Jiří Barot

Poznámka o inversních prvcích v topologických okruzích

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 2, 241--243

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108173`

Geometrické místo všech takto přiřaděných bodů je složeno v případě

sub 1. *ze dvou přímek, jejichž póly představují společnou družinu dvou involucí na přímce* O_1O_2, *a to involuce* (O_1, O_2) *a involuce harmonických pólů kuželosečky* k,[5])

sub 2. *z přímky* t *a z poláry bodu* P, *který na přímce* t *tvoří s bodem* T *dvojici harmonických pólů kuželosečky* k,

sub 3. *z přímky* o *a z jednoduché kuželosečky* m, *pro kterou bod* O *a přímka* o *představují pól a poláru a která se ve svých průsečících s polárou bodu* O *pro* k *dotýká tečen kuželosečky* k, *sestrojených v průsečících přímky* o *s* k.

POZNÁMKA O INVERSNÍCH PRVCÍCH V TOPOLOGICKÝCH OKRUZÍCH

JIŘÍ BAROT, Brno.

(Došlo dne 11. listopadu 1954.) DT:519.48

I. M. GELFAND[1]) dokázal řadu vět o inversních prvcích v normovaných okruzích. Účelem této poznámky je důkaz jedné věty pro okruhy topologické.

Buď R okruh, který je současně L^*-prostorem;[2]) předpokládejme, že jsou splněny tyto axiomy:

$$x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y,\ x_n - y_n \to x - y,\ x_n z \to xz,\ zx_n \to zx\,.$$

Pak R nazveme topologickým okruhem.

Věta. *Buď* R *topologický okruh s jednotkou* e; *buď* $0 \neq x \in R$ *prvek, pro který existuje prvek* $z \in R$ *tak, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} x^\nu = z$.[3])

---

[5]) Z této části poučky lze odvoditi jednoduchou úvahou poučku, kterou uvádí kniha *Kadeřávek-Klíma-Kounovský*: „*Deskriptivní geometrie*" (II. díl) a která zní takto:

„*Kuželosečky, dvakrát se dotýkající dané kuželosečky* (*námi nazvané dvojstyčné*) *a procházející dvěma danými body, jsou rozloženy do dvou soustav, dotýkajících se dané kuželosečky vždy v bodech téže kvadratické involuce. Středy těchto involucí jsou samodružné body involuce, určené průsečíky spojnice daných bodů s danou kuželosečkou a oběma danými body.*"

Středy uvedených kvadratických involucí jsou zřejmě totožné s našimi body P_1, P_2, jejichž poláry pro k tvoří geometrické místo pólů spojnic dotykových bodů jednotlivých dvojstyčných kuželoseček.

Citovaná poučka je v uvedené knize dokázána syntheticky za pomoci rotačních ploch 2. stupně, tedy jiným postupem, než jsme zvolili v tomto článku.

---

[1]) *I. M. Gelfand*, Normierte Ringe, Matematičeskij sbornik T 9.

[2]) Definice okruhu: *B. L. van der Waerden*, Moderne algebra; definice prostoru L^*: *Kuratowski*, Topologie I, (1948), str. 83.

[3]) Pro $x \neq 0$ klademe $x^0 = e$.

Tvrzení. K prvku $x^* = e - x$ existuje prvek inversní.

Důkaz. Označme $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu$. Platí pak $x^n = s_n - s_{n-1} \to z - z = 0$, takže $s_n x^* = (e + x + \ldots + x^n)(e - x) = e + x + \ldots + x^n - x - x^2 - \ldots - x^{n+1} = e - x^{n+1} \to e$. Protože zároveň $s_n x^* \to z x^*$, máme $e = z x^*$, takže z je zleva inversní prvek k x^*. Zcela analogicky dokážeme, že z je zprava inversní prvek k x^*. Odtud plyne, že z je (jediný) prvek inversní k x^*.

Důsledek 1. *Buď R normovaný okruh s jednotkou e, buď $0 \neq x \in R$ prvek, pro nějž $\|x\| < 1$. Pak k prvku $x^* = e - x$ existuje prvek inversní.*

Vskutku, R je topologický okruh ve smyslu definice. Dále je

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\| \sum_{\nu=n+1}^{n+p} x^\nu \right\| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \|x\|^\nu \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \|x\|^\nu = \frac{\|x\|^{n+1}}{1 - \|x\|},$$

takže posloupnost $\{s_n\}$ je cauchyovská a tedy konvergentní. Existuje proto $\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu$. Tvrzení nyní plyne z dokázané věty.

Prvek x v okruhu se nazývá nilponentní, existuje-li přirozené číslo p tak, že $x^p = 0$.

Důsledek 2. *Buď R okruh s jednotkou e, buď $0 \neq x \in R$ jeho nilpotentní prvek. Pak k prvku $x^* = e - x$ existuje prvek inversní.*

Vskutku, definujeme-li pro libovolnou dvojici prvků $x, y \in R$ vzdálenost $\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ když } x = y \\ 1, \text{ když } x \neq y \end{cases}$; pak R je topologický okruh. Platí $\lim_{n\to 0} \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{p-1} x^\nu$, značí-li p nejmenší přirozené číslo, pro které je $x^p = 0$. Tvrzení zase plyne z dokázané věty.

Aplikace 1. Buď **M** množina všech čtvercových matic řádu n v tělese komplexních čísel. Při obvyklé definici součtu a součinu dvou matic je **M** zřejmě okruh. Podle důsledku 2 dostáváme tento výsledek: Je-li $A \in$ **M** nilpotentní matice, pak k matici $E - A$ existuje matice inversní.

Aplikace 2. Nechť značí P prostor typu F,[4]) který však není typu B.[5]) Množina všech jeho lineárních zobrazení do sebe tvoří okruh, definujeme-li $(U + V)(x) = U(x) + V(x)$, $(UV)(x) = U[V(x)]$, pro každé $x \in P$. Definujme pro posloupnost lineárních zobrazení $\{U_n\}$ a pro lineární zobrazení U: $U_n \to U$, když $U_n(x) \to U(x)$ pro každé $x \in P$. Systém všech lineárních zobrazení prostoru P do sebe tvoří pak topologický okruh, v němž je identické zobrazení E jednotkou.

---

[4]) *S. Banach*, Theorie des opérations linéaires, Warszawa 1932. Zde čtenář najde definici pojmů: prostor typu F, prostor typu B, lineární zobrazení.

[5]) Takové jsou na př. prostory (s), (S); *Banach*, l. c., str. 9, 10.

Z věty pak plyne:

Buď $0 \neq A$ *lineární zobrazení prostoru* P *do sebe, pro něž existuje lineární zobrazení* S *tak, že* $\sum_{\nu=0}^{n} A^\nu \to S$. *Pak zobrazení* $E - A$ *má lineární zobrazení inversní.*

GRAFICKÉ ŘEŠENÍ JEDNÉ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Pan *Karel Mišoň*, Most, zaslal redakci tuto poznámku o grafickém řešení rovnice

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = c\,,$$

kde a, b, c jsou předem daná čísla a φ je neznámá; předpokládá se ovšem, že nejsou obě čísla a, b zároveň rovna nule.

Zvolíme v rovině pravoúhlý souřadnicový systém s osami x, y a s počátkem O. Sestrojíme body $A = [0, b]$, $B = [a, 0]$, přímku $x = a - c$ (označme ji p) a kružnici k o středu B, procházející bodem A. Je-li $c^2 < a^2 + b^2$, protne přímka p kružnici k ve dvou (různých) bodech P, Q. Řešením naší rovnice jsou pak orientované úhly ABP a ABQ. Je-li $c^2 = a^2 + b^2$, kořeny splývají. Je-li $c^2 > a^2 + b^2$, rovnice nemá řešení; přímka kružnici neprotne.

Zdůvodnění konstrukce lze snadno provést otočením trojúhelníka OBA kolem bodu B tak, aby bod A splynul s některým z bodů P, Q.