Časopis pro pěstování matematiky

Karel Drbohlav

Poznámka k teorii Riemannova integrálu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 23--26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108188

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K THEORII RIEMANNOVA INTEGRÁLU

KAREL DRBOHLAV, Praha
DT:517.65

(Došlo dne 12. června 1956)

V článku je dokázán vzorec $\int\limits_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t$ za předpokladu, že funkce Φ má v každém bodě intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ nezápornou derivaci a že existuje Riemannův integrál $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi'(x)\,\mathrm{d}x$. Předpoklad existence tohoto integrálu nelze nahradit předpokladem omezenosti funkce Φ'.

Budiž f libovolná omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li D libovolné dělení tohoto intervalu určené dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, pak označme symbolem $S(f, D)$ příslušný horní součet a symbolem $s(f, D)$ příslušný dolní součet. Jak známo, je Riemannův horní integrál $\overline{\int\limits_a^b} f$ definován jako infimum množiny všech horních součtů funkce f. Podobně je definován Riemannův dolní integrál $\underline{\int\limits_a^b} f$ a platí $\overline{\int\limits_a^b}(-f) = -\underline{\int\limits_a^b} f$.

Věta 1. *Budiž f omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, φ nezáporná funkce v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ s Riemannovým integrálem $\int\limits_\alpha^\beta \varphi = b - a$. Definujme funkce Φ, g předpisem $\Phi(t) = a + \int\limits_\alpha^t \varphi$, $g(t) = f[\Phi(t)]\,\varphi(t)$. Potom platí*

$$\overline{\int\limits_a^b} f = \overline{\int\limits_\alpha^\beta} g\,. \tag{1}$$

Důkaz. Budiž D libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, a budiž M_i supremum funkce f v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Ze spojitosti funkce Φ a ze vztahů $\Phi(\alpha) = a$, $\Phi(\beta) = b$ vyplývá, že existují body $t_i \in \langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že platí $\Phi(t_i) = x_i$, $t_0 = \alpha$, $t_n = \beta$. Pro $t \in \langle t_{i-1}, t_i\rangle$ jest $\Phi(t) \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a tedy $g(t) \leq M_i\varphi(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Odtud plyne $\overline{\int\limits_\alpha^\beta} g = \sum\limits_{i=1}^n \overline{\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}} g \leq \sum\limits_{i=1}^n M_i \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi = \sum\limits_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, D)$ a tedy

$$\overline{\int\limits_\alpha^\beta} g \leq \overline{\int\limits_a^b} f\,. \tag{2}$$

Vezměme nyní libovolné dělení D_0 intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ a zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Označme písmenem M supremum funkce $|f|$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Z existence $\int_\alpha^\beta \varphi$ plyne, že je možno najít takové dělení D_1 intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, pro které $M[S(\varphi, D_1) - s(\varphi, D_1)] \leqq \varepsilon$. Budiž $D_2 = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ společné zjemnění obou dělení D_0, D_1 a označme symbolem μ_i (resp. ν_i) supremum (resp. infimum) funkce φ v intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$. Budiž ještě $x_i = \Phi(t_i)$, M_i supremum funkce f v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $\eta = \varepsilon(b - a)^{-1}$. Zřejmě existují čísla ξ_i taková, že $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$, $f(\xi_i) \geqq M_i - \eta$; dále existují čísla τ_i taková, že $t_{i-1} \leqq \tau_i \leqq t_i$, $\Phi(\tau_i) = \xi_i$. Protože $x_i - x_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi = \varrho_i(t_i - t_{i-1})$, kde $\nu_i \leqq \varrho_i \leqq \mu_i$, platí

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{i=1}^{n} f[\Phi(\tau_i)]\, \varphi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| = \\
&= |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\varphi(\tau_i) - \varrho_i](t_i - t_{i-1})| \leqq \sum_{i=1}^{n} M(\mu_i - \nu_i)(t_i - t_{i-1}) = \\
&= M[S(\varphi, D_2) - s(\varphi, D_2)] \leqq M[S(\varphi, D_1) - s(\varphi, D_1)] \leqq \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Odtud plyne $S(g, D_0) \geqq S(g, D_2) \geqq \sum_{i=1}^{n} f[\Phi(\tau_i)]\, \varphi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \geqq$

$$
\geqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon \geqq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \eta(b - a) - \varepsilon \geqq \overline{\int_a^b} f - 2\varepsilon,
$$

takže $\overline{\int_\alpha^\beta} g \geqq \overline{\int_a^b} f - 2\varepsilon$. Ježto ε bylo libovolné, platí

$$
\overline{\int_\alpha^\beta} g \geqq \overline{\int_a^b} f . \tag{3}
$$

Vzorec (1) plyne srovnáním (2) a (3).

Věta 2. *Budiž f omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, φ nekladná funkce v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ s Riemannovým integrálem $\int_\alpha^\beta \varphi = a - b$. Definujme funkce Φ, g předpisem $\Phi(t) = b + \int_\alpha^t \varphi$, $g(t) = f[\Phi(t)] \cdot |\varphi|$. Potom platí vztah* (1).

Důkaz. Definujme funkce ψ, Ψ předpisem $\psi = -\varphi$, $\Psi(t) = a + \int_\alpha^t \psi$. Platí $\Psi(t) + \Phi(t) = a + b$. Ze zřejmého vztahu $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(a + b - x)\,\mathrm{d}x$ plyne podle věty 1 $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_\alpha^\beta} f[a + b - \Psi]\,\psi = \overline{\int_\alpha^\beta} f[\Phi]|\varphi| = \overline{\int_\alpha^\beta} g$.

Poznámka 1. Klademe-li ve vztahu (1) funkci $-f$ místo f, dostaneme za předpokladů věty 1 nebo věty 2 rovnost

$$
\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_\alpha^\beta} g . \tag{4}
$$

Jestliže tedy jeden z integrálů $\int_a^b f$, $\int_\alpha^\beta g$ existuje, existuje i druhý a oba jsou si rovny.

Poznámka 2. Má-li funkce Φ v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ nezápornou derivaci a existuje-li $\int_\alpha^\beta \Phi'$ jakožto Riemannův integrál, potom podle věty 1 platí

$$\overline{\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)}} F(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

pro libovolnou omezenou funkci F v intervalu $\langle\Phi(\alpha), \Phi(\beta)\rangle$. Analogický vzorec dostaneme z věty 2 pro případ $\Phi' \leqq 0$.

Poznámka 3. Ukážeme ještě, že předpoklad existence integrálu $\int_\alpha^\beta \Phi'$ v poznámce 2 nelze nahradit požadavkem omezenosti funkce Φ'. Jsou známy příklady funkcí f s omezenou derivací v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ takových, že neexistuje Riemannův integrál $\int_\alpha^\beta f'$. Na př. v [1], str. 143—144, cvičení 18, je taková funkce f sestrojena; při tom je $\langle\alpha, \beta\rangle = \langle 0, 1\rangle$, $|f'| < 2$. Platí tedy alespoň jeden ze vztahů a) $\overline{\int_0^1} f' \neq f(1) - f(0)$, b) $\underline{\int_0^1} f' \neq f(1) - f(0)$. V případě a) položme $\Phi(x) = 2x + f(x)$, v případě b) $\Phi(x) = 2x - f(x)$. Jest vždy $0 < \Phi' < 4$, při čemž platí $\overline{\int_0^1} \Phi' \neq \Phi(1) - \Phi(0)$, jak je možno dokázati jednoduchým výpočtem. Položíme-li ještě $F = 1$, vidíme, že vzorec (5) v našem případě neplatí.

LITERATURA

[1] *Jan Mařík:* Základy theorie integrálu v Euklidových prostorech, Časopis pro pěstování matematiky, *77* (1952), 125—145.

Резюме

ЗАМЕТКА К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

КАРЕЛ ДРБОГЛАВ (Karel Drbohlav), Прага

(Поступило в редакцию 12/VI 1956 г.)

Пусть $\varphi(t) \geqq 0$ для всех $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Если существует интеграл Римана $\int_\alpha^\beta \varphi$, то

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_\alpha^\beta} f[a + \int_\alpha^t \varphi]\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_\alpha^\beta} f[a + \int_\alpha^t \varphi]\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

где a — любое число, $b = a + \int_\alpha^\beta \varphi$ и f — произвольная ограниченная в $\langle a, b\rangle$ функция (Теорема 1). Для случая $\varphi(t) \leqq 0$ нетрудно доказать видоизменение этой теоремы (Теорема 2). Далее, имеет место, напр., следующая формула:

$$\overline{\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)}} F(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_\alpha^\beta} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

где $\Phi'(t) \geqq 0$ для всех $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, F — произвольная ограниченная в $\langle\Phi(\alpha), \Phi(\beta)\rangle$ функция, при условии, что существует интеграл Римана $\int_\alpha^\beta \Phi'$. Это условие нельзя заменить условием ограниченности функции Φ'.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZUR THEORIE DES RIEMANNSCHEN INTEGRALS

KAREL DRBOHLAV, Praha

(Eingelangt am 12. Juni 1956)

Sei $\varphi(t) \geqq 0$ für alle $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Existiert das Riemannsche Integral $\int_\alpha^\beta \varphi$, dann gilt

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_\alpha^\beta} f[a + \int_\alpha^t \varphi]\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_\alpha^\beta} f[a + \int_\alpha^t \varphi]\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

wo a eine beliebige Zahl bedeutet, $b = a + \int_\alpha^\beta \varphi$ gesetzt wird und f eine beliebige, in $\langle a, b\rangle$ beschränkte Funktion ist (Satz 1). Für den Fall $\varphi(t) \leqq 0$ lässt sich eine leichte Modifikation beweisen (Satz 2). Ferner gilt z. B. die Formel

$$\overline{\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)}} F(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_\alpha^\beta} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

wo $\Phi'(t) \geqq 0$ für alle $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ ist, F eine beliebige, in $\langle\Phi(\alpha), \Phi(\beta)\rangle$ beschränkte Funktion bedeutet, vorausgesetzt, dass das Riemannsche Integral $\int_\alpha^\beta \Phi'$ existiert. Diese Bedingung kann nicht durch die Beschränktheit der Funktion Φ' ersetzt werden.