Časopis pro pěstování matematiky

Ján Jakubík

Об одном свойстве структурно упорядоченных групп

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 51--59

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108114

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 12/III 1959 г.)

В заметке доказывается, что возможность разложения l-группы G на вполне полупрямое произведение упорядоченных групп зависит только от свойств частичного упорядочения в G. Далее решается вопрос, выдвинутый в работе [2].

Мы используем те же обозначения, как и в монографии [1], гл. XIV. Пусть G — структурно упорядоченная группа; малыми буквами обозначаются элементы из G. Элементы $x, y, x \geqq 0, y \geqq 0$ называются дизъюнктными, если $x \cap y = 0$; в таком случае мы пишем $x\delta y$. В работе [2] Ф. Шик называет элемент x острием элемента a, если

$$a \geqq x > 0\,, \quad (a - x)\,\delta x \tag{1}$$

и если x является наименьшим элементом, имеющим свойство (1). Элемент x называется острием, если существует элемент a такой, что x есть острие элемента a.

Исследуем следующее условие, накладываемое на структурно упорядоченную группу G:

c) *если y — острые, $a \geqq y$, то существует острие z элемента a такое, что $z \geqq y$.*

В работе [2] исследуется связь условия c) с дальнейшими условиями a), b). Доказано, что из условий a), c) не вытекает b) и что из условий b), c) не вытекает a). Одновременно в работе [2] выдвигается вопрос ([2], стр. 40), вытекает ли из условий a), b) условие c). В настоящей заметке мы докажем, что ответ на поставленный вопрос является отрицательным.

Условия a), b) имеют вид:

a) каждый элемент $a \in G$, $a > 0$ имеет острие,

b) если $x > y > 0$ и если x — острие, то и y является острием.

Заметим еще, что условие, выражающее то обстоятельство, что G обладает свойствами a), b), c), равносильно некоторым условиям, касающимся разложения структурно упорядоченной группы G на полупрямое произведение ([2], теорема 2).

1. Напомним прежде всего, что понятие острия можно определить и пользуясь лишь терминами теории структур.

Элемент $x \in G^+$ является острием тогда и только тогда, если его нельзя выразить в виде

(2) $$x = y \cup z\,, \quad 0 < y < x\,, \quad 0 < z < x\,, \quad y \cap z = 0\,.$$

Доказательство. Пусть x — острие. Согласно [2], лемма 18, элемент x является своим острием (т. е. x является острием элемента x). Допустим, что существуют элементы y, z, удовлетворяющие соотношениям (2). Согласно [1], гл. XIV, 4, будет тогда $x = y + z = z + y$, следовательно, $x - y = z$, $x - y\,\delta\,y$. Согласно (1) элемент x не был бы в таком случае острием элемента x, что противоречит допущению.

Наоборот, пусть для элемента x не существуют элементы y, z, для которых были бы справедливы соотношения (2). Пусть $x \geqq y > 0$, $(x - y)\,\delta y$. Обозначим $x - y = z$. Допустим прежде всего, что $x > y$. Тогда будет $0 < z < x$, $z \cap y = 0$, следовательно, $x = z + y = z \cup y$ (согласно цитированному месту книги [1]). Это противоречит допущению и, следовательно, должно быть $x = y$. Отсюда вытекает, что x является острием (элемента x).

2. Пусть G_1 — структурно упорядоченная группа всех вещественных чисел (с обычным упорядочением; в качестве групповой операции принимается сложение), $G_2 = G_1$, пусть G_3 есть ординальное произведение структурно упорядоченных групп G_1, G_2. Следовательно, G_3 есть множество всех пар (x, y), $x \in G_1$, $y \in G_2$, для которых мы определяем операцию $+$ посредством уравнения $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, а упорядочение в G_3 определяем так, что $(x_1, y_1) \leqq (x_2\, y_2)$ тогда, когда или $x_1 < x_2$, или $x_1 = x_2$ и одновременно $y_1 \leqq y_2$.

Пусть G — множество всех функций с областью определения $\langle 0, 1\rangle = I$, значения которых принадлежат к G_3. Если $z \in I$, $f \in G$, $f(z) = (x, y)$, то обозначим $x = f_1(z)$, $y = f_2(z)$. В множестве G мы определим естественным образом сложение и частичное упорядочение: для f, $g \in G$ будет $f + g = h$, причем $h(z) = f(z) + g(z)$ для любого $z \in I$; $f \leqq g$, если $f(z) \leqq g(z)$ для любого $z \in I$.

Легко обнаружить, что при таком определении операции $+$ и отношения $\leqq$ G является коммутативной структурно упорядоченной группой.

Построим подмножество $G_0 \subset G$ следующим образом: если $f \in G$, то $f \in G_0$ тогда и только тогда, если существует число ε, $0 < \varepsilon \leqq 1$ такое, что для всех z, $z' \in \langle 1 - \varepsilon, 1\rangle$ имеет место равенство $f_1(z) = f_1(z')$.

Очевидно, справедливо утверждение: *если f, $g \in G_0$, то $f \cap g$, $f \cup g$, $f - g \in G_0$. Следовательно, G_0 является также структурно упорядоченной группой.*

3. Пусть $z \in \langle 0, 1\rangle$. Обозначим

$$F_z = \{f; f \in G_0^+\,, \quad f(z') = (0, 0) \quad \text{для} \quad z' \neq z\,, \quad z' \in I\,, \quad f(z) > (0, 0)\}\,.$$

Множество F_z есть, очевидно, выпуклая цепь в G_0^+. Из утверждения, содержащегося в 1 непосредственно следует: каждый элемент $f \in F_z$ является острием в G_0.

Пусть далее F — множество всех $f \in G_0^+$, для которых справедливо утверждение: для любого $z \in I$ имеем $f_1(z) = 0$ и для любого $z \in \langle 0, 1)$ имеем $f_2(z) = 0$, $f_2(1) > 0$. Так как F — выпуклая цепь в G, каждый элемент $f \in F$ есть острие в G_0.

Докажем далее: *если g — острие в G_0, то или $g \in F$, или g входит в какое-то из множеств F_z, $z \in \langle 0, 1)$.*

Доказательство. Пусть g — произвольный элемент множества G_0^+ (не обязательно острие), $g \neq (0, 0)$.

a) Предположим, что существует элемент $z \in \langle 0, 1)$ такой, что $g(z) > (0, 0)$. Возьмем элемент $f \in F_z$ так, чтобы $f(z) = g(z)$, и обозначим $g - f = h$. Тогда, очевидно,

$$g \geqq f > 0\,, \quad h \delta f\,. \tag{3}$$

Из соотношений (3) следует согласно определению острия и согласно лемме 18, [2]: если $g \neq f$, то g не будет острием в G_0.

б) Предположим, что для любого $z \in \langle 0, 1)$ справедливо $g(z) = (0, 0)$. Тогда должно быть $g(1) > (0, 0)$. Далее, при указанном предположении по определению множества G_0 будет $g_1(1) = 0$. Остюда следует $g \in F$. Этим и доказывается наше утверждение.

Нетрудно обнаружить, что в случае, рассмотренном в а), имеем: элемент f есть острие элемента g.

4. Из результатов п. 3 следует, что G_0 удовлетворяет условиям a), b), указанным в введении. Если $z \in \langle 0, 1)$, $u \in F_z$, $v \in F$, то, очевидно, будет $u \cap v = 0$.

5. Пусть $f \in F$, $f_2(1) = 1$. Пусть g — функция из G_0, определенная так: для любого $z \in I$ $g_1(z) = 1$, $g_2(z) = 0$.

Очевидно, $f < g$. Согласно п. 3 f есть острие в G_0. Предположим, что f' есть острие элемента g, для которого $f' \geqq f$. Согласно пп. 3 и 4 тогда должно быть $f' \in F$, следовательно, $f_1'(z) = 0$ для любого $z \in I$. По определению острия существует $h \in G_0^+$ так, что $g = f' + h$, $f' \delta h$. Следовательно, будет и $g = f' \cup h$. Итак, должно быть $h_1(1) = 1$, так что $h > f'$, что является противоречием. Структурно упорядоченная группа G_0 не удовлетворяет условию c).

Принимая во внимание результаты из [2], упомянутые в введении, мы получаем утверждение:

Теорема 1. *Условия* a), b), c) *взаимно независимы.*

6. Пусть $x > 0$, пусть интервал $\langle 0, x\rangle$ является цепью. Тогда элемент x будет согласно п. 1 острием в G. Обратное утверждение не имеет места:

если x — острие, то интервал еще $\langle 0, x \rangle$ не должен быть цепью. (Пример: если G — множество всех непрерывных функций, определенных на $\langle 0, 1 \rangle = I$ с групповой операцией $+$ и с обычным частичным упорядочением, и если $f \in G^+$, $f(z) > 0$ для любого $z \in I$, то f будет, очевидно, острием, а интервал $\langle 0, f \rangle$[1]) не будет цепью.)

Определение. *Собственным острием* мы будем называть такой элемент $x \in G$, $x > 0$, для которого интервал $\langle 0, x \rangle$ является цепью.

Согласно разделу 3 каждое острие структурно упорядоченной группы G_0, рассматриваемой в разделах 2—5, является собственным острием.

Пусть a′), b′), c′) означают условия, возникающие из условий a), b), c) так, что в этих условиях выражение „острие" заменяются выражением „собственное острие". (Условия a′), c′) подробно сформулированы ниже в теореме 2.)

Очевидно a′) $\Rightarrow$ a). Из приведенного определения следует, что условие b′) выполняется в каждой структурно упорядоченной группе G. Так как каждое острие является своим единственным острием ([2], лемма 18), мы получаем: если в G имеет место a′), то каждое острие в G будет собственным острием. Итак, если в G имеет место a′), то для G условия c), c′) равносильны. Далее, из a′) следует b).

Из сказанного получаем: из условий a′), c′) вытекают условия a), b), c). (Напомним, что из условия a′) не следует c′). Доказательством может служить тот самый пример, при помощи которого была доказана теорема 1.)

Предположим теперь, что в G выполняются условия a), b), c). Согласно [2], теорема 2, структурно упорядоченная группа G изоморфна вполне полупрямому произведению упорядоченных групп. Из первого утверждения леммы 20, [2] следует, что каждое острие в G есть собственное острие. Итак, имеет место a′), а по предыдущему и c′).

Пусть $x, y, a \in G$, $a > 0$, пусть x — собственное острие в G и пусть

$$a = x \cup y\,, \quad x \cap y = 0\,. \tag{*}$$

Тогда x есть острие элемента a.

Из уравнений (*) и из того обстоятельства, что x — острие, действительно, следует $a \geqq x > 0$, $a = x + y = y + x$, $a - x = y$, $a - x\delta x$. Если $x_1 \in G$, $0 < x_1 < x$, то обозначим $x - x_1 = x_2$. Очевидно, $x_i \cap y = 0$, $i = 1, 2$. Так как $\langle 0, x \rangle$ есть цепь, то $x_1 \cap x_1 = \min (x_1, x_2) > 0$. Далее, имеем

$$a - x_1 = y + (x - x_1) = y + x_2 = y \cup x_2\,,$$

$$(a - x_1) \cap x_1 = (y \cup x_2) \cap x_1 = (y \cap x_1) \cup (x_2 \cap x_1) = \\ = x_2 \cap x_1 > 0\,.$$

Ввиду цитированной теоремы 2, [2] мы таким образом доказали:

[1]) Символом 0 здесь обозначается наименьший элемент в G^+.

Теорема 2. *Структурно упорядоченная группа G изоморфна вполне полупрямому произведению упорядоченных групп если и только если выполняются условия:*

a') *Для каждого элемента $a \in G$, $a > 0$ существуют элементы $x, y \in G^+$ такие, что $a = x \cup y$, $x \cap y = 0$, $x > 0$ и интервал $\langle 0, x\rangle$ является цепью,*

c') *Если $z > 0$, $a > z$ и интервал $\langle 0, z\rangle$ есть цепь, то существуют элементы x, y, удовлетворяющие условию* a') *и такие, что $x \geqq z$.*

7. Из п. 1 и из теоремы 2, [2] или непосредственно из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Вопрос о том, является ли структурно упорядоченная группа G изоморфной вполне полупрямому произведению упорядоченных групп, решается уже на основании самих структурных свойств структуры G^+.*[2])

Замечание. Чтобы показать, что независимость свойства ,,быть вполне полупрямым произведением упорядоченных групп" от групповой операции является реальной, а не только кажущейся, исследуем следующий вопрос:

Пусть l-группа G $(+)$ представляет собой вполне полупрямое произведение упорядоченных групп (групповая операция обозначена через $+$). Можно ли на структуре G определить другую бинарную операцию $+_1$ так, чтобы $G(+_1)$ была l-группой?

Ответ на поставленный вопрос положителен, как показывает следующей пример:

Пусть G — множество всех пар вещественных чисел. Для $(x, y), (x', y') \in G$ положим $(x, y) \leqq (x', y')$ тогда и только тогда, если или $x < x'$ или $x = x'$, $y \leqq y'$. Тогда G — упорядоченное множество. Дадим такое определение операций $+$, $+_1$ на G:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')\,,$$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', e^{x'}y + y')\,.$$

(Ср. [1], стр. 216, пр. 7.) Тогда $G(+)$, $G(+_1)$ будут неизоморфными k-группами, а $G(+)$ будет, очевидно, вполне полупрямым произведением упорядоченных групп. Элемент $(0, 0)$ является нулевым элементом в $G(+)$ и в $G(+_1)$.

Подобно тому, как теорема 3, из п. 1 и из теоремы 3, [2] вытекает

Теорема 4. *Вопрос о том, является ли полная структурно упорядоченная группа G изоморфной вполне полупрямому произведению полных упорядоченных групп, может быть решен на основании одних только структурных свойств структуры G^+.*

---

[2]) Понятие ,,структура G^+" нами используется, конечно, в том смысле, что рассматриваются лишь теоретико-структурные операции на множестве G^+ и не принимается во внимание операция $+$.

Теоремы 3, 4 аналогичны следствию теоремы 3, [3], относящемуся к прямому произведению структурно упорядоченных групп.

8. Из п. 6 следует, что при исследовании разложений на вполне полупрямое произведение достаточно ограничиться собственными остриями в G. Пусть H — множество всех собственных острий в G. Если $h_1, h_2 \in H$, то мы будем писать $h_1 \sim h_2$ в знак того, что элементы h_1, h_2 сравнимы. Отношение $\sim$ определяет, очевидно, разложение множества H на непересекающиеся классы (ср. [2], стр. 32). Пусть $\{H_i\}$ $(i \in M)$ есть множество всех соответствующих классов. (M может быть и пустым множеством.)

Условие c′) *равносильно следующему условию*:

c″) *Если* $M \neq \emptyset$, $i \in M$, *то* H_i *есть сверху неограниченная выпуклая цепь.*

Доказательство. H_i есть очевидно, выпуклая цепь. Предположим, что имеет место c′). Предположим, что элемент $a \in G^+$ является верхним ограничеснием множества H_i. Возьмем произвольный элемент $h \in H_i$. Так как $h \leqq a$ и так как интервал $\langle 0, h\rangle$ есть цепь, то, согласно c′), существуют элементы $h_1, y \in G$ такие, что $a = h_1 \cup y$, $h_1 \cap y = 0$, $h \leqq h_1$, причем интервал $\langle 0, h_1\rangle$ есть цепь. Отсюда далее следует, что и интервал $\langle 0, 2h_1\rangle$ будет цепью (ср. [3], раздел 17.2), следовательно, $2h_1 \in H$. Так как $h < 2h_1$, по построению множетсва H_i должно быть $2h_1 \in H_i$. Из равенства

$$2h_1 \cap a = 2h_1 \cap (h_1 \cup y) = (h_1 + h_1) \cap (h_1 + y) = h_1 + (h_1 \cap y) = h_1$$

следует (так как $h_1 > 0$, $2h_1 > h_1$), что не может быть $2h_1 < a$, следовательно, элемент a не может быть верхним ограничением множества H_i. Множество H_i не является сверху ограниченным.

Наоборот, пусть имеет место c″). Пусть $a \in G^+$, пусть существует $h \in H$, $h \leqq a$. Пусть H_i — класс в H, содержащий элемент h. Если $a \in H_i$, положим $x = a$, $y = 0$ и условие c′) выполнено. Если a non $\in H_i$ то по предположению существует элемент $h_1 \in H_i$, несравнимый с элементом a. Обозначим $h_1 \cap a = h_2$. Должно быть $h_2 \geqq h$, значит, $h_2 > 0$. Очевидно, $h_2 \in H_i$. Обозначим $a - h_2 = y$, $h_1 - h_2 = h_3$. Из предыдущего следует $h_3 > 0$, $h_3 \in H_i$ и одновременно $h_3 \cap y = 0$. Из последнего равенства и из выпуклости цепи H_i вытекает, что для каждого $h' \in H_i$ $h' \cap y = 0$. (Ср. [3], раздел 9.) Итак, мы имеем $h_2 \cap y = 0$, $h_2 \cup y = h_2 + y = y + h_2 = a$, чем и доказана справедливост c′).

9. Из результатов п. 8 и из [3] (теорема 1 и раздел 3) следует:

Теорема 5. *Пусть в* G *выполняется условие* c′). *Пусть* H_i *имеет тот же смысл, как и в п.* 8. *Тогда множество* $H_i \cup (-H_i)$ *будет выпуклой цепью и одновременно прямым фактором в структурно упорядоченной группе* G.

Напомним, что в теореме 5 нельзя выпустить предположение о том, что в G выполняется условие c′) (ср. [1], стр. 216, пример 6).

10. *Возникает вопрос, всегда ли можно в структурно упорядоченной группе G „отделить" упорядоченные прямые факторы от остальных прямых факторов в следующим смысле: можно ли разложить G на прямое произведение $G \cong A \times B$ так, чтобы выполнялось условие*

d) *A является вполне полупрямым произведением всех тех прямых факторов из G, которые представляют собой упорядоченные группы.*

(Понятие прямого произведения структурно гпорядоченных групп мы используем в том же смысле, как и в [3]. По поводу поставленного вопроса сравни [4], гл. III, теорема 5.3.1.)

Из условия d) следует, что в B не существует нетривиального прямого фактора, который бы был цепью.

Докажем, что ответ на поставленный вопрос отрицателен. Исследуем пример, о котором была речь в пп. 2—5. Воспользуемся описанными там обозначениями. Предположим, что существует разложение на прямое произведение для G_0

(4) $$G_0 \simeq A \times B ,$$

имеющее свойство d). По теореме 1, [3] для любого $z \in \langle 0, 1)$

(5) $$F_z \subset A .$$

Пусть $f \in G_0^+$, $f \in B$. Из свойств прямого произведения (ср. [3], раздел 18) следует: для любого $q \in G_0^+$, $q \in A$ должно быть $f \cap q = \bar{0}$.[3]) Итак, из соотношения (5) мы получаем, что для любого $z \in \langle 0, 1)$ будет $f(z) = 0$, так что $f \in F$ или $f = \bar{0}$. Далее, из (4) следует (ср. [3], раздел 18 V), что каждый элемент $c \in G_0^+$ ножно выразить в виде

(6) $$c = a \cup b ,$$

$a \in A^+$, $b \in B^+$. Положим $c = g$, причем g имеет тот же смысл, как и в п. 5. Согласно предыдущему должно быть $b \in F$, а, значит, и $b_1(1) = 0$. Так как $c(1) = (1, 0)$, будет $a_1(1) = 1$, так что $a > f$. Однако, согласно изложенному выше $f \cap a = \bar{0}$, следовательно, $f = \bar{0}$. Отсюда получаем $B = \{\bar{0}\}$, $G_0 = A$, так что G_0 было бы вполне полупрямым произведением упорядоченных групп. Но согласно п. 5 G_0 не имеет свойства c) и тем самым по теореме 2, [2] мы получаем противоречие.

11. Напомним, наконец, (ср. предыдущую теорему 3):

Вопрос о том, можно ли структурно упорядоченную группу G разложить нетривиальным образом на полупрямое произведение структурно упорядоченных групп, нельзя разрешить на основании одних только теоретико-структурных свойств структуры G^+.

(Понятие разложения на полупрямое произведение используется здесь в том же смысле, как и в книге [1]. Согласно [1] каждому разложению абстрактной алгебры A на полупрямое произведение поставлено в соответ-

[3]) $\bar{0}$ здесь обозначает наименьший элемент в G_0^+.

ствие множество отношений конгруэнтности R_i на A такое, что $\cap R_i = 0$ (символом 0 здесь обозначается наименьшее разбиение на A); мы говорим, что разложение на полупрямое произведение нетривиально, если для каждого из рассматриваемых отношений конгруэнтности $R_i \neq 0$.)

Для доказательства предыдущего утверждения рассмотрим следующий пример. Пусть S — множество всех целых чисел, пусть G_1 — множество всех троек (x, y, z), $x, y, z \in C$. Определим в G_1 операцию $+$ и отношение $\leqq$ так: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$; $(x_1, y_1, z_1) \leqq \leqq (x_2, y_2, z_2)$ тогда и только тогда, если или $x_1 < x_2$, или $x_1 = x_2$ и одновременно $y_1 \leqq y_2$, $z_1 \leqq z_2$.

Множество всех элементов, $u \in G_1$, соотв., $v \in G_1$ вида $u(0, y, 0)$, $y \in C$, соотв., $v = (0, 0, z)$, $z \in C$ образует l-идеал в G, который мы обозначим через U, соотв. V. Пусть R_1, соотв. R_2 — отношение конгруэнтности на структурно упорядоченной группе G_1, сопоставленное l-идеалу U, соотв. V (ср. [1], стр. 222). Так как $U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$, то и $R_1 \cap R_2 = 0$, так что G_1 можно нетривиальным способом разложить на полупрямое произведение.

Пусть, далее, G — структурно упорядоченная группа, описанная в [1], стр. 216, пр. 6. Нетрудно доказать, что в G существует лишь один l-идеал, имеющий более одного элемента и отличный от G. Отсюда следует, что G нельзя разложить нетривиальным способом на полупрямое произведение. Однако, структуры G_1^+, G^+, очевидно, изоморфны.

Литература

[1] *G. Birkhoff*: Lattice theory, New York **1948**.

[2] *F. Šik*: Über Summen einfach geordneter Gruppen, Чех. мат. журнал *8 (83)*, **1958**, **22—53**.

[3] *J. Jakubík*: Konvexe Ketten in l-Gruppen, Čas. pěst. mat. *84*, **1959**, **53—63**.

[4] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер: Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва **1950**.

Výtah

O JEDNEJ VLASTNOSTI SVÄZOVO USPORIADANÝCH GRÚP

JÁN JAKUBÍK, Košice

V práci [2] vyšetroval F. ŠIK podmienky a), b), c), vzťahujúce sa na polopriame súčiny l-grúp. Položil otázku, či je tretia z týchto podmienok nezávislá na prvých dvoch. Na príklade dokazujeme, že odpoveď na položenú otázku je kladná. Ďalej sa dokazujú tvrdenia:

O tom, či je l-grupa G izomorfná s úplne polopriamym súčinom usporiadaných grúp, rozhodujú už samotné sväzové vlastnosti sväzu G^+. O tom, či sa l-grupa dá rozložiť na polopriamy súčin l-grúp, nie je možné rozhodnúť na základe samotných sväzových vlastností sväzu G^+. Vo všeobecnosti sa v l-grupe G nedajú „separovať" usporiadané priame faktory od ostatných priamych faktorov (t. j. G sa nemusí dať rozložiť na priamy súčin $A \times B$ tak, aby A bol úplne polopriamy súčin všetkých tých priamych faktorov z G, ktoré sú usporiadanými grupami).

Zusammenfassung

ÜBER EINE EIGENSCHAFT VON l-GRUPPEN

JÁN JAKUBÍK, Košice

In der Arbeit [2] untersuchte F. ŠIK drei Bedingungen, welche sich an die vollständig subdirekten Summen von l-Gruppen beziehen. Er stellte dabei die Frage, ob die dritte Bedingung von der ersten und zweiten unabhängig ist. An einem Beispiel zeigen wir, dass die Antwort bejahend ist. Weiter wird bewiesen:

Darüber, ob die l-Gruppe G mit einem vollständig subdirekten Produkt von geordneten Gruppen isomorph ist, kann man schon aus den verbands-theoretischen Eigenschaften des Verbandes G^+ entscheiden. Darüber, ob die l-Gruppe G in einer nicht-trivialen Weise als ein subdirektes Produkt von l-Gruppen darstellbar ist, kann man nicht aus den verbandes-theoretischen Eigenschaften von G^+ alein entscheiden. In allgemeinen lassen sich die geordneten direkten Faktoren einer l-Gruppe G von anderen direkten Faktoren nicht „separieren" (d. h. die l-Gruppe G lässt sich nicht immer als ein direktes Produkt $A \times B$ darstellen, wobei A ein vollständig subdirektes Produkt aller derjenigen direkten Faktoren von G ist, welche geordnet sind).