{ik}(t)$ obecnými funkcemi času, není asymptotická stabilita triviálního řešení soustavy (11) ani postačující ani nutná k tomu, aby triviální řešení soustavy (12) bylo stabilní. Je-li však soustava (11) regulární, pak lze už dokázat Ljapunovovu větu velmi obdobnou té, o níž jsme se již zmínili u periodických soustav, totiž: *je-li soustava* (11) *regulární a všechna charakteristická čísla jejího normálního systému řešení jsou kladná, pak triviální řešení soustavy* (12) *je asymptoticky stabilní při libovolné volbě funkcí X_s vyhovujících nerovnostem*

$$|X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| < A\, \{ \sum_{i=1}^{n} |x_i| \}^m, \quad A > 0, m > 1\,. \tag{13}$$

Podmínku regularity soustavy (11) lze sice vypustit, avšak pak musíme žádat, aby pro soustavu (11) existovala Ljapunovova funkce zaručující asymptotickou stabilitu, a aby funkce X'_s vyhovovaly nerovnosti (13) pro $m = 1$ a A dostatečně malé. Tato kriteria se navzájem úplně nepřekrývají.

Teorii kritických případů probírá Malkin v této kapitole pro některé speciální soustavy. Věc je dost složitá a výsledky nelze stručně popsat.

Celá Malkinova kniha je psána velmi jasně a srozumitelně. Zvláště prvé čtyři kapitoly jsou psány tak, aby jim mohl porozumět i inženýr bez hlubších matematických znalostí. Tyto kapitoly jsou také opatřeny mnoha osvětlujícími příklady matematického i technického charakteru.

Tiskových chyb je poměrně málo a pozorný čtenář si je snadno opraví. Větší věcná chyba se autoru vloudila do textu myslím jen na jednom místě. Na str. 94_{12} totiž tvrdí, že funkce (30.19) je definitně záporná, což není správné. Tvrzení se však stane správným, jestliže vynecháme člen xQ_1, který tam nemá ve skutečnosti být, poněvadž se můžeme snadno přesvědčit, že výraz xP_1 v (30.11) je identicky roven nule.

Malkinova kniha zaujímá nyní jistě prvé místo ve světové knižní literatuře o teorii stability. Ljapunovova kniha „Obščaja zadača ob ustojčivosti dviženija", která po prvé vyšla před šedesáti lety je psána nepřístupněji a pochopitelně také neobsahuje mnoho nových výsledků od té doby dosažených. DUBOŠIN si v knize „Osnovy teorii ustojčivosti dviženija" (1952) klade jen omezený úkol, aby podal přístupný úvod ke zmíněnému klasickému dílu Ljapunovovu. Četajevova kniha „Ustojčivost dviženija" (1946) je daleko menšího rozsahu. BELLMANOVA kniha „Stability theory of differential equations" (1953) se zabývá klasickou teorií stability v Ljapunovově smyslu vlastně velmi málo. Malkinova kniha tedy celkem jako jediná dává čtenáři jasný a úplný obraz o současném stavu teorie stability (s výjimkou snad jedině vyšetřování stability některých speciálních soustav vyskytujících se v teorii automatického regulování; tato vyšetřování jsou alespoň částečně zachycena v LURJEHO knize „Nekotoryje nelinejnyje zadači avtomatičeskogo regulirovanija"). Lze tedy recensovanou knihu čtenáři co nejupřímněji doporučit ke studiu.

O. Vejvoda, Praha

O. Borůvka: **Úvod do theorie grup**, 2. rozšířené vydání, Přírodovědecké vydavatelství, 1952, stran 156.

Důvodem k napsání této recense byla skutečnost, že tato kniha nalezla velmi příznivou odezvu ve světové literatuře, kde o ní v minulém roce 1954 vyšly dvě recense, a to jedna stručnější v *Mathematical Reviews*, Vol. 15 (1954), No 1, str. 7 z péra C. LOEWNERA

(Stanford, California), druhá pak velmi podrobná v *Zentralblatt für Math.*, 49. B. (1954), str. 11—12 od H. SCHWERDTFEGRA, zatím co v domácí literatuře nebylo o knize nikde referováno. Chci proto čtenáře tohoto Časopisu seznámiti s obsahem a hlavními charakteristickými rysy této knihy.

Jak už z názvu knihy vyplývá, nejde o vyčerpávající učebnici o grupách, nýbrž o dílo, v němž autor osvětluje a rozebírá základní pojmy, na nichž je theorie grup vybudována.

Kniha se skládá ze tří oddílů, z nichž první jedná o množinách, druhý o grupoidech, třetí o grupách.

Oddíl I. V kap. 1 jsou vyloženy základní poznatky o množinách. V kap. 2 zavádí autor pojem rozkladu $\bar{A}$ v množině G, jímž rozumí neprázdný systém neprázdných podmnožin v množině G, z nichž každé dvě jsou disjunktní, a pojem rozkladu na množině (jestliže systém podmnožin splňuje kromě hořejších vlastností podmínku, že každý prvek množiny je obsažen v některé podmnožině). Tyto dva pojmy se ukazují velmi užitečné hlavně v oddílech II a III, kde se pomocí nich zobecňují některé známé vlastnosti grup. V tomto směru je důležitý také pojem obalu podmnožiny B v rozkladu $\bar{A}$ (je to množina všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které jsou incidentní s podmnožinou B; označení $B \sqsubset \bar{A}$) a dále pojem průseku podmnožiny B s rozkladem $\bar{A}$ (což je množina neprázdných průniků jednotlivých prvků rozkladu $\bar{A}$ s podmnožinou B; označení $B \sqcap \bar{A}$). Dále je to pojem řetězce v rozkladu, zákryt rozkladu $\bar{A}$ a zjemnění rozkladu $\bar{A}$. Mezi společnými zákryty (zjemněními) rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$ existuje zákryt nejmenší $[\bar{A}, \bar{B}]$ a největší zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$. Konečně se zavádí pojem doplňkových rozkladů (jestliže každý prvek jednoho rozkladu je incidentní se všemi prvky rozkladu druhého, které s ním leží v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$).

V kap. 3 se mluví o zobrazeních do množiny a na množinu (neboli o pojmu funkce na množině do množiny, příp. na množinu). Ukazuje se, že každé zobrazení $\mathbf{g}$ množiny G na G^* definuje jistý rozklad na G, rozklad $\bar{G}$ příslušný k zobrazení $\mathbf{g}$. Autor si dále všímá zobrazení rozkladů. Dokazuje větu, že zobrazení $\mathbf{g}\bar{A}$ rozkladu $\bar{A}$ množiny G na množinu G^* je rozkladem $\bar{G}$ na G, když a jen když $\bar{A}$, $\bar{G}$ jsou doplňkové (při čemž $\bar{G}$ je rozklad příslušný k zobrazení $\mathbf{g}$). Zobecněným zobrazením množiny G do G^* rozumí autor takový vztah mezi prvky obou množin, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen nejméně jeden prvek množiny G^* (t. j. mnohoznačná funkce na G do G^*). Jestliže zobecněné zobrazení $\mathbf{g}$ množiny G na sebe je reflexivní a transitivní, nazývá se kongruence na množině. Symetrická kongruence, t. j. kongruence, pro níž ze vztahu $a \in \mathbf{g}b$ plyne vždy $b \in \mathbf{g}a$, je tedy ekvivalencí, neboť jde o relaci reflexivní, transitivní a symetrickou. Jestliže kongruence na množině splňuje zákon antisymetrie, t. j. plyne-li ze vztahů $a \in \mathbf{g}b$, $b \in \mathbf{g}a$ vždy $a = b$, dostaneme antisymetrickou kongruenci. Antisymetrická kongruence na G určuje v G částečné uspořádání, při čemž $a \leq b$ značí totéž, co $b \in \mathbf{g}a$. Je-li na G definována antisym. kongruence $\mathbf{g}$, pak ke každé uspořádané dvojici prvků a, b z G (vzhledem ke kongruenci $\mathbf{g}$) existuje nejvýš jeden prvek c, pro nějž platí: 1. $a \leq c$, $b \leq c$; 2. je-li v G prvek x takový, že $a \leq x$, $b \leq x$, pak je $c \leq x$. Prvek c se pak nazývá horní hranice prvků a, b a značí se $a \smile b$. Analogicky se definuje dolní hranice prvků a, b a značí se $a \frown b$.

V kap. 4 aplikují se některé z uvedených pojmů na theorii permutací konečné množiny.

II. oddíl, který je z větší části původní, začíná kap. 5 jednající o násobení v množině G, t. j. o pravidlu, jímž je ke každé uspořádané dvojici prvků a, $b \in G$ jednoznačně přiřazen opět nějaký prvek $c \in G$. V kap. 6 se definuje grupoid $\mathfrak{G}$ jakožto neprázdná množina G spolu s nějakým násobením $\boldsymbol{M}$ v množině G. Množina G se nazývá pole grupoidu. Grupoid v tomto smyslu po prvé definovali O. ORE a B. A. HAUSSMANN (*Theory of Quasigroups*, *Amer. J.* 49, 1937), třebaže v jiném smyslu používá slova grupoid H. BRANDT už v r. 1926, t. zv. *grupoid Brandtův*. Autor uvedl po prvé do české literatury tento pojem v r. 1939 ve své práci *Theorie grupoidů I*, Spisy přír. f. Brno, č. 275. Dále zavádí autor pojem podgrupoidu, nadgrupoidu a ideálu A (pro nějž platí $AG \subset A$, anebo $GA \subset A$), pojem součinu uspořádané skupiny n prvků a všímá si jejich vlastností.

V kap. 7 jedná se o homomorfním zobrazení neboli deformaci grupoidů, o jejich isomorfismu a automorfismu.

Kap. 8 je zcela originální. Jedná o vytvořujících rozkladech v G a na G, t. j. o rozkladu $\bar{A}$, jehož uspořádané dvojice prvků $\bar{a}$, $\bar{b}$ mají vlastnost, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, kde $\bar{c}$ je další prvek rozkladu $\bar{A}$. Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ je grupoid, jehož polem je množina prvků vytvořujícího rozkladu $\bar{A}$ a jehož násobení je definováno $\bar{a} \,.\, \bar{b} = \bar{c}$, kde $\bar{c}$ je onen prvek z rozkladu $\bar{A}$, pro nějž platí $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Autorovi přísluší priorita v zavedení tohoto pojmu (srv. jeho práci *Über Ketten von Faktoroiden* v *Math. Ann.*, T. 118, 1942, S. 41 ff.; srv. také Dubreil, *Algèbre I*, Paris 1946, p. 81). K faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$ a k podgrupoidu $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ se druží pojem obalu podgrupoidu $\mathfrak{B}$ ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ a dále pojem průseku faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$. K tomu přistupuje pojem zákrytu a zjemnění faktoroidů a pojem doplňkových faktoroidů (jsou-li doplňková jejich pole).

V kap. 9 vrcholí úvahy o grupoidech třemi větami o isomorfismu grupoidů a úvahami o deformaci faktoroidů.

V kap. 10, jíž končí II. oddíl, jsou shrnuty vlastnosti speciálních druhů grupoidů, zvl. grupoidů asociativních neboli pologrup, quasigrup a grupoidů s jednotkou. Kapitola končí krátkým výkladem o svazech. Autor definuje svaz jako dvojici soumístných, t. j. na témže poli definovaných grupoidů, jejichž násobení splňují zákon komutativní, asociativní, idempotenci a absorptivnost. Snadno se ukáže, že z této definice vyplývá možnost částečného uspořádání pole G dvěma vhodnými způsoby (t. zv. horní a dolní část. uspořádání svazu).

Oddíl III systematicky probírá vlastnosti grup, pokud vyplývají z analogických úvah o grupoidech.

Po 11. kap., v níž jsou shrnuty základní vlastnosti grup, mluví se v kap. 12 o rozkladech grup vytvořených podgrupami. Rozklad grupy $\mathfrak{G}$ v levé třídy vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ se značí $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, zatím co symbol $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ značí rozklad v pravé třídy. Ukazuje se, že se zde celkem bez obtíží účinně uplatňují pojmy nejmenšího společného zákrytu dvou levých (pravých) rozkladů. Při tom se pro vzájemně zaměnitelné podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}$ dokazuje věta: $[\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}] = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Podobně o největším společném zjemnění dvou levých rozkladů platí $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}) = \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$. Dále se ukazuje, že pro vzájemně zaměnitelné podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou příslušné levé (pravé) rozklady grupy doplňkové. Zajímavý je také výsledek týkající se obalu podgrupy $\mathfrak{C}$ zaměnitelné s podgrupou $\mathfrak{A}$, kde $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$. Platí totiž vztah $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\, \mathfrak{A}/_l\mathfrak{A}$. Analogický výsledek platí o průseku: $\mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_l (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$.

Kap. 13 pojednává o invariantních podgrupách. Ukazuje se, že množina invariantních podgrup vzhledem k násobením $\smile$ a $\frown$ definovaným vztahy $\mathfrak{A} \smile \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ tvoří modulární svaz. O vytvořujících rozkladech na grupě platí věta, že všechny vytvořující rozklady grupy jsou právě jenom rozklady vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami.

Kap. 14 je věnována faktorovým grupám (neboli grupám tříd, podle před. vydání), které jsou speciálním případem faktoroidu, je-li totiž jeho polem vytvořující rozklad na $\mathfrak{G}$. Ukazuje se, že o faktorových grupách platí analogické věty jako o faktoroidech, zvl. pokud jde o jejich obal, průsek, zákryt a zjemnění.

Kap. 15 je v převážné části analogií kap. 9 z oddílu II. Navíc se v ní probírá pojem translace grupy, věta Cayleyova a realisace abstraktních grup.

Kniha končí kap. 16 o cyklických grupách.

Do knihy je zařazeno množství vhodných příkladů, mezi něž byly pojaty některé speciální věty (na př. o centru grupoidu a grupy, o hlavním rozkladu grupy, o normalisátoru grupy, o grupě diedrické, oktaedrické, a j.).

Předností Borůvkovy knihy jest především její přesnost po stránce obsahové, a po stránce výrazové jasnost, jazyková vytříbenost a stručnost, která není nikde na újmu srozumitelnosti. Také originální pojetí knihy ukazuje se velmi výhodné. Odkrývá nové souvislosti mezi jinak dosti odlehlými obory matematiky jako je theorie množin a theorie grup. V takovém pojetí, jak autor dochází k pojmu grupy, jeví se zavedené pojmy a úvahy nenásilné, přirozeně vyplývají z povahy věci a probíhají stupňovitě od jednodušších úvah o množinách a grupoidech k složitějším úvahám o grupách. Lze proto Borůvkovu knížku považovat za zdařilou a originální matematickou monografii, obohacující v mnohém směru naši moderní matematickou literaturu, která v posledních letech zaznamenává silný vzestup i na poli vysokoškolských učebnic.

Ani výprava knihy nezůstala pozadu za jejími zmíněnými přednostmi. Tisk je jasný a výrazný, vhodně rozlišený. Zvláště pečlivě je provedena sazba obtížných matematických symbolů. *Josef Škrášek*, Brno.

M. Promberger: **Použití matic a tensorů v theoretické elektrotechnice.** Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1955, 166 stran, 51 obrázků. Cena váz. Kčs 25,70.

Tato kniha je určena technikům, pracujícím v oboru elektrických obvodů a zejména v oboru točivých strojů a pole. Autor podává tu základy theorie matic a tensorů jen velmi stručnou formou a soustřeďuje se hlavně na elektrotechnické aplikace výsledků. Celá kniha je psána přístupně a též nároky na znalosti čtenáře jsou minimální.

Stručná forma je však na některých místech na závadu, neboť nejsou vyznačovány věty a definice, takže nezasvěcenému čtenáři nebude všude zřejmé, co je úmluvou a co důsledkem. Tak ku příkladu na str. 23 je zaveden součet dvou matic takto: „Z nezávislosti jednotlivých prvků matice plyne přímo pravidlo pro sčítání matic" a následuje obvyklý vzorec.

Dílo je rozvrženo do čtyřech částí: prvá je věnována maticím, druhá lineárním elektrickým zapojením, třetí vektorům a tensorům, čtvrtá elektromagnetickému poli.

V první části jsou zavedeny matice a algebraické operace s nimi. Poté je přihlédnuto ke zvláštním druhům matic a maticovým polynomům, přičemž jsou odvozeny rovnosti Hamilton-Cayleyova a Sylvestrova.

Ve druhé části jsou probírány základní pojmy z lineárních elektrických obvodů, je řešena otázka o počtu úplných stromů sítě a bez důkazu jsou uvedena Kirchhoffova kombinační pravidla. Dále je sledováno řešení obvodů pomocí matic, zejména metoda uzlových potenciálů, a použití matic v theorii čtyřpólu. Poté je probrán maticový výpočet přechodových stavů v elektrických obvodech.

V další kapitole zabývá se autor theorií elektrických točivých strojů. Ukazuje, kterak je možno pomocí matic snadno vyjádřit závislosti mezi jednotlivými veličinami stroje.

Úvodem třetí části knihy zavádí autor pojem tensoru pomocí matice a odvozuje základní pravidla pro počítání s nimi. Největší pozornost je věnována tensorům třetího stupně. Závěrem třetí části jsou pak probírány základy tensorové analysy.

V poslední, čtvrté části díla, je sledováno nejprve maticové vyjádření vztahů mezi veličinami elektrostatického a magnetostatického pole, poté pole proměnného s časem a konečně čtyřrozměrné vyjádření elektromagnetického pole. Závěrem je pak vyšetřována elektrodynamika pohybujících se těles a jsou uvedeny četné příklady.

Kniha je doplněna bohatým odkazem na literaturu.

Možno říci, že kniha bude vítanou učebnicí pro techniky. Matematik nalezne v ní obšírné pole námětů pro aplikaci. *V. Doležal*, Praha.