Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE TRIGONOMETRICKÝCH FUNKCÍ

OTOMAR HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 12. ledna 1955.)

V článku jsou podána všechna řešení (holomorfní v okolí počátku) rovnic (2) a (6); rovnice (2) pro $a = b = 1$ a rovnice (6) pro $a = -b = 1$ přecházejí v známé adiční formule pro funkce $\sin x$, $\cos x$.

I.

Hledejme funkce $F, G, H,$ holomorfní v počátku a vyhovující v okolí počátku rovnici

$$F(x + y) = a \,.\, G(x) \,.\, H(y) \tag{1}$$

(a je daná konstanta). Její řešení nazveme *exponenciálním řešením*. Předpokládejme $a \neq 0$. Zřejmě $G(0) = 0 \Rightarrow F \equiv 0 \Leftarrow H(0) = 0$, načež jedna z G, H je identicky 0 a druhá je libovolná. Pro $G(0) \,.\, H(0) \neq 0$ plyne z (1) $F(x) = a \,.\, G(0) \,.\, H(x) = a \,.\, H(0) \,.\, G(x)$, dále

$$k \,.\, F(x + y) = k \,.\, F(x) \,.\, k \,.\, F(y)$$

($k = (a \,.\, G(0) \,.\, H(0))^{-1}$), se známým řešením $F(x) = a \,.\, G(0) \,.\, H(0) \,.\, e^{\beta x}$. Řešení (1) jsou tedy:

pro $a \neq 0$

$$F(x) = a\alpha\gamma e^{\beta x}\,, \quad G(x) = \alpha e^{\beta x}\,, \quad H(x) = \gamma e^{\beta x}$$

(α, β, γ libovolné konstanty),

$$F = G = 0,\ H \text{ libovolná}\,,$$
$$F = H = 0,\ G \text{ libovolná}\,;$$

pro $a = 0$

$$F = 0, \quad G, H \text{ libovolné}\,.$$

II.

Hledejme funkce F, G, holomorfní v počátku a vyhovující v okolí počátku rovnici

$$F(x + y) = a \,.\, F(x) \,.\, G(y) + b \,.\, F(y) \,.\, G(x) \tag{2}$$

(a, b jsou dané konstanty). Rovnici (2) nazveme *sinus-rovnicí*. Všimněme si, že přechází opět v sinus-rovnici s týmiž konstantami při transformaci

$$f(x) = e^{cx} \,.\, F(x)\,, \quad g(x) = e^{cx} \,.\, G(x)\,. \tag{*}$$

Předpokládejme $F \not\equiv 0$. Případ $a \,.\, b = 0$ vede na exponenciální řešení. Ukažme, že pro $a \,.\, b \neq 0$ se stačí omezit na případ $a = b = 1$. Především

$$F(x + y) = a_1 \,.\, F(x) \,.\, G_1(y) + F(y) \,.\, G_1(x) \tag{3}$$

s $G_1 = b \,.\, G$, $a_1 = \frac{a}{b}$; nyní $a_1 \neq 1$ implikuje ($F(x + y) = F(y + x)$ do (3))

$$F(x) \,.\, G_1(y) = F(y) \,.\, G_1(x)\,;$$

dosazením do (3) máme rovnici typu (1) s exponenciálním řešením. Dále tedy řešíme rovnici

$$F(x + y) = F(x) \,.\, G(y) + F(y) \,.\, G(x)\,. \tag{4}$$

Také $F(0) \neq 0$ vede na exponenciální řešení: z (4) plyne $G(x) = \frac{1 - G(0)}{F(0)} F(x)$. Ukažme, že za předpokladů $F(0) = F'(0) = 0$ má (4) jen řešení $F \equiv 0$. Nechť $F(x) = \Sigma_0^\infty a_n x^n$, $G(x) = \Sigma_0^\infty b_n x^n$. Z (4) plyne pro každé m, n

$$\binom{n+m}{n} a_{n+m} = a_n \,.\, b_m + a_m \,.\, b_n\,. \tag{5}$$

Dokažme $a_{kn} = A_{k,n} \,.\, a_n$ indukcí podle k. Pro $k = 1$ je to zřejmé; položme v (5) $m = kn$; pak

$$a_{(k+1)n} = \frac{a_n \,.\, b_{kn} + a_{kn} \,.\, b_n}{\binom{(k+1)\,n}{n}} = \frac{b_{kn} + A_{k,n} \,.\, b_n}{\binom{(k+1)\,n}{n}} \,.\, a_n = A_{k+1,n} \,.\, a_n\,.$$

Odtud plyne $a_n = 0 \Rightarrow a_{kn} = 0$ pro každé k; zejména $a_1 = 0 \Rightarrow F \equiv 0$, cbd. Předpokládejme tedy $F(0) = 0 \neq F'(0) = a_1$. Případným užitím transformace (*) s $c = -\frac{F''(0)}{2F'(0)}$ dosáhneme toho, aby $F''(0) = 0 = a_2$. Z (4) plyne $G(0) = 1$, a

$$G(x) = \left(\frac{F(x+y) - F(x)}{y} - F(x) \,.\, \frac{G(y) - 1}{y}\right) : \frac{F(y)}{y}\,,$$

kdykoliv $F(y) \neq 0 \neq y$; ježto $F'(0) \neq 0$, máme limitním přechodem

$$G(x) = \frac{1}{a_1} (F'(x) - F(x) \,.\, G'(0))\,.$$

Pak $G'(0) = a_1^{-1}(F''(0) - a_1 G'(0)) = -G'(0)$, tedy $G'(0) = 0$, t. j., $G(x) = a_1^{-1} F'(x)$. Dosazením do (4): $F(x + y) = a_1^{-1}(F(x) \,.\, F'(y) + F(y) \,.\, F'(x))$. Pro každé m, n pak

$$\binom{n+m}{n} a_1 a_{n+m} = (n + 1)\, a_{n+1} a_m + (m + 1)\, a_{m+1} a_n\,.$$

Volbou $m = 2$ máme $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)\, a_1 a_{n+2} = 3 a_3 a_n$, t. j.

$$a_{2n} = 0\,, \quad a_{2n+1} = k \,.\, \frac{p^{2n+1}}{(2n + 1)!}\,, \quad (n \geqq 1)\,.$$

(4) má tedy řešení $F(x) = \alpha \,.\, \sin \beta x$, $G(x) = \cos \beta x$ v případě $a_3 \neq 0$, a $F(x) = \alpha x$, $G(x) = 1$ v případě $a_3 = 0$. Řešení rovnice (2) dostaneme tedy užitím zpětné transformace (*) a násobkem. Jsou to tato řešení:

$$F = 0, \ G \text{ libovolné}\,;$$

pro $a + b \neq 0$

$$F(x) = \alpha e^{\beta x}\,, \quad G(x) = \frac{1}{a + b}\, e^{\beta x}\,;$$

pro $a = b \neq 0$

$$F(x) = \alpha e^{\beta x} \sin \gamma x\,, \quad G(x) = \frac{1}{a}\, e^{\beta x} \cos \gamma x\,,$$

$$F(x) = \alpha e^{\beta x} x\,, \quad G(x) = \frac{1}{a}\, e^{\beta x}\,;$$

(α, β, γ jsou libovolné konstanty).

III.

Hledejme funkce F, G, holomorfní v počátku, vyhovující v okolí počátku rovnici

$$F(x + y) = a \,.\, F(x) \,.\, F(y) + b \,.\, G(x) \,.\, G(y) \tag{6}$$

(a, b jsou dané konstanty). (6) nazveme *kosinus-rovnicí*. Všimněme si, že transformací (*) přejde opět v kosinus-rovnici s týmiž konstantami. Případ $a \,.\, b = 0$ vede na exponenciální řešení; nechť tedy $a \,.\, b \neq 0$. Zřejmě stačí předpokládat $a = -b = 1$ ($F_1 = aF$, $G_1 = \mathrm{i}\sqrt{ab} \,.\, G$), takže řešíme rovnici

$$F(x + y) = F(x) \,.\, F(y) - G(x) \,.\, G(y)\,. \tag{7}$$

Pro $G \equiv 0$ má (7) jen exponenciální řešení; pro konstantní F je také G konstantní. Z (7) plyne

$$F(x) \,.\, (1 - F(0)) = - G(x) \,.\, G(0)\,. \tag{8}$$

Kdyby $F(0) \neq 1$, pak $G(0) = 0$ implikuje $F \equiv 0$ a $G(0) \neq 0$ znamená jen exponenciální řešení. Všechny tyto případy z dalšího vyloučíme. Případným užitím transformace (*) s $c = - F'(0)$ lze dosáhnout toho, aby $F'(0) = 0$. Z (8) pak plyne $G(0) = 0$ (neboť předpokládáme $F(0) = 1$, $G \not\equiv 0$). Platí

$$\frac{F(x + y) - F(x)}{y} = F(x) \,.\, \frac{F(y) - 1}{y} - G(x) \,.\, \frac{G(y)}{y}\,.$$

pro $y \neq 0$; limitním přechodem máme $F'(x) = - G(x) . G'(0)$, tedy $G'(0) \neq 0$ (ježto F není konstanta), tedy

$$F'(x) = \frac{1}{s} G(x), \quad \text{kde} \quad s = - \frac{1}{G'(0)} . \tag{9}$$

Zejména $F'(x + y) = \frac{1}{s} . G(x + y)$; (7) derivujeme podle x a srovnáme:

$$G(x + y) = G(x) . F(y) - s . G'(x) . G(y) . \tag{10}$$

Ze symetrie pak plyne

$$G(x) . (F(y) + s . G'(y)) = G(y) . (F(x) + s . G'(x)) . \tag{11}$$

Nyní buď je $G'(x) = - \frac{1}{s} F(x)$ identicky, a (10) je pak sinus-rovnice $G(x + y) = G(x) . F(y) + G(y) . F(x)$ s řešením $G(x) = e^{\varrho x} \sin \tau x$, $F(x) = e^{\varrho x} . \cos \tau x$ (neboť $G(0) = 0$, a platí (7)). Anebo existuje y tak, že $F(y) + s . G'(y) \neq 0$, a pak z (11) plyne $G(x) = k . (F(x) + s . G'(x))$. Užitím (9)

$$s . F'(x) = k . (F(x) + s^2 . F''(x)) , \tag{12}$$

takže F splňuje lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty. Může mít dvojí řešení; užitím počátečních podmínek $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$ a (9) dostáváme

$$F(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}) , \quad G(x) = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})^{1)}$$

pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (a tyto funkce vyhovují (7)), anebo

$$F(x) = (1 - \lambda x) e^{\lambda x} , \quad G(x) = \pm \lambda x e^{\lambda x}$$

(a tyto funkce vyhovují (7)). Obecná řešení rovnice (2) dostaneme tedy užitím zpětné transformace (*) a násobkem. Jsou to tato řešení:

$$F = 0 , \quad G = 0 ;$$

pro $a . b \neq 0$

$$F(x) = \frac{1}{a(\beta - \alpha)} (\beta e^{(\alpha + \gamma)x} - \alpha e^{(\beta + \gamma)x}) ,$$

$$G(x) = i \sqrt{\frac{\alpha\beta}{ab}} . \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{(\alpha + \gamma)x} - e^{(\beta + \gamma)x}) ;^{2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{a} (1 - \alpha x) e^{\beta x} , \quad G(x) = \frac{i\alpha}{\sqrt{ab}} . x e^{\beta x} ;$$

F konstantní, $\quad G = \sqrt{\frac{F}{b} (1 - aF)}$;

---

[1]) Zde i dále vyhovují obě hodnoty odmocniny.

[2]) V tomto řešení je obsaženo též řešení $F(x) = e^{\varrho x} . \cos \tau x$, $G(x) = e^{\varrho x} . \sin \tau x$ pro $\beta = - \alpha = i\tau$, $\gamma = \varrho$.

pro $a = 0 \neq b$

$$F(x) = b\alpha^2 e^{\beta x}\,, \quad G(x) = \alpha e^{\beta x}\,;$$

pro $a \neq 0 = b$

$$F(x) = \frac{1}{a}\, e^{\beta x}\,, \ G \text{ libovolné}\,;$$

pro $a = 0 = b$

$$F = 0\,, \ G \text{ libovolné}\,;$$

(α, β, γ jsou libovolné konstanty — v prvém řešení $\alpha \neq \beta$).

(Viz též výtah tohoto článku v časopise Чехослов. матем. журнал, *5* (80), 1955, 432—434.)