Časopis pro pěstování matematiky

Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 2, 233--234

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108202`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

ÚLOHY A PROBLÉMY

3. Nech je dané kladné číslo A a číslo α, $0 < \alpha < 1$. Rozhodníte, či platia pre každé $x \in (0; 1\rangle$ nerovnosti

$$\frac{A}{2(1+n)^{1+\alpha}} < x + K - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2(n+1)}$$

pre nekonečne mnoho n, kde $K = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right]$ je celá časť z $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}\right)$.

Ivan Singer, Praha

4. Nech pre k prirodzené značí E_k k-rozmerný eukleidovský priestor, L_k k-rozmernú (vonkajšiu) Lebesgueovu mieru. Nech sú k, n prirodzené čísla, $k \leqq n$. Nech $\mathbf{A}$ je systém k-rozmerných lineárnych podpriestorov E_n. Pre $A \subset E_n$ položme

$$\delta_k(A) = \sup_{B \in \mathbf{A}} L_k(A \cap B)\,.$$

Nech je $\mathbf{B}$ systém všetkých gúľ, $\mathbf{C}$ systém všetkých kvádrov v E_n. Pre $A \subset E_n$, $\varepsilon > 0$ položme ďalej

$$F_k(A, \varepsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta_1(A_i)^k\,, \quad G_k(A, \varepsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta_1(B_i)^k\,,$$

$$H_k(A, \varepsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta_k(A_i)\,, \quad K_k(A, \varepsilon) = \inf \sum_{i=i}^{\infty} \delta_k(B_i)\,,$$

kde infimum počítame cez všetky $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$, $A_i \in \mathbf{B}$, $\delta_1(A_i) < \varepsilon$, resp. všetky $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset A$, $B_i \in \mathbf{C}$, $\delta_1(B_i) < \varepsilon$. Napokon

$$F_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} F_k(A, \varepsilon)\,, \quad G_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} G_k(A, \varepsilon)\,,$$

$$H_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} H_k(A, \varepsilon)\,, \quad K_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} K_k(A, \varepsilon)\,.$$

Rozhodnite, či platí $F_k = G_k$, $H_k = K_k$.

Poznámka. Položme $V_k = \delta_k(K)$, kde K je guľa o priemere 1. Je známe, že $V_k F_k = H_k$ (*Hausdorff*: Dimension und ausseres Mass, Math. Ann. *79*, 157—179). Rovnako je známe, že $H_k(A) = K_k(A)$ pri niektoré merateľné množiny (*Kolmogorov*: Beiträge zur Masstheorie. Math. Ann. *107*, 351—366).

Beloslav Riečan, Bratislava

5. Do daného trojúhelníka umístěte tři shodné kruhy, které se nepřekrývají a které mají maximální obsah.

Josef Holubář, Praha

Řešení úlohy č. 4 (autor *J. Sedláček*) z č. 4, roč. 85 (1960). Zobrazení f^k je skutečně identické, jak plyne z této úvahy:

K zobrazení f existuje zřejmě inversní zobrazení φ definované tak, že buď $\varphi(x) = 2x$, nebo $\varphi(x) = 2n + 1 - 2x$, podle toho, která z těchto hodnot je menší nebo rovna n a tedy patří do množiny N. (Je to zřejmě vždy právě jedna.) Dokážeme nyní indukcí, že složené zobrazení $\varphi^r(x)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\varphi^r(x) = |2^r x - p(2n + 1)|\,, \tag{1}$$

kde p je celé číslo. První indukční krok jsme již provedli, neboť pro $r = 1$ lze zobrazení φ^r psát v tomto tvaru, kde p je buď 0, nebo 1. Nechť

$$\varphi^{r-1}(x) = |2^{r-1}x - p(2n + 1)|\,.$$

Nyní buď

$$\varphi^r(x) = 2\varphi^{r-1}(x) = |2^r x - 2p(2n + 1)|\,,$$

nebo

$$\varphi^r(x) = 2n + 1 - 2\varphi^{r-1}(x) = 2n + 1 - |2^r x - 2p(2n + 1)| = \alpha\,.$$

Je-li $2^r x - 2p(2n + 1) \geqq 0$, pak $\alpha = (2p + 1)(2n + 1) - 2^r x$, je-li $2^r x - 2p(2n + 1) < 0$, pak $\alpha = 2^r x - (2p - 1)(2n + 1)$. Je-li p celé číslo, jsou i $2p$, $2p - 1$, $2p + 1$ celá čísla. Tím je indukce provedena.

Snadno nahlédneme, že číslo p ve vyjádření (1) je určeno jednoznačně. Nechť nyní pro nějaké k platí $f^k(1) = 1$, tedy i $\varphi^k(1) = 1$. Znamená to, že existuje p tak, že $|2^k - p(2n + 1)| = 1$. Znásobme tuto rovnost libovolným číslem x z množiny N; dostáváme $|2^k x - px(2n + 1)| = x$. Protože $x \leqq n$, je výraz na levé straně menší nebo roven n. Je-li p celé číslo, je i px celé číslo. Je tedy výraz na levé straně roven $\varphi^k(x)$ a platí $\varphi^k(x) = x$ pro každé $x \in N$. Je tedy zobrazení φ^k identické a zobrazení k němu inversní f^k je také identické. Tím je problém rozřešen.

Bohdan Zelinka, Liberec

Poznámka redakce. Jiné řešení téže úlohy podal *Bohuslav Míšek*, Honice.