Časopis pro pěstování matematiky

Václav Havel

Zobecněná Forderova metoda a translační roviny

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 95--96

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108115`

ZOBECNĚNÁ FORDEROVA METODA A TRANSLAČNÍ ROVINY

(Referát V. HAVLA o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků“ dne 25. 5. 59 v Brně)

Byly vyšetřovány tyto konfigurační podmínky vztahující se na afinní rovinu:[1])

d^0 Afinní malá věta Desarguova.[2])

S^0 Nechť A, B jsou proměnné různé body. Pak ke každému bodu P non ϵ AB[3]) existuje bod $Q \neq P$, Q non ϵ AB tak, že bod $S^0_{AB} = P_{BQ} \cap QN_{AP}$[4]) leží v přímce AB a nezávisí na volbě bodu P.

S^1 Nechť A, B jsou (proměnné) různé body. Pak 1° průsečík S^1 úhlopříček libovolného rovnoběžníka[5]) $ALBM$ nezávisí na volbě bodu L non ϵ AB a dále, 2° bod S^1 přechází při libovolné perspektivitě σ[6]) v bod $S^1_{A^\sigma B^\sigma}$.

S^2 Ke každé dvojici bodů $A \neq B$ je přiřazen bod S^2_{AB} tak, že 1° $S^2_{AB} = S^2_{BA} \epsilon AB$, 2° k bodům $A \neq B$ existuje vždy bod C, splňující rovnost $B = S^2_{AC}$, 3° při libovolné perspektivitě σ přechází bod S^2_{AB} v bod $S^2_{A^\sigma B^\sigma}$.

S^3 Nechť A, B jsou (proměnné) různé body. Potom 1° pro libovolný rovnoběžník $ABCD$ je bod $S^3_{AB} = AB \cap N_{AD}(AC \cap BD)$ nezávislý na volbě bodu C, A, B a dále, 2° bod S^3_{AB} přechází v libovolné perspektivitě σ v bod $S^3_{A^\sigma B^\sigma}$.

S^4 Pro každý (vlastní) bod S existuje symetrie o středu S.[7])

Věta 1. *V afinní rovině je* $S^i = d^0$; $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Neřešená otázka: Existuje rovina, v níž platí z S^i ($i = 1, 2, 3$) pouze část 1° a nikoliv 2°?

Dále byly vyšetřeny konfigurační podmínky:

B^0 Nechť $A_1B_1A_2B_2$ je (proměnný) rovnoběžník a nechť C_i non ϵ A_iB_i ($i = 1, 2$); $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Pak je též $A_1C_2 \parallel A_2C_1$, $B_1C_2 \parallel B_2C_1$.

Q^0 Nechť $ABCD$ je (proměnný) rovnoběžník s průsečíkem U úhlopříček a nechť A', U, C'; B', U, D' jsou přípustné trojice,[8]) přičemž $A' \epsilon AB$, $B' \epsilon BC$, $C' \epsilon CD$, $D' \epsilon DA$. Pak $A'B'C'D'$ je rovnoběžník.

Věta 2. *V afinní rovině je* $B^0 \Leftrightarrow Q^0 \Leftrightarrow d^0$.

Dále byly zkoumány tyto konfigurační podmínky, týkající se projektivní roviny:[9])

D, d Desarguova, resp. malá Desarguova věta.[10])

H Nechť A, B, C je (proměnná) přípustná trojice. Pak pro každou přípustnou trojici

[1]) *G. Pickert*: Projektive Ebenen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955, str. 10. Požadujeme (též při vyšetřování projektivních rovin) splnění podmínky Fanovy: Pro kteroukoliv čtveřici bodů obecné polohy neleží průsečíky přímek $p_{i,j}, p_{k,l}$ ($p_{i,j}$ spojuje i-tý a j-tý bod čtveřice a i, j, k, l je libovolné pořadí čísel 1, 2, 3, 4) na téže přímce.

[2]) G. Pickert, l. c., str. 73, 86, 87.

[3]) Symbol AB označuje přímku, určenou oběma body $A \neq B$.

[4]) N_{AB} je symbol pro nevlastní bod přímky AB.

[5]) Rovnoběžník $ABCD$ je uspořádaná čtveřice navzájem různých bodů, přičemž $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$, A non ϵ BC, A non ϵ CD.

[6]) G. Pickert, l. c., str. 8, 9.

[7]) Tj. involutorní perspektivní kolineace o středu S a nevlastní ose n.

[8]) Přípustná n-tice bodů obsahuje n navzájem různých bodů na společné přímce.

[9]) G. Pickert, l. c., str. 7.

[10]) G. Pickert, l. c., str. 73, 86.

A, V, W (W non $\in AB$) jest bod $(A(CV \cap BW) \cap BV) \cap AB$, tzv. čtvrtý harmonický k A, B, C, určen nezávisle na volbě bodů W, V.

S Nechť A, B, C je (proměnná) přípustná trojice. Pak pro každý bod P non $\in AB$ a každou přímku c ($C \in c \neq AB$) existuje bod Q tak, že C, P, Q je přípustná trojice a bod $((AP \cap c)\, Q) \cap ((BQ \cap c)\, P)$ leží v přímce AB a je nezávislý na volbě bodu P a přímky c.

B Nechť $ABCD$, $A'B'C'D'$ jsou (proměnné) čtyřúhelníky,[11]) pro něž platí podmínky 1° $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $D \neq D'$, $AB \neq A'B'$, $BC \neq B'C'$, $CD \neq C'D'$, $DA \neq D'A'$; 2° AA', BB', CC', DD' jdou společným bodem S; AB, CD, $A'B'$, $C'D'$ jsou společným bodem E a též BC, DA, $B'C'$ mají společný bod F; 3° $BC = D'A'$. Pak též $F \in D'A'$.

Q Nechť $ABCD$ je (proměnný) čtyrúhelník s průsečíkem U úhlopříček. Nechť $A'B'C'D'$ je druhý čtyrúhelník, přičemž A', U, C'; B', U, D' jsou přípustné trojice. Pak body $AB \cap CD$, $BC \cap DA$, $A'B' \cap C'D'$, $B'C' \cap D'A'$ tvoří přípustnou čtveřici.

Věta 3. *V projektivní rovině jest* $H \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow d$.

Věta 4. *V projektivní rovině jest* $B \Leftrightarrow d$.

Při důkazu byla použita myšlenka H. G. Fordera, kterou lze užít k důkazu některých konfiguračních vět v dané projektivní rovině Π: z platnosti afinních specialisací konfigurační věty ve všech afinních rovinách odvozených z Π dokázat platnost obecné konfigurační věty v Π.

Podmínka R vznikne zobecněním podmínky B: Formulace je táž, pouze předpoklad 3° se zanedbá (tj. může nastat nyní jak případ $BC = D'A'$, tak případ $BC \neq D'A'$).

Podmínka r vznikne specialisací podmínky R: požaduje se navíc, aby body S, E, F tvořily přípustnou trojici.

Klingenberg dokázal ekvivalenci $R \Leftrightarrow D$. Pro určité konečné projektivní roviny odvodil pak Gleason ekvivalenci $r \Leftrightarrow d$ ($\Leftrightarrow D$). G. Pickert vyslovil domněnku, že v nekonečné projektivní rovině již ekvivalence $r \Leftrightarrow d$ obecně neplatí. Tato domněnka nebyla dosud dokázána.

Václav Havel, Brno

HOMOGENNÍ FUNKCIONÁLY NA LOKÁLNĚ KOMPAKTNÍCH SEMIMODULECH

(Referát o přednášce L. Janoše konané 14. 9. 1959 v matematické obci pražské)

Semimodulem $\mathfrak{S}$ rozumíme podmnožinu lineárního prostoru $\mathfrak{L}$ uzavřenou vzhledem k součtu a násobení nezáporným číslem, tedy:

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}\,; \quad \alpha \geqq 0\,, \quad x, y \in \mathfrak{S} \Rightarrow x + y \in \mathfrak{S}\,; \quad \alpha x \in \mathfrak{S}\,.$$

V našich úvahách budeme vždy žádat ještě

$$x + y = 0 \Rightarrow x = 0\,, \quad y = 0\,; \quad x, y \in \mathfrak{S}\,.$$

To nám dovolí zavést do $\mathfrak{S}$ částečné uspořádání $\leqq$ předpisem

$$x \leqq y \Leftrightarrow x \in \mathfrak{S}\,, \quad y \in \mathfrak{S}\,, \quad y - x \in \mathfrak{S}\,.$$

[11]) Čtyrúhelník $ABCD$ je uspořádaná čtveřice navzájem různých bodů, z nichž žádné tři neleží na společné přímce.