

Ladislav Rieger

O jedné základní větě matematické logiky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 2, 217--231

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108164>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1955

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O JEDNÉ ZÁKLADNÍ VĚTĚ MATEMATICKÉ LOGIKY

LADISLAV RIEGER, Praha.

(Došlo dne 26. července 1954.)

DT: 517.11

V práci je především novým, poměrně jednoduchým způsobem dokázána hlavní věta o t. zv. zobecněných Booleových σ -algebrách. Tato věta je algebraickým jádrem známé Lindenbaumovy věty z oblasti matematické logiky. Dále je ukázáno, že věty Gödelova (o úplnosti nižšího predikátového počtu) a Löwenheim-Skolemova jsou důsledkem hlavní věty. Autor se též zmiňuje o možné souvislosti mezi Lindenbaumovou algebrou, Cantorovým diskontinuem a jistým problémem theorie pravděpodobnosti. V závěru jsou srovnány různé dosud známé metody důkazu Gödelovy věty a ostatních zmíněných vět.

1. Úvodní poznámka

Za jednu ze základních vět (klasické) matematické logiky je třeba považovat tuto t. zv. LINDENBAUMOVU větu:¹⁾

Každá bezesporná teorie,²⁾ vyjadřitelná v symbolech nižšího predikátového počtu, dá se rozšířit v t. zv. úplnou bezespornou teorii, t. j. takovou, že každá její věta mající smysl je buďto dokazatelnou poučkou teorie, nebo je dokazatelnou poučkou teorie její opak.

Z této věty totiž snadno plyne na př. GÖDELOVA věta o úplnosti nižšího predikátového počtu a SKOLEMOVA-LOWENHEIMOVA věta o existenci početného modelu každé elementární (t. j. v symbolech nižšího predikátového počtu vyjadřitelné) bezesporné teorie — a to v nejobecnějším znění.

Za matematické jádro Lindenbaumovy věty je třeba považovat jistou jednoduše znějící poučku z teorie Booleových algeber, kterou v dalším sformulujeme a dokážeme. Obecně matematická důležitost takto formulované Lindenbaumovy poučky je zdůrazněna m. j. i tím, že z ní lze poměrně snadno odvodit obě základní věty z teorie početně aditivních Booleových algeber (σ -algeber), totiž:

¹⁾ Viz na př. práce A. TARSKI [1] a [2]. — ALFRED LINDENBAUM byl mladý nadaný polský matematik a logik, zavražděný nacisty za okupace Polska.

²⁾ Pojem „teorie“ bude definován níže.

1. t. zv. LOOMISOVU větu o tom, že každá σ -algebra je homomorfním obrazem množinového σ -tělesa, a

2. větu o volnosti σ -tělesa borelovských množin CANTOROVA diskontinua.³⁾

[Booleova σ -algebra se nazývá volnou, lze-li ji vytvořit z takové množiny jejích prvků, že platí: Každé zobrazení množiny těchto prvků (t. zv. volných generátorů) do libovolné σ -algebry se dá rozšířit v homomorfní zobrazení (celé této t. zv. volné σ -algebry do dané σ -algebry.)]

Tím spíše, že v monografiích a učebnicích matematické logiky bývá LINDENBAUMOVA věta jakož i GÖDELOVA věta o úplnosti nižšího predikátového počtu dokazována s nepodstatnými (nealgebraickými) komplikacemi, danými symbolikou predikátového počtu⁴⁾ a zbytečnou komplikovaností několika-násobné indukce, nebude snad na škodu podat v této práci poměrně stručný algebraický důkaz. Je třeba ovšem říci, že základní myšlenka induktivní konstrukce v důkazu užitá není zcela nová. Její kořeny sahají do metody důkazů t. zv. ε -teoremů HILBERTOVY teorie důkazů;⁵⁾ mnohem později se tato myšlenka objevuje v důkazu Gödelovy věty od L. HENKINA [6].

Budu v dalším užívat označení a pojmů, běžných v teorii svazů, resp. Booleových algeber. K tomu viz na př. kap. X monografie G. BIRKHOFF, *Lattice Theory* (2. vyd.), po př. v ruském překladu (*Теория структур*, zkr. [St]).

Definice 1. Říkáme, že Booleova algebra A je Φ -algebra (to jest zobecněná σ -algebra vzhledem k rodině Φ posloupností prvků, pro něž jsou definována suprema a infima), jestliže je dána rodina Φ posloupností prvků z A o těchto čtyřech vlastnostech:

(i) (*Pravidlo doplňků*):

Když $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak i $\{a'_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$.

(ii) (*Pravidlo sjednocení*):

Když $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak i $\{a \cup a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ pro každý prvek $a \in A$.

(iii) (*Pravidlo triviálních posloupností*):

Každá posloupnost, jejíž členové od jistého počínajíc jsou stále stejní, patří do Φ .

(iv) (*Pravidlo suprema*): Je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak existuje prvek $\bar{a} = \sup_{k=1,2,\dots} a_k \in$

A ve smyslu polouspořádání algebry A . Píšeme $\bar{a} = \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důsledky definice 1: Je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak existuje ve Φ -algebře A

prvek $\underline{a} = \inf_{k=1,2,\dots} a_k$. — Píšeme $\underline{a} = \bigcap_{k=1}^{\infty} a_k$.

³⁾ Tuto větu dokázal autor v práci [3]. Jiný důkaz podal nedávno LOOMIS.

⁴⁾ Tak na př. v nedávné monografii [4] zaujímá důkaz Lindenbaumovy věty a Gödelovy věty o úplnosti plných 15 stránek.

⁵⁾ Srov. HILBERT-BERNAYS [5], II. díl.

Důkaz plyne z (i) a (iv) a z t. zv. *Morganových identit*

$$(\sup_{k=1,2,\dots} a_k)' = \inf_{k=1,2,\dots} a'_k, \quad (\inf_{k=1,2,\dots} a_k)' = \sup_{k=1,2,\dots} a'_k,$$

které platí vždy, jakmile jedna strana má smysl (viz [St]).

Je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak $\{a \cap a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ pro každé pevné $a \in A$. — Důkaz plyne z předchozího a z (i) a (ii).

Obecné distributivní identity: Platí vždy

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (a \cup a_k) = a \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k \right) —$$

a duálně, jakmile jen aspoň jedna strana má smysl. — Důkaz viz [St], X, § 10.

Právě uvedených vět budeme v dalším užívat bez citace.

Zřejmě každá σ -algebra je i Φ -algebrou vzhledem k rodině Φ všech posloupností prvků algebry vůbec. Méně triviálním příkladem Φ -algebry je těleso všech borelovských množin, patřících do tříd konečných indexů libovolného topologického prostoru; zde Φ je rodina všech posloupností množin s ohraničenými indexy tříd (v jedné posloupnosti). V matematické logice je základní důležitosti t. zv. *Lindenbaumova Φ -algebra* nižšího predikátového počtu, která bude definována níže:

Definice 2. Říkáme, že neprázdná množina I prvků Φ -algebry A je Φ -ideálem, jestliže platí:

(0) $I \neq A$.

(1) Jakmile $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi$ a $a_i \in I$ pro každé $i = 1, 2, \dots$, potom $\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i \in I$.

(2) Jakmile $a \subseteq b$, $a \in I$, pak $b \in I$.

Říkáme, že Φ -ideál P je Φ -prvoideálem, jestliže ještě platí:

(3) Jakmile $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \in I$, potom je $a_i \in I$ pro vhodné $i = j$.

Jasně je, že každý Φ -ideál je (obyčejný) ideál a že Φ -prvoideál je (obyčejný) prvoideál. (Srov. [St], X, § 6.) To zaručuje pravidlo (iii) v definici 1.

Snadno dokážeme tuto větu: Φ -ideál P je Φ -prvoideálem tehdy a jen tehdy, když z každých dvou prvků a a a' algebry jeden (a ovšem vzhledem k (0), (1), (2) v definici 2 a k (iii) v definici 1 jen jeden) prvek leží v P .

Nutnost podmínky je vzhledem k $a \cup a' = 1 \in P$ a k (iii) v definici 1 podle (3) v definici 2 zřejmá.

Postačitelnost:

Nechť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \in P$. Nechť naše podmínka nepostačuje, t. j. jest $a_i \notin P$ pro $i = 1, 2, \dots$ přesto, že je splněna. Protože z každé dvojice prvků a_i a a'_i jeden patří do P vzhledem k $a_i \cup a'_i = 1 \in P$, je $a'_i \in P$ pro $i = 1, 2, \dots$;

což dává spor s (0), poněvadž $\bigcap_{i=1}^{\infty} a'_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i)' \in P$ (podle (1) v definici 2 a (iii) v definici 1).

I této větě v dalším použijeme bez citace.

2. Lindenbaumova věta

Pomocná věta. *Je-li I nějaký Φ -ideál Φ -algebry A , $b \in A$ pevný prvek takový, že není $a \cap b = 0$ ani pro jedno $a \in I$, pak množina \tilde{I} všech $y \in A$, splňujících $a \cap b \subseteq y$ při vhodném $a \in I$ je Φ -ideál v A , obsahující jak daný ideál I tak i prvek b .*

Důkaz. Protože (0) a (2) z definice 2 jsou zřejmě splněny, dokažme (1).

Nechť tedy $\{y_s\}_{s=1}^{\infty} \in \Phi$, $y_s \in \tilde{I}$ pro $s = 1, 2, \dots$. Pak ke každému členu y_s existuje $a_s \in I$ tak, že je $a_s \cap b \subseteq y_s$. Spojením s prvkem $b' \in A$ na obou stranách dostáváme podle distributivního zákona $a_s \cup b' \subseteq y_s \cup b'$. Protože $a_s \cup b' \in I$, je i $y_s \cup b' \in I$. Tedy je i $\bigcap_{s=1}^{\infty} (y_s \cup b') = b' \cup \bigcap_{s=1}^{\infty} y_s \in I$ — opět podle distributivní identity. Podle definice \tilde{I} bude však

$$b \cap (b' \cup \bigcap_{s=1}^{\infty} y_s) = b \cap \bigcap_{s=1}^{\infty} y_s \in \tilde{I}.$$

Tím spíše tedy $\bigcap_{s=1}^{\infty} y_s \in \tilde{I}$, c. b. d.

Hlavní věta. *Budiž A Φ -algebra se spočetnou rodinou Φ . Budiž I daný Φ -ideál v A . — Pak existuje Φ -prvoideál P v A obsahující I .*

Poznámka. Podle (iii) v definici 1 je sama algebra A spočetná.

Předpoklad spočetnosti Φ -algebry může být (za vhodné modifikace definice 1) snadno odstraněn (my to však nepotřebujeme). Naproti tomu předpoklad spočetnosti rodiny Φ odstraněn být nemůže, neboť není těžké udat příklady dokonce spočetných σ -algeber, v nichž věta neplatí.

Důkaz. Označme jako $\{a_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost, sestavenou ze všech posloupností rodiny Φ ($i = 1, 2, \dots$ je tedy index posloupnosti, $k = 1, 2, \dots$ index jejího členu). Pro formální zjednodušení můžeme (vzhledem k (iii) v definici 1) předpokládat, že posloupnost samých nul je první.

Sestrojíme induktivně stoupající řetězec Φ -ideálů

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

vesměs obsahujících daný Φ -ideál I tak, že Φ -ideál I_n splňuje tuto podmínku (p, n) :

Je-li $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^i \in I_n$ a $i \leq n$, potom je již i $a_j^i \in I_n$ pro vhodné přirozené číslo j .

Položme $I_1 = I$; pak podmínka $(p, 1)$ pro I_1 je splněna triviálně, protože $a_k^1 = 0$ pro $k = 1, 2, \dots$

Nechť je již udán r -tý člen řetězce $\{I_n\}$, splňující (p, r) .

Pak existenci I_{r+1} zaručíme takto:

V případě **A**), že ku I_r neexistuje Φ -nadideál, který by obsahoval prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1} \in A$, položme $I_r = I_{r+1}$; pak ovšem I_{r+1} splňuje $(p, r+1)$. V opačném

případě **A'**), že totiž existuje Φ -ideál obsahující jak prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1}$, tak i ideál I_r , dokažme, že pak již existuje i Φ -ideál I_{r+1} , který obsahuje I_r a vhodný prvek a_j^{r+1} (člen posloupnosti $\{a_k^{r+1}\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$).

Dejme tomu, že by naopak takový Φ -ideál I_{r+1} neexistoval. To dle naší shora uvedené pomocné věty znamená, že ke každému prvku a_k^{r+1} ($k = 1, 2, \dots$) musí existovat prvek $b_k \in I_r$ takový, že je $a_k^{r+1} \cap b_k = 0$. Ale pak je $b_k \subseteq (a_k^{r+1})'$ pro každé $k = 1, 2, \dots$, t. j. $(a_k^{r+1})' \in I_r$ pro každé $k = 1, 2, \dots$. Tedy — protože

I_r je Φ -ideál — je $\bigcap_{k=1}^{\infty} (a_k^{r+1})' = (\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1})' \in I_r$. To však je ve sporu s předpoklá-

danou rozšiřitelností Φ -ideálu I_r ve Φ -nadideál, obsahující prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1}$ (případ **A'**). Tím je pokračování našeho řetězce Φ -ideálů zaručeno. Není totiž těžké si ověřit splnění vlastnosti $(p, r+1)$ pro kterýkoli Φ -ideál I_{r+1} právě vyznačený případem **A'**).

Neboť je-li $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^i \in I_{r+1}$ pro nějaké $i \leq r$, potom to znamená, že v i -tém kroku konstrukce našeho řetězce nastal případ **A'**), takže je $a_j^i \in I_i \subseteq I_{r+1}$ při vhodném j ; pro $i = r+1$ jsme však potřebné právě zařídili.

Utvořme nyní množinové sjednocení $P = \sum_{r=1}^{\infty} I_r$.

Dokážeme, že P je hledaným Φ -prvoideálem nad I .

Snadno nejprve nahlížíme, že P je (obyčejný) ideál, zvláště pak že neobsahuje nulu (požadavek (0) definice 2, a požadavek (2) definice 2).

Z konstrukce však bezprostředně plyne, že je splněn i požadavek (3) definice 2, neboť je-li $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^j \in P$, pak je $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^j \in I_n$ při vhodném n . Poněvadž tedy v j -tém kroku konstrukce nastal případ **A'**),⁵⁾ bude $a_s^j \in I_j$ při vhodném s , tedy $a_s^j \in P$.

Dokažme konečně, že P má i vlastnost (1) z definice 2.

Kdyby tomu tak nebylo, měli bychom posloupnost $\{a_k^i\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ při vhodném i takovou, že by sice bylo $a_k^i \in P$ pro každé $k = 1, 2, \dots$, ale prvek $\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i$ by neležel v P .

⁵⁾ I_n je Φ -ideál!

Protože však je — jak vlastně již víme — P obyčejným prvoideálem, patřil by následkem $(\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i) \cup (\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i)' = 1 \in P$ prvek $(\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i)' = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^i)'$ do P .

Tedy prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^i)'$ patří i do jistého I_r . Avšak poněvadž I_r je Φ -ideál a protože (dle vlastnosti (i) v definici 1) je $\{a_k^i\}_{k=1}^{\infty} = \{(a_k^i)'\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ při vhodném j , je již také následkem naší konstrukce $(a_k^i)' \in I_j$ pro toto j a pro vhodné k . Tedy je i $(a_k^i)' \in P$. To však je ve sporu s předpokládaným $a_k^i \in P$.

Tím je naše hlavní věta úplně dokázána.

Poznámky k důkazu. Existence nadprvoideálu k danému ideálu se v abstraktní algebře — pokud jde o obyčejné konečné operace — dokazuje zpravidla takto: Postupně se rozšiřuje daný ideál přidáváním prvků a sjednocováním přes stoupající řetězec nadideálů se obdrží maximální ideál, který je hledaným nadprvoideálem. (Odvoláme-li se na t. zv. ZORNOVO lemma, nemusíme ani tuto běžnou konstrukci provádět.) Takovým způsobem se postupuje na př. v teorii okruhů, v teorii svazů a v teorii pologrup.

Tato prostá metoda zde selhává, neboť sjednocení přes nekonečný řetězec stoupajících Φ -ideálů již nemusí být Φ -ideál a při případném doplňování ve Φ -ideál narazíme na nulu.

Dá se však ukázat, že obyčejné prvoideály ve Φ -algebře, které by nebyly Φ -prvoideály, jsou „poměrně vzácné“ v tomto smyslu: Považujeme-li prvoideály dané Φ -algebry za body STONEOVA⁶⁾ reprezentujícího prostoru, pak naše algebra je (ve smyslu konečných operací) isomorfní s množinovým tělesem obojetných (t. j. současně otevřených i uzavřených) množin tohoto prostoru. Ukazuje se, že množina všech prvoideálů, obsahujících daný ideál, představuje ve Stoneově reprezentujícím prostoru otevřenou bodovou množinu. Naproti tomu množina všech prvoideálů, které nejsou Φ -prvoideály, tvoří v tomto prostoru množinu první kategorie. Protože ve Stoneově prostoru jakožto v bikompletním nuladimensionálním prostoru platí BAIREOVA věta o kategorii, nemohou všechny nadprvoideály k danému Φ -ideálu nebýt Φ -prvoideály.

Na tom lze založit jak „topologický“ důkaz Lindenbaumovy věty (a Gödelovy věty o úplnosti jakož i věty Skolemovy-Löwenheimovy) tak i důkaz Loomisovy věty; to učinili Sikorski v práci [7] a RASIOWA a SIKORSKI v práci [8].

3. Lindenbaumova algebra.

Přistupme nyní k aplikacím naší hlavní věty na matematickou logiku; mějme přitom pro určitost na mysli systém predikátového počtu HILBERTA-ACKERMANNNA (viz [9]). — Popišme povšechně tento systém.

⁶⁾ Viz [St] XI, § 3.

T. zv. *základními výrazy* predikátového počtu jsou výrazy $P(x), Q(y), \dots, R(x, y), \dots, S(x, y, z), \dots$ (ve spočetném počtu). Zde písmena x, y, z, \dots po případě s indexy jsou t. zv. *individuové proměnné* a mohou nabýt významu libovolných prvků libovolně předepsané množiny (t. zv. oboru individuí). $P(\cdot), Q(\cdot), \dots, R(r) \dots$ jsou t. zv. *predikátové proměnné*, které pak již nabývají významu libovolných (případně ovšem i pevných) vlastností individuí a dvojčlenných a obecně n -členných relací mezi nimi.⁷⁾

Pojem (větného) *výrazu* vůbec je pak definován induktivně za pomoci *logických částic* \vee (nebo, vel), \sim (nikoli), \exists (existuje, malý kvantor), $()$ (každý, velký kvantor) takto:

a) základní výrazy jsou výrazy;

b) jsou-li $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ výrazy, pak výrazy tvaru $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \sim \mathfrak{A}, \exists x \mathfrak{A}, \exists y \mathfrak{B}, \dots; (x) \mathfrak{A}, (y) \mathfrak{B}, \dots$ (t. j. přesněji naznačené trojice, dvojice a trojice výrazů) jsou také výrazy. — Ve výrazech posledního druhu je — jak se říká — *individuová proměnná* x, y, \dots *vázána*; jinak je *volná*.⁸⁾

Je jasné, že jestliže každý ze základních výrazů tvaru $T_k(x_1, x_m, \dots, x_t)$ obdržel význam jednoduché věty, pravící, že mezi individui x_1, x_m, \dots, x_t je příslušný, k -tou n -člennou predikátovou proměnnou označený n -členný vztah, potom i složené výrazy obdrží jednoznačně význam odpovídajících složených vět. (Symbolika predikátového počtu byla totiž právě tak zvolena, aby přesný a „normovaným“ způsobem vystihovala logické kombinování jednodušších vět a výstavbu složených vět.⁹⁾)

Vlastním smyslem predikátového počtu je — jak známo — rekurentně sestavit zvláštní třídu výrazů, totiž t. zv. *formulí* predikátového počtu; to musí být toliko výrazy, které v každém myslitelném významu budou pravdivými větami, to jest větami pravdivými z „ryze logických důvodů“¹⁰⁾ (má-li totiž

⁷⁾ Striktně vzaťo lze výrazy $P(x), \dots, S(x, y, z), \dots$ samotné (bez ohledu na jejich užití čili interpretaci) prostě považovat za $n + 1$ -tice přirozených čísel, kde na prvních n místech jsou čísla předem jednou pro vždy očíslovaných individuových proměnných tak, jak v základním výrazu jdou za sebou, na posledním $n + 1$ -tém místě je číslo n -členné ve výrazu figurující predikátové proměnné — opět vzhledem k pevnému předem danému očíslování všech n -členných predikátových proměnných. Můžeme však zavést: (spočetně mnoho) t. zv. *individuových konstant* (na př. číselovek) za příslušné modifikace odvozovacích pravidel. — Pak můžeme (ale nemusíme) v předpokladech i tvrzení *Lindenbaumovy věty* nahradit *bezespornost* silnější t. zv. ω — *bezesporností* (viz [5]) — beze změny matematického substrátu.

⁸⁾ Nevyskytuje-li se individuová proměnná, na př. x , v \mathfrak{A} vůbec nebo je-li tam již vázána, jde ve výraze $\exists x \mathfrak{A}$ či $(x) \mathfrak{A}$ o t. zv. *fiktivní vazbu*.

⁹⁾ Že tomu tak skutečně je, to se ovšem nedá dokázat, nýbrž jen ověřit.

¹⁰⁾ Je třeba zdůraznit, že úkolem matematické logiky není samo zkoumání pojmu pravdivosti matematických pouček, což patří do filosofie matematiky. (Filosofie matematiky musí ovšem respektovat výsledky matematické logiky.) V matematické logice může jít toliko o známá pravidla, dle nichž je určena pravdivost, resp. nepravdivost složené věty, jestliže je známa pravdivost a nepravdivost vět jednodušších. Pouze v tomto smyslu se hovoří o „ryze logicky pravdivých“ výrazech jako o složených výrazech, které se stávají „identicky pravdivými“ bez ohledu na pravdivost jejich součástí.

predikátový počet dát to co chceme). Jestliže pak třída formulí je totožná s třídou vždy pravdivých výrazů, říkáme, že predikátový počet je *úplný*.

Sestrojení třídy formulí se děje v zásadě takto:¹¹⁾

Jisté konkrétní výrazy, po případě celá třída výrazů přesně popsaného tvaru se prohlásí za t. zv. *axiomy*, čili *východí formule*. (Na př. $\sim \mathfrak{A} \vee \exists x \mathfrak{A}$.)

Dále se udají (pouhým popisem tvaru zúčastněných výrazů) jistá pravidla, dle nichž z toho, že jisté výrazy byly již zařazeny mezi formule, již plyne, že jiné třeba rovněž zařadit mezi formule. (Typickým a skoro ve všech systémech vystupujícím pravidlem tohoto druhu t. zv. *modus ponens*, t. j. pravidlo pravíci, že když \mathfrak{A} i $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ jsou formule, potom i \mathfrak{B} musí být formule.)

Majíce takto induktivně definovanou třídu formulí zavedme nyní takovýto vztah mezi všechny výrazy:

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \quad (\mathfrak{A} \text{ je ekvivalentní s } \mathfrak{B}),$$

jestliže výrazy $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ jakož i $\sim \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$ jsou formule.

Není těžké dokázat (viz Hilbert-Ackermann [9], nebo Hilbert-BERNAYS [5]) především, že relace \Leftrightarrow mezi výrazy je rovnost.

Dále ze známých základních pouček teorie predikátového počtu snadno plyne, že třídy $[\mathfrak{A}]$, $[\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{C}]$, ... vzájemně rovných výrazů tvoří Booleovu algebru ve smyslu těchto definic:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{A}] \cup [\mathfrak{B}] &= [\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}], \\ [\mathfrak{A}] \cap [\mathfrak{B}] &= \sim [(\sim \mathfrak{A} \vee \sim \mathfrak{B})], \\ [\mathfrak{A}]' &= [\sim \mathfrak{A}], \\ 1 &= [\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}], \quad 0 = [\sim (\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A})]. \end{aligned}$$

Platí pak, že výraz $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ je formulí tehdy a jen tehdy, když je $[\mathfrak{A}] \subseteq [\mathfrak{B}]$ v této algebře — a že $[\mathfrak{F}] = 1$ tehdy a jen tehdy, když výraz \mathfrak{F} je formule

Tato t. zv. *Lindenbaumova algebra* nižšího predikátového počtu je však i Φ -algebrou v následujícím smyslu:

Rodina posloupností Φ je — vedle triviálních posloupností (viz (iii) v definici 1) — tvořena posloupnostmi tvaru

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{[\mathfrak{A}^*(x_k)]\}_{k=1}^{\infty},$$

kde výraz $\mathfrak{A}(x_k)$ vzniká z výrazu $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x_1)$ (v němž vystupuje volná individuová proměnná, označená jako x_1) náhradou volné x_1 libovolnou volnou individuovou proměnnou, označenou jako x_k pro $k = 1, 2, \dots$ (V \mathfrak{A} mohou ovšem vystupovat i další volné, nebo vázané individuové proměnné.)

Hvězdička pak naznačuje, že je po případě potřeba před popsanou náhradou (bez újmy rovnosti) provést vhodné „přejmenování“ vázaných proměnných v \mathfrak{A} tak, aby se takto x_k nestala vázanou proměnnou.

¹¹⁾ Nebudeme zde vypisovat podrobnosti, k tomu viz HILBERT-ACKERMANN [9]. Popíšeme raději obecné zásady, společné pro všechny systémy predikátového počtu, jichž je celá řada.

Potom je (jak se snadno dokáže, srov. [9])

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k = [\exists x_1 \mathfrak{A}]$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k = [(x_1) \mathfrak{A}]$$

(Není-li individuová proměnná x_1 ve výrazu \mathfrak{A} přítomna, anebo je tam jen vázána, pak klademe formálně $a_k = [\mathfrak{A}]$ pro každé $k = 1, 2, \dots$ a $[\exists x_1 \mathfrak{A}] = = [\mathfrak{A}]$, $[(x_1) \mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}]$ (fiktivní kvantifikace).)

Z induktivní definice pojmu výraz a z axiomů e), f) a z odvozovacích pravidel γ_1) a γ_2) systému Hilberta-Ackermanna snadno plyne, že jsou splněny všechny požadavky definice 1.

Je tedy *Lindenbaumova algebra* nižšího predikátového počtu¹²⁾ Φ -*algebra se zřejmě spočtenou rodinou posloupností* Φ . Nyní můžeme teprve podat přesnou definici pojmu (symbolisované) elementární matematické teorie.

Definice 3. *Elementární* (t. j. v symbolech nižšího predikátového počtu vyjadřitelná) *bezesporná teorie je Φ -ideál Lindenbaumovy algebry; při tom výrazy, jejichž třídy tvoří takový Φ -ideál, jsou* (v symbolech predikátového počtu vyjádřené) *poučky teorie.*

Úplná bezesporná elementární teorie je pak Φ -provideál Lindenbaumovy algebry.

Touto definicí (která v podstatě pochází od TARSKÉHO, viz pozn. 1)) je vyjádřeno předně, že teorii jakožto deduktivně uzavřený systém je třeba považovat za takový systém matematických vět, který splňuje toto:

a) Je-li $\mathfrak{A}(y)$ (kde y je libovolné individuuum) poučkou teorie, pak je poučkou teorie i věta tvaru $(x) \mathfrak{A}(x)$ (pro všechna x platí $\mathfrak{A}(x)$). — To odpovídá požadavku (1) v definici 2.

b) Je-li \mathfrak{A} poučkou teorie a $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ (což je zkratka za $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$) je logicky zaručeno (vzniklo interpretací formule), potom \mathfrak{B} je poučkou teorie. — To odpovídá požadavku (2) definice 2.

c) Pokud je teorie bezesporná (a jiné ovšem neuvažujeme), nejsou všechny výrazy jejími poučkami. — To odpovídá požadavku (0) definice 2.

Za druhé — pokud jde o úplné teorie — definice 3 vyjadřuje vzhledem k tvrzení, dokázanému za definicí 2 právě toto:

Protože $[\mathfrak{A} \vee \sim \mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}] \cup [\mathfrak{A}]' = 1$ patří do každého ideálu, musí být jeden (a jen jeden) z obou výrazů \mathfrak{A} , $\sim \mathfrak{A}$ poučkou úplné teorie — a obráceně.

¹²⁾ Můžeme hovořit o *Lindenbaumově algebře* nižšího predikátového počtu vůbec, protože všechny analogicky sestrojené Φ -algebry pro různé úplné systémy nižšího predikátového počtu jsou si isomorfní. Právě jejich typ isomorfismu, který lze charakterisovat jako jistou volnou Φ -algebru, je vlastní matematickou strukturou nižší predikátové logiky. (To provedl autor v práci [10].)

Nyní je matematické jádro na počátku uvedené Lindenbaumovy věty jasné.

Než přejdeme ke Gödelově větě o úplnosti nižšího predikátového počtu jako snadnému důsledku věty Lindenbaumovy, upozorníme ještě na jednu zajímavou *souvislost s teorií pravděpodobnosti*.

Je známo (viz práci autora [3]), že Lindenbaumova algebra může být isomorfně (ve smyslu všech v ní definovaných suprem a infim) representována borelovskými množinami Cantorova diskontinua. S druhé strany je z teorie míry¹³⁾ známo, že libovolná nezáporná množinová funkce, nepřekračující co do hodnot jedničku, definovaná na množinách reálných čísel, které v trojkovém rozvinutí mají na pevném místě nulu (v Cantorově diskontinuu), dá se jednoznačně rozšířit v σ -aditivní funkci na borelovských množinách Cantorova diskontinua. Takovému základní obojetné množiny Cantorova diskontinua však ve zmíněné representaci můžeme nechat odpovídat prvkům Lindenbaumovy algebry tvaru $[T_k(x_i, x_m, \dots, x_i)]$. To znamená, že řečená množinová funkce může být považována za jakési „pravděpodobnostní“ ohodnocení predikátových (ovšem i kvantifikovaných) výrazů, určené udanými pravděpodobnostmi, že individua x_i, x_m, \dots, x_i jsou ve vztahu $T_k(x_i, x_m, \dots, x_i)$.

To by pro teorii pravděpodobnosti — alespoň v případě spočetných pravděpodobnostních polí (t. j. oborů individuí) — mohlo m. j. znamenat bezesporný způsob, jakým lze bez obav „logicky volně“ (t. j. bez dalších pravděpodobnostních předpokladů) kombinovat výroky, týkající se různých pravděpodobnostních, spolu nesouvisících polí. (Jak známo, při neopatrném takovém kombinování snadno obdržíme logické spory.)

4. Důsledky Lindenbaumovy věty.

Obrátme se konečně k důkazu Gödelovy věty o úplnosti jakožto důsledku věty Lindenbaumovy.

Vyslovíme tuto *Gödelovu větu* v silnějším znění, než je obvyklé, takto: *Není-li výraz \mathfrak{A} nižšího predikátového počtu formulí, pak lze každé predikátové proměnné dát význam určité (obecně n -členné) relace mezi přirozenými čísly a libovolně¹⁴⁾ označit všechna přirozená čísla pomocí individuových proměnných tak, že výraz \mathfrak{A} po případném dosazení vhodných čísel za jeho volné individuové proměnné (pokud v \mathfrak{A} nějaké jsou) obdrží význam chybného tvrzení o přirozených číslech.*

Důkaz. Mějme v Lindenbaumově algebře systém všech jejích prvků $[\mathfrak{B}]$, které splňují vztah $[\mathfrak{A}]' \subseteq [\mathfrak{B}]$.

Protože \mathfrak{A} není formule, t. j. je $[\mathfrak{A}] \neq 1$, je též $[\mathfrak{A}]' = [\sim \mathfrak{A}] \neq 0$.

¹³⁾ Srov. n. př. HALMOS, *Measure Theory*, po př. v ruském překladu (*Teorie měry*, kap. II a III).

¹⁴⁾ V tom je právě zesílení oproti obvyklému znění.

To znamená, že řečené třídy $[\mathfrak{B}]$ tvoří t. zv. hlavní Φ -ideál I vytvořený prvkem $[\sim \mathfrak{A}]$. (Hlavní ideál Lindenbaumovy algebry je právě tím, čemu se říká konečně axiomatizovatelná teorie.) Budiž nyní Π podle Lindenbaumovy věty existující Φ -nadprvoideál k I . Definujme (ke každému k a n přirozenému) n -člennou relaci ϱ_n^k mezi přirozenými čísly takto:

Čísla l, m, \dots, t (v udaném pořadí a v počtu n) jsou v relaci ϱ_n^k tehdy a jen tehdy, když je

$$[T_k(x_l, x_m, \dots, x_t)] \in \Pi,$$

kde $T_k(, \dots)$ označuje k -tou n -člennou predikátovou proměnnou. (Některé, po případě i všechny tyto relace mohou být prázdné; to neškodí — prázdné relace nevyklučujeme.)

Nechme nyní k -tou n -člennou predikátovou proměnnou, označenou jako $T_k(, \dots)$, právě znamenat tuto relaci ϱ_n^k . (To tedy znamená na př. toto: mezi čísly, označenými třeba znaky x_3, x_1, x_2, x_5 máme relaci $T_2(, ,) = \varrho_4^2$ — čili je pravda, že $T_2(x_3, x_1, x_2, x_5)$ — tehdy a jen tehdy, je-li $[T_2(x_{x_3}, x_{x_1}, x_{x_2}, x_{x_5})] \in \Pi$; je-li tedy na př. $x_3 = 8, x_1 = 2, x_2 = 8, x_5 = 3$, pak čísla 8, 2, 8, 3 jsou v relaci ϱ_4^2 jestliže je $[T_2(x_8, x_2, x_8, x_3)] \in \Pi$. Zde je třeba si uvědomit, že definice relace ϱ_n^k a tedy i stanovení významu k -té n -členné predikátové proměnné nezávisí na libovolném současném konkrétním významu jednotlivých individuových proměnných jako znaků pro čísla, nýbrž závisí jen na předem jednou provždy provedeném očíslování jednotlivých individuových proměnných. Při tom máme ovšem stále na mysli, že v daném současném významu individuových proměnných bylo každé číslo alespoň jednou označeno.)

Tím jsme však ve smyslu induktivního vybudování výrazů predikátového počtu postupně dali každému výrazu význam věty o přirozených číslech, jakmile jsme jen fixovali číselný význam individuových proměnných.

Dokažme konečně, že libovolný výraz \mathfrak{C} obdrží takto význam pravdivé věty tehdy a jen tehdy, když platí $[\ast\mathfrak{C}] \in \Pi$, kde výraz $\ast\mathfrak{C}$ vzniknul z výrazu \mathfrak{C} tímto (právě shora na zvláštním případě naznačeným) způsobem:

Každá v \mathfrak{C} volná individuová proměnná se nahradí tou individuovou proměnnou, jejíž číslo (t. j. hodnotu indexu) ona sama právě označuje; před tím se po případě — aby se z volné takto nestala vázaná proměnná — vhodně přejmenují vázané individuové proměnné v \mathfrak{C} , což jistě vzhledem k jejich konečnému počtu lze.

Důkaz tohoto tvrzení vedme indukcí podle složitosti výrazu.

a) Pro základní výrazy jsme potřebné právě zařídili.

b) Protože následkem prvoideálové vlastnosti ideálu Π je $[\ast \sim \mathfrak{C}] \in \Pi$ tehdy a jen tehdy, když není $[\ast\mathfrak{C}] \in \Pi$, přenáší se naše tvrzení zřejmě z výrazů tvaru \mathfrak{C} na výrazy tvaru $\sim \mathfrak{C}$, neboť je očividně $\ast \sim \mathfrak{C} = \sim \ast\mathfrak{C}$.

Protože Π je Φ -ideál, platí $[\ast\mathfrak{C}(x_r)] \in \Pi$ pro každé $r = 1, 2, \dots$ tehdy a jen tehdy, je-li $[\ast(x_i)\mathfrak{C}] \in \Pi$ pro jisté vhodné i (na př. pro první i větší, než jsou

indexy individuových proměnných v \mathfrak{C} a v $*\mathfrak{C}$). (K tomu si stačí jen uvědomit, že každé přirozené číslo bylo označeno a připomenout si definici infima v Lindenbaumově algebře.)

To však vzhledem k zřejmému vztahu $*(x_i) \mathfrak{C} = (x_i) *\mathfrak{C}$ znamená, že se naše tvrzení přenáší z výrazů tvaru $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(x_r)$ na výrazy tvaru $(x_i) \mathfrak{C}$. Konečně protože Π je Φ -prvoideál, je $[\exists x_i \mathfrak{C}] \in \Pi$ tehdy a jen tehdy, když alespoň pro jedno $r = 1, 2, \dots$ je $[\mathfrak{C}(x_r)] \in \Pi$.

To však vzhledem k tomu, že každé přirozené číslo bylo označeno, vzhledem k definici suprema v Lindenbaumově algebře a vzhledem k zřejmé rovnosti $*\exists x_i \mathfrak{C} = \exists x_i *\mathfrak{C}$ znamená, že se naše tvrzení přenáší z výrazů tvaru $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(x_r)$ na výrazy tvaru $\exists x_i \mathfrak{C}$. — Tím je naše tvrzení — a tedy i Gödelova věta dokázána; neboť jsou-li x_r, x_s, \dots, x_u po řadě v \mathfrak{A} případně vystupující volné individuové proměnné, což pišme jako $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x_r, x_s, \dots, x_u)$, pak následkem $[\sim \mathfrak{A}(x_r, x_s, \dots, x_u)] \in \Pi$ přechází $\sim \mathfrak{A}$ v pravdivou větu, jestliže x_r, x_s, \dots, x_u byla po řadě nahrazena individuovými proměnnými, na př. x_a, x_b, \dots, x_n , značícími po řadě čísla r, s, \dots, u . To jest, \mathfrak{A} přechází takto v nepravdivou vědu, c. b. d.

Uvedme ještě větu Skolemovu-Löwenheimovu v tomto nejsilnějším znění:

Každá bezesporná teorie, symbolisovatelná výrazy nižšího predikátového počtu, může být považována za teorii jistých relací mezi přirozenými čísly.

Důkaz se ve smyslu definice 3 provede doslova stejně, jako odvození Gödelovy věty o úplnosti, právě podané; jen na místo hlavního Φ -ideálu I , daného prvkem $[\sim \mathfrak{A}]$, nastoupí libovolný Φ -ideál — t. j. daná teorie.

K větě Skolemově-Löwenheimově (kterou lze jednodušeji odvodit i přímo) neškodí poznamenat toto: Tato věta byla svého času považována za jedno ze „sensačních“ tvrzení matematické logiky. Ukazuje se totiž, že axiomaticky pojatá teorie množin může být formulována v symbolech nižšího predikátového počtu; to však dle Skolemovy-Löwenheimovy věty znamená, že ačkoli se v axiomatické teorii množin hovoří o nespočetných mohutnostech „libovolně velikých“ a o „libovolných ordinálních číslech“, přece možno tuto teorii považovat i za teorii jisté (ovšem velmi složité) dvojčlenné relace mezi přirozenými čísly, reprezentující relaci náležení „ \in “ (mezi množinami).

Z této okolnosti netřeba ovšem nijak činit ten závěr, který činí pod vlivem idealistických filosofických názorů někteří orthodoxní zastánci t. zv. matematického intuicionismu, že totiž nespočetné mohutnosti a nespočetná ordinální čísla jsou „matematické iluze“. Spíše je třeba právě naopak soudit, že výrazové a důkazové prostředky nižšího predikátového počtu jsou příliš chudé, než aby mohly plně vyjádřit tak složitý pojem, jako je vztah náležení.

Nehledě k této okolnosti je však třeba zdůraznit i to, že spočetný číselný model celé axiomatické teorie množin, který dle věty Skolemovy-Löwenheimovy existuje, nebyl explicitně ještě udán. Jsou dokonce přesvědčivé důvody

pro to, že to ani není možné provést „efektivními“, „konstruktivními“ prostředky — alespoň pokud pod nimi rozumíme rekursivní prostředky aritmetiky, neboť by to v podstatě znamenalo podat důkaz bezesporosti nejen celé teorie množin, ale (tím spíše) v ní obsažené aritmetiky přirozených čísel; a to je dle známých Gödelových vět o nerozhodnutelnosti formalisované aritmetiky nemožné.

Na závěr několik poznámek k Lindenbaumově větě, a k ní — jak se dá ukázat — ekvivalentní Gödelově větě o úplnosti:

V poslední době bylo publikováno několik nových důkazů těchto vět. Bylo by zajímavé hlouběji porovnat různé důkazové metody a formulovat jejich společné jádro. Udáme některé z těchto metod.

a) Původní důkaz Gödelův. — Tento původní důkaz se opírá o dvě věci: předně o t. zv. Skolemovu normální formu výrazu. Podle Skolema (viz Hilbert-Ackermann [9]), ke každému výrazu predikátového počtu možno efektivně udat jiný výraz, který je formulí tehdy a jen tehdy, je-li formulí daný výraz, a který má při tom ten jednoduchý tvar, že všechny malé kvantifikace jsou provedeny před všemi velkými kvantifikacemi, obojí na počátku výrazu. Není-li formulí příslušná Skolemova forma, sestruje se pak systém číselných relací, splňujících opak této Skolemovy normální formy. Tento postup má však, tak jak je podán v učebnici Hilberta-Ackermannova [9], mezeru. Protože totiž Skolemova normální forma není nijak ekvivalentní (ve smyslu námi shora uvedené rovnosti \leftrightarrow mezi výrazy) s původně daným výrazem, je třeba ještě dokázat, že ze splnění negace Skolemovy normální formy se dá odvodit i číselné splnění negace původního výrazu. To je sice možné, avšak značně to prodlouží původní důkaz.

Jinak po matematické stránce splnění opaku Skolemovy normální formy výrazu, který není formulí, je v podstatě založeno na kompaktnosti Cantorova diskontinua, t. j. na okolnosti, že průnik přes klesající řetězce uzavřených neprázdných množin je neprázdný. Podobným způsobem, ale bez okliky přes Skolemovu normální formu je proveden důkaz Gödelovy věty v učebnici A. MOSTOWSKÉHO [11].

b) Na podobné, poněkud rozšířené myšlence je založena metoda důkazu Gödelovy (a Lindenbaumovy) věty, implicitě obsažená již v práci sovětského algebraika MALCEVA [12], který jí užil k dokazování t. zv. globálních teoremů abstraktní algebry (především teorie grup) z lokálních předpokladů; tato metoda byla propracována později jednak s hlediska matematické logiky abstraktní algebry v monografii [4], jednak v samotné teorii grup (bez užití termínů matematické logiky) v učebnici KUROŠOVĚ [13]. (Je pozoruhodné, že autor [4] se o Malcevovi vůbec nezmiňuje.)

Tato stránka Lindenbaumovy a Gödelovy věty patří k matematicky nejplodnějším obrátům, které se zrodily na půdě matematické logiky. Jejich abstraktní jádro bylo znovu objasněno v práci [14], ukazující, že podstatou

úsudků tohoto druhu je TICHONOVŮVA věta o bikompaktnosti kartézského součinu libovolného počtu bikompaktních činitelů.

c) Zcela jiného druhu je již zmíněný důkaz Sikorského [8], založený na BAIREOVĚ větě o kategorii. Bylo by právě neobyčejně zajímavé zjistit, nemají-li obě metody přece jen něco společného.

d) Gödelovu a Lindenbaumovu větu možno však i dokazovat každou metodou, jaké se v podstatě užívá v důkazu Loomisovy věty o tom, že každá Booleova σ -algebra je homomorfním obrazem množinového σ -tělesa. Na tom je založen autorův důkaz (15) a — jiným způsobem — i důkaz právě podaný (který má ovšem své předchůdce, zmíněné shora). Při tom originální Loomisův „diagonální obrát“ v jeho původním důkazu možno vložit ve vhodné formulaci přímo do důkazu Lindenbaumovy a Gödelovy věty.

Je tedy vidět, že se zde na půdě matematické logiky setkává v Lindenbaumově a v Gödelově větě o úplnosti několik základních matematických poznatků, jejichž vzájemný vztah by bylo třeba přesněji objasnit.

LITERATURA

- [1] *A. Tarski*, Grundzüge des Systemenkalküls, Fund. Math. 25 (1935), 503—526.
- [2] *A. Tarski*, Grundzüge des Systemenkalküls, Fund. Math. 26 (1936), 283—301.
- [3] *L. Rieger*, On Free \aleph_1 -complete Boolean Algebras, Fund. Math. 38 (1951), 35—52.
- [4] *A. Robinson*, On the Metamathematics of Algebra, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam 1951.
- [5] *D. Hilbert-P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik, II, Berlin 1939.
- [6] *L. Henkin*, The completeness of the first order functional calculus, Journ. Symb. L., 14 (1949), 42—48.
- [7] *R. Sikorski*, On the representation of Boolean algebras as fields of sets. Fund. Math. 35 (1948), 247—258.
- [8] *H. Rasiowa, R. Sikorski*, A Proof of the Completeness Theorem of Gödel, Fund. Math. 37 (1950), 193—200.
- [9] *D. Hilbert, W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, 2. vyd. Berlin 1938.
- [10] *L. Rieger*, O algebře predikátového počtu, Litograf. tisk Ústř. mat. ústavu 1951.
- [11] *A. Mostowski*, Logika matematyczna, Monografie matematyczne XVIII, Warszawa 1948.
- [12] *A. I. Malcev*, Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik, Matem. Sb. 1, 43 (1936), 323—336.
- [13] *A. G. Kuroš*, Těoriya grupp, 2. vyd. Moskva 1953.
- [14] *J. Łós, C. Ryll-Nardzewski*, On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs, Fund. Math. 38 (1951), 233—237.
- [15] *L. Rieger*, O sčetych obobščennych σ -algebrach i novom dokazatělstve těoremy Gedela o polnotě. Čechosl. mat. ž. 1, 76 (1951), 33—49.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Л. РИГЕР (Lad. Rieger), Прага.

(Поступило в редакцию 26. VII. 1954 г.)

В статье дано сравнительно простое алгебраическое доказательство теоремы Линденбаума о дополнимости каждой элементарной непротиворечивой теории. Теоремы Геделя (о полноте) и Лёвенхайма-Сколема истолкованы как следствия. Дано сравнение различных последних методов доказательства теорем Линденбаума и Геделя. В работе содержится также заметка о связи с логикой теории вероятностей.

Summary

ON A FUNDAMENTAL THEOREM OF MATHEMATICAL LOGIC

LADISLAV RIEGER, Praha.

(Received July 26, 1954.)

A relatively simple algebraic proof of the LINDENBAUM theorem on completeness of any consistent elementary theory is given. The completeness-theorem of GÖDEL and the LÖWENHEIM-SKOLEM theorem are discussed as corollaries. Various recent methods of proof of the Lindenbaum and the Gödel completeness theorems are compared. A mention is made concerning a relationship to the logic of probability.