Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

DIE STÜTZEBENEN DES KONVEXEN KÖRPERS DER IM KOMPAKTEN INTERVALL GLEICHMÄSSIG BESCHRÄNKTEN POLYNOME

VLADIMÍR PETRŮV, Praha

(Eingegangen am 15. Oktober 1964)

1. EINLEITUNG

Das Tschebyscheffsche Polynom T_n gibt die Antwort auf die Frage, wie das Polynom n-ten Grades

(1) $$P(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i t^i$$

mit dem Koefficienten $x_n = 1$ aussehen soll, damit es sich im Intervall $\langle -1, 1\rangle$ „am wenigsten von Null unterscheidet", d. h. das kleinste Maximum von $|P(t)|$ für $t \in \langle -1, 1\rangle$ hat.

Es ist ganz klar, dass es nicht wesentlich ist, von welchem kompakten Intervall man ausgeht; darum wollen wir vom Intervall $\langle 0, 1\rangle$ ausgehen und die angegebene Aufgabe verallgemeinern:

Unter den Polynomen höchstens n-ten Grades (1), deren Koefficienten die Gleichung

(2) $$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 1$$

(a_i reelle Konstanten) erfüllen, soll man das Polynom finden, für welches

(3) $$\max_{t \in \langle 0,1\rangle} |P(t)|$$

den kleinsten Wert hat.

Wir wollen jedem Polynom (1) den Punkt $[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in E_{n+1}$ zuordnen, sodass jedes Polynom als ein Punkt in E_{n+1} dargestellt wird. Die Menge aller Polynome (1), für die die Zahl (3) kleiner oder gleich eins ist, wird K_n bezeichnet. K_n ist dann ein symmetrischer konvexer Körper.[1])

[1]) siehe [1].

Die Bedingung (2) definiert eine Hyperebene N in E_{n+1}, die den Ursprung nicht enthält. Wir wollen eine zu N parallele Hyperebene N' führen, die „den Körper K_n berührt" (die sogenannte Stützebene, siehe weiter). Jetzt wollen wir durch irgendeinen Punkt aus $N' \cap K_n$ eine Halbgerade aus dem Ursprung führen, diese Halbgerade schneidet die Hyperebene N in einem Punkt und dieser Punkt ist, wie man leicht sehen kann, gerade das Polynom, das die Lösung unserer Aufgabe bildet. Wenn man diese Konstruktion für alle Punkte von $N' \cap K_n$ durchführt, bekommt man gerade alle Lösungen unserer Aufgabe.

Es entstehen noch die Fragen, ob bei gegebener Bedingung (2) die gestellte Aufgabe eindeutig lösbar ist und ob ein und dasselbe Polynom die Lösung für verschiedene Bedingungen (2) darstellen kann und wie dann diese Bedingungen zusammenhängen. Das alles hängt von der Form des Körpers K_n ab. Die Form des Körpers K_n wurde schon untersucht, sowie die Menge seiner Gipfelpunkte.[2] Wie wollen jetzt näher seine „Stützebenen" ansehen.

2. DIE STÜTZEBENEN

2.1. Jede Hyperebene in E_{n+1} kann man so orientieren, dass man einen der durch sie bestimmten Halbräume positiv und den anderen negativ nennt. Die Gleichung der orientierten Hyperebene werden wir immer in der Form

$$L(\xi) - b = 0 \tag{4}$$

schreiben, mit $L(\xi) - b < 0$ im negativen offenen Halbraum. Einfachheitshalber haben wir folgende Bezeichnung eingeführt: $L(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i$. Die Koeffizienten in L sind also bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt.

2.2. Die Hyperebenen $L_i(\xi) - b_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ k \geqq 1)$ die einen gemeinsamen Punkt haben, werden (linear) unabhängig genannt, wenn die Formen $L_i(\xi)$ linear unabhängig sind. Ein System von linear unabhängigen Hyperebenen kann also höchstens $n + 1$ Hyperebenen enthalten.

2.3. Wenn die Hyperebenen

$$L_i(\xi) - b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ k \geqq 1) \tag{5}$$

einen gemeinsamen Punkt haben, werden wir die Hyperebene

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i (L_i(\xi) - b_i) = 0 \tag{6}$$

(soweit die linke Seite nicht identisch gleich Null ist) eine lineare Kombination der Hyperebenen (5) nennen. Sind alle Hyperebenen (5) orientiert und sind alle $\mu_i \geqq 0$,

[2]) siehe [1].

werden wir die orientierte Hyperebene (6) eine konvexe Kombination der Hyperebenen (5) nennen. Die lineare Kombination der Hyperebenen (5) enthält natürlich alle ihre gemeinsamen Punkte.

2.4. Wenn die Hyperebenen (resp. orientierten Hyperebenen) (5) unabhängig sind, sind die Koefficienten μ_i in (6) eindeutig bestimmt bis auf einen gemeinsamen Faktor, der von Null verschieden (bzw. positiv) ist. Diese Zahlen μ_i hängen natürlich von der Beschreibung der Hyperebenen durch die Gleichungen (5) ab.

2.5. Es sei K eine abgeschlossene konvexe Menge in E_{n+1}, die einen inneren Punkt enthält. Die Hyperebene N wird eine Stützebene der Menge K genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $K \cap N \neq \emptyset$,

2) K liegt ganz in einem der durch die Hyperebene N bestimmten abgeschlossenen Halbräume.

Die Stützebene N werden wir immer so orientieren, dass K in ihrem negativen abgeschlossenen Halbraum liegt. Liegt der Punkt $P \in K$ in der Stützebene N, dann sagen wir, dass N die Stützebene zu K im Punkt P ist. (P ist dann natürlich ein Grenzpunkt der Menge K.)

2.6. Ist N eine Stützebene der Menge K im Punkt P und ist N nicht als konvexe Kombination einiger von N verschiedenen Stützebenen zu K im Punkt P darstellbar, wird N eine Hauptstützebene zu K im Punkt P genannt.

2.7. Eine konvexe Kombination von Stützebenen zu K im Punkt P ist wieder eine Stützebene zu K im Punkt P, denn: ist $L_i(\xi) - b_i \leqq 0$ überall in K, gilt dasselbe auch für die konvexe Kombination.

2.8. Lemma. *Wenn N eine Hauptstützebene der Menge K im Punkt P ist und wenn $Q \in K \cap N$ ist, dann ist N auch eine Hauptstützebene der Menge K im Punkt Q.*

Folgerung. Die Worte „im Punkt P“ kann man also in der Definition der Hauptstützebene auslassen.

Beweis. Offensichtlich ist N auch eine Stützebene im Punkt Q. Es sei N nicht eine Hauptstützebene im Punkt Q, d. h. man kann sie als konvexe Kombination einiger von N verschiedenen Stützebenen im Punkt Q mit positiven Koeffizienten darstellen. Weil P in N liegt, sieht man daraus leicht, dass P auch in jeder dieser Stützebenen liegen muss, so dass sie auch Stützebenen im Punkt P sind und N als ihre konvexe Kombination kann nicht eine Hauptstützebene im Punkt P sein.

2.9. *Es sei K eine abgeschlossene konvexe Menge mit innerem Punkt. Es sei P_0 ein Grenzpunkt der Menge K. $\Omega(P_0, \delta)$ soll die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt P_0 und dem Halbmesser δ bedeuten. Dann hat die Menge $K \cap \Omega(P_0, \delta)$ in jedem ihrem Punkt, der innerhalb $\Omega(P_0, \delta)$ liegt, dieselben Stützebenen wie K.*

Beweis. Es sei P ein Punkt aus K, der innerhalb $\Omega(P_0, \delta)$ liegt. Offensichtlich ist in P jede Stützebene zu K auch eine Stützebene zu $K \cap \Omega(P_0, \delta)$. Umgekehrt, wenn die Hyperebene N den Punkt P enthält, aber keine Stützebene von K ist, muss es zwei Punkte Q_1, Q_2 geben, die auf verschiedenen Seiten von N liegen. Aus der Konvexität der Menge K folgt aber, dass die Linienabschnitte PQ_1, PQ_2 der Menge K angehören. In beliebiger Umgebung des Punktes P_0 gibt es also Punkte aus K, die an verschieden Seiten von N liegen, N kann also auch nicht eine Stützebene zu $K \cap \cap \Omega(P_0, \delta)$ sein.

2.10. Lemma. *Es sei K eine abgeschlossene konvexe Menge mit innerem Punkt; dann geht durch jeden Grenzpunkt von K mindestens eine Stützebene.*[3])

2.11. Die Vereinigung einer nichtleeren Menge von Halbgeraden, die denselben Anfangspunkt V haben, wird ein Kegel mit dem Gipfel V genannt.[4])

2.12. Lemma. *Es sei K abgeschlossener konvexer Kegel mit dem Gipfel V, der einen inneren Punkt enthält. Es existiere eine Stützebene N_0 zu K, die nur den Punkt V mit K gemeinsam hat. Es sei N eine Hauptstützebene im Punkt V. Dann enthält N mindestens eine Halbgerade, die in K liegt, und deswegen (siehe 2.8.) ist N auch eine Hauptstützebene in jedem Punkt dieser Halbgeraden.*

Beweis. Wir wollen ein solches Koordinatensystem wählen, dass V der Ursprung und N_0 die Hyperebene $\xi_n = 0$ ist und dass K ganz im Halbraum $\xi_n \geqq 0$ liegt. Wir werden K_δ $(\delta \geqq 0)$ den Durchschnitt der Menge K mit der Hyperebene $\xi_n = \delta$ bezeichnen. Weil K_0 nur den Punkt V enthält, ist die abgeschlossene konvexe Menge K_δ auch beschränkt. Die Hauptstützebene N habe die Gleichung $\sum_{i=0}^{n} a_i\xi_i = 0$. Wenn wir voraussetzen, dass N keinen anderen Punkt als V mit K gemeinsam hat, dann ist $\max_{\xi \in K_1} \sum_{i=0}^{n} a_i\xi_i = -A$, wo $A > 0$ ist; es gilt also überall in K: $\sum_{i=0}^{n} a_i\xi_i + A\xi_n \leqq 0$, $\sum_{i=0}^{n} a_i\xi_i - A\xi_n \leqq 0$. Die Hyperebenen $\sum_{i=0}^{n} a_i\xi_i + A\xi_n = 0$, $\sum_{i=0}^{n} a_i\xi_i - A\xi_n = 0$ sind also von N verschiedene Stützebenen im Punkt V und N ist offensichtlich ihre konvexe Kombination, was einen Widerspruch gibt.

2.13. *Die Konvexe abgeschlossene Menge K mit innerem Punkt soll im Punkte P_0 $n + 1$ unabhängige Stützebenen $L_i(\xi) - b_i = 0$ haben. Es sei $\mu_i > 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Dann hat die Stützebene*

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i(L_i(\xi) - b_i) = 0 \tag{11}$$

nur den Punkt P_0 mit K gemeinsam.

---

[3]) siehe z. B. [2], [4].
[4]) siehe z. B. [3].

Beweis. In jedem Punkt $P \in K$ ist $L_i(\xi) - b_i \leqq 0$; aus (11) würde also $L_i(\xi) - b_i = 0$ für alle $i = 0, 1, \ldots, n$ folgen, dieses System hat aber nur eine einzige Lösung, nämlich P_0.

3. DIE STÜTZEBENEN DES KÖRPERS K_n

3.1. Wir werden jetzt zum Körper K_n übergehen. Die Stützebenen werden wir so orientieren, dass der Ursprung, der ein innerer Punkt des Körpers K_n ist, im negativen Halbraume liegt, d.h. wir werden sie immer in der Form $L(\xi) - b = 0$ schreiben, wo $b > 0$ ist. Wir werden sie auch noch so normieren, dass $b = 1$ ist, d. h. in der Form

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i = 1 \tag{12}$$

schreiben. Wenn eine lineare Kombination der Hyperebenen (12), die den Ursprung nicht enthält, wieder in der Form (12) geschrieben ist, sieht man gleich, dass in (6) $\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_k = 1$ ist.

3.2. Wir werden jeder Hyperebene (12) den Punkt $[a_0, a_1, \ldots, a_n] \in E_{n+1}$ zuordnen, jede Hyperebene (12) kann man also als einen Punkt aus E_{n+1} betrachten. Es gilt dann der Satz:

Satz. *Es sei P_0 ein Grenzpunkt des Körpers K_n. Die Menge aller Stützebenen zum Körper K_n im Punkt P_0 ist eine (nichtleere) kompakte und konvexe, höchstens n-dimensionale, Menge. Die Hauptstützebenen sind genau alle Gipfelpunkte dieser Menge.*

Folgerung. Jede Stützebene im Punkt P_0 ist also als konvexe Kombination höchstens $n + 1$ Hauptstützebenen im Punkt P_0 darstellbar.

Beweis. 1) Die Konvexität der Menge folgt gleich aus 2.7., ebenso wie die Behauptung, dass ihre Gipfelpunkte genau die Hauptstützebenen bilden.

2) Die Abgeschlossenheit: Ist $\lim_{k \to +\infty} a_{ik} = a_i$, $\sum_{i=0}^{n} a_{ik} x_i = 1$, $\sum_{i=0}^{n} a_{ik} \xi_i \leqq 1$ überall in K_n, ist auch $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 1$, $\sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i \leqq 1$ überall in K_n, d. h. $\sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i = 1$ ist auch eine Stützebene im Punkt P_0.

3) Die Beschränktheit: Ist $a_j \neq 0$ für gewisses j, liegt der Punkt $\xi = [0, \ldots, 0, 1/a_j, 0, \ldots, 0]$ in der Hyperebene (12). Weil aber ein gewisser Würfel, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und dessen Seite gleich 2δ ist, ganz innerhalb K_n liegt, kann $|a_j|$ bei keiner Stützebene grösser als $1/\delta$ sein.

3.3. Ist eine Hyperebene (12) gegeben, die den Punkt P_0 enthält, nehmen wir eine zu dieser Hyperebene senkrechte, aus dem Punkt P_0 ausgehende und in den positiven Halbraum der Hyperebene (12) gerichtete Halbgerade, d. h. die Menge aller Punkte

$[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, wo $\xi_i = x_i + ta_i$ $(t \geqq 0;\; i = 0, 1, \ldots, n)$. Die Vereinigung aller solchen Halbgeraden, die den Stützebenen im Punkt P_0 entsprechen, nennt man den Normalenkegel zum Körper K_n im Punkt P_0. Wenn es unter den Hauptstützebenen gerade k unabhängige gibt, hat dieser Kegel die Dimension k und man sagt, dass P_0 eine k-Ecke des Körpers K_n $(1 \leqq k \leqq n + 1)$ ist; statt $(n + 1)$-Ecke sagt man kurz Ecke.

Wenn es im Punkt P_0 gerade k Hauptstützebene gibt und wenn diese Hyperebenen linear unabhängig sind, wird der Normalenkegel zu einer k-dimensionalen k-seitigen Pyramide.

3.4. Satz. *Das Polynom $P \in K_n$ soll in mindestens m $(m \leqq n + 1)$ verschiedenen Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ des Intervalles $\langle 0, 1\rangle$ die Werte ± 1 annehmen. Dann sind die Hyperebenen*[5])

$$P(\alpha_j) \sum_{i=0}^{n} \xi_i \alpha_j^i = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{13}$$

linear unabhängig und es sind die Stützebenen des Körpers K_n im Punkt P, sodass P mindestens eine m-Ecke ist.

Beweis. Die lineare Unabhängigkeit ist offensichtlich. P liegt in jeder der Hyperebenen (13) und wenn $Q \in K_n$ in der Hyperebene (13) liegt, ist für das entsprechende j $|Q(\alpha_j)| = 1$, Q ist also ein Grenzpunkt von K_n und die Hyperebenen (13) sind Stützebenen.

Folgerung. Die Tschebyscheffschen Polynome C_n und $-C_n$ sind Ecken (d. h. $(n + 1)$-Ecken).[6])

3.5. Hilfssatz. *Es sei*

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i t^i\,, \quad \max_{t \in \langle 0,1\rangle} |P(t)| = 1\,.$$

Es sei (12) eine Hyperebene, die den Punkt P enthält. Es seien $b_0, b_1, \ldots, b_n$ solche reelle Zahlen, dass

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = 0 \tag{14}$$

ist und dass für jedes α, das die Bedinungen

$$0 \leqq \alpha \leqq 1\,, \quad |P(\alpha)| = 1 \tag{15}$$

erfüllt,

$$P(\alpha) \sum_{i=0}^{n} b_i \alpha^i < 0 \tag{16}$$

ist. Dann ist (12) keine Stützebene des Körpers K_n.

---

[5]) man setzt $0^0 = 1$.

[6]) Die Definition von C_n siehe [1].

Beweis. Wir werden das Polynom

$$P_\lambda(t) = \sum_{i=0}^{n} (x_i + \lambda b_i)\, t_i = P(t) + \lambda \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \tag{17}$$

für $\lambda \geqq 0$ untersuchen; die Hyperebene (12) enthält den Punkt P, d. h. es gilt

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 1\,. \tag{18}$$

Nach (18) und (14) liegt das Polynom (17) in der Hyperebene (12). Es genügt also zu zeigen, dass für gewisses $\lambda > 0$ $\max\limits_{t \in \langle 0,1 \rangle} |P_\lambda(t)| < 1$ ist.

1) Es sei erstens P ein triviales Polynom, $P = \pm 1$ (es werden sich stets die oberen bzw. unteren Zeichen entsprechen). Nach (16) und (17) ist für $\lambda > 0$ und für alle $t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\pm P_\lambda(t) = 1 \pm \lambda \sum_{i=0}^{n} b_i t^i < 1\,;$$

im ersten Fall ist also $\max\limits_{t \in \langle 0,1 \rangle} P_\lambda(t) < 1$ (und natürlich: das Minimum wird für genügend kleine λ grösser als -1), und ähnlich im zweiten Falle.

2) Zweitens sei P nichttrivial; es seien $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$ die Punkte des Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$, in denen $|P(t)| = 1$ ist. (Es ist sicher $1 \leqq m \leqq n + 1$.)

Wir werden die Behauptung B beweisen. Es sei ein solches α gegeben, dass (15) gilt. Dann gibt es ein $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ so, dass $|P_\lambda(t)| < 1$ für $|t - \alpha| < \delta$, $0 \leqq t \leqq 1$, $0 < \lambda < \varepsilon$ ist.

Damit wird der Hilfssatz bewiesen. Man kann zu jedem α_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) die entsprechenden δ_j und ε_j finden. Es sei

$$\mathfrak{A} = \langle 0, 1 \rangle - \bigcup_{j=1}^{m} (\alpha_j - \delta_j, \alpha_j + \delta_j)\,.$$

Auf der kompakten Menge $\mathfrak{A}$ ist $\max |P(t)| < 1$; es gibt also ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $\max\limits_{t \in \mathfrak{A}} |P_\lambda(t)| < 1$ für $0 < \lambda < \varepsilon_0$ ist. Für $0 < \lambda < \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ ist also $\max\limits_{t \in \langle 0,1 \rangle} |P_\lambda(t)| < 1$.

Beweis der Behauptung B. Es sei $0 \leqq \alpha \leqq 1$ und $P(\alpha) = 1$ (für $P(\alpha) = -1$ ist der Beweis ganz ähnlich). Es gibt ein δ $(0 < \delta < 1)$ so, dass für $|t - \alpha| < \delta$, $0 \leqq t \leqq 1$ (siehe (16))

$$-\sum_{i=0}^{n} |b_i| \leqq \sum_{i=0}^{n} b_i t^i < 0\,, \quad 0 < P(t) \leqq 1$$

ist. Für

$$\lambda > 0,\ \lambda \sum_{i=0}^{n} |b_i| < 1,\ |t - \alpha| < \delta,\ 0 \leqq t \leqq 1$$

ist also nach (17) $-1 < P_\lambda(t) < 1$.

3.6. *Es sei $P \in K_n$. Wir setzen $N_\alpha(\xi) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \alpha^i$. I. Es sei P ein nichttriviales Polynom und $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots \alpha_m$ $(m > 0)$ die Punkte des Intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, in welchem $|P(t)| = 1$ ist. Genau alle Stützebenen im Punkt P sind dann durch die Formel*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \, P(\alpha_i) \, N_{\alpha_i}(\xi) = 1 \tag{19}$$

gegeben, wo $\mu_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$ ist.

II. Es sei $P = 1$ oder $P = -1$. Genau alle Stützebenen im Punkt P bekommt man dann folgenderweise: Man nimmt alle möglichen Systeme von $m + 1$ Punkten $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n+1}$ $(0 \leqq \alpha_1, \alpha_{n+1} \leqq 1)$ und für jedes System nimmt man alle Hyperebenen

$$P(0) \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i N_{\alpha_i}(\xi) = 1\,, \tag{20}$$

wo $\mu_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1$ ist.

Beweis. A. Aus 3.4. folgt, dass jede Hyperebene der Form (19) bzw. (20) eine Stützebene im Punkt P bildet.

B. I. Die in (19) auftretenden Hyperebenen

$$P(\alpha_i) \, N_{\alpha_i}(\xi) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{21}$$

sind nach 3.4 linear unabhängig. Wir werden zuerst beweisen, dass jede Stützebene im Punkt P die Form

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \, P(\alpha_i) \, N_{\alpha_i}(\xi) = 1 \tag{22}$$

mit gewissen reellen μ_i hat. Für $m = n + 1$ ist es klar (es gibt nicht mehr als $n + 1$ linear unabhängige Hyperebenen im Punkt P). Es sei also $0 < m \leqq n$.

Es sei (12) eine Hyperebene, die den Punkt P enthält, d. h. es gelte (18). Wenn das System der $m + 1$ Beziehungen (für $n + 1 \geqq m + 1$ Unbekannte $b_0, b_1, \dots, b_n$)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = 0\,, \quad P(\alpha_j) \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i b_i < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \tag{23}$$

eine Lösung hat, ist nach dem Hilfsatz 3.5. die Hyperebene (12) keine Stützebene. Hat aber die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \\ 1, \ \alpha_1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 1, \ \alpha_m, \alpha_m^2, \dots, \alpha_m^n \end{pmatrix}$$

den Rang $m + 1$, dann hat das System (23) eine Lösung, weil z. B. das System

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i b_i = -P(\alpha_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

eine Lösung hat. Wenn also (12) eine Stützebene sein soll, muss M den Rang $\leqq m$ haben, so dass

$$\begin{vmatrix} a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_{m+i} \\ 1, \ \alpha_1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^{m-1}, \alpha_1^{m+i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, \ \alpha_m, \alpha_m^2, \ldots, \alpha_m^{m-1}, \alpha_m^{m+i} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, n - m$$

sein muss. Das sind aber $n - m + 1$ Gleichungen für $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und diese Gleichungen sind linear unabhängig, weil der Koeffizient bei a_{m+i} von Null verschieden ist. Deshalb hat dieses System gerade m linear unabhängige Lösungen, d.h. es gibt höchstens m linear unabhängige Hyperebenen, die den Punkt P enthalten. Wir haben aber schon in (21) ein System von m linear unabhängigen Hyperebenen gefunden. Jede den Punkt P enthaltende Stützebene hat also wirklich die Gleichung der Form (22).

Die Bedingung, dass die Hyperebene (22) den Punkt P enthält, ist

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\,, \tag{24}$$

denn $\sum_{i=1}^{m} \mu_i \, P(\alpha_i) \, N_{\alpha_i}(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$. Es sei eine der Zahlen μ_i negativ. (Es ist also $m \geqq 2$ und eine andere von den Zahlen μ_i ist positiv.) Wir werden beweisen, dass dann die Hyperebene (22) mit der Bedingung (24) keine Stützebene ist. Damit wird der Beweis beendet sein.

Offensichtlich gibt es negative Zahlen A_i so, dass $\sum_{i=1}^{m} \mu_i A_i = 0$ ist. Wählen wir die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_n$ so, dass

$$P(\alpha_i) \sum_{j=0}^{n} b_j \alpha_i^j = A_i < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ist; dass ist sicher möglich, denn es ist $m \leqq n + 1$. Die Hyperebene (22) hat die Form (12), wo $a_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \, P(\alpha_i) \, \alpha_i^j$ ist, so dass die Bedingung (14) aus 3.5. erfüllt ist. Nach dem Hilfsatz 3.5. ist also (22) keine Stützebene.

II. Es sei $P = 1 = [1, 0, \ldots, 0]$. Es genügt zu beweisen, dass alle Hauptstützebenen im Punkt P die Form

$$N_\alpha = 1\,, \quad \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \tag{25}$$

haben, denn alle anderen Stützebenen sind konvexe Kombinationen von Hauptstützebenen.

Wir beweisen zuerst folgende Behauptung. *Es gibt ein $\delta > 0$ so, dass der Durchschnitt $K_n \cap \Omega$ ($\Omega = \Omega(P, \delta)$ ist die abgeschlossene Kugel mit dem Halbmesser δ und dem Mittelpunkt P) die Vereinigung der Linienabschnitte mit dem Anfangspunkt P ist, deren Endpunkt an der Grenze von Ω liegt; dabei ist für jedes $\bar{P} \in \Omega$*

$$\min_{t \in \langle 0,1 \rangle} \bar{P}(t) > -1 \, .$$

Beweis. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass für $\bar{P} \in \Omega$

$$\min_{t \in \langle 0,1 \rangle} \bar{P}(t) > -1$$

ist. Für jeden Punkt $\bar{P} \in K_n \cap \Omega$, der von P verschieden ist, konstruieren wir den Abschnitt der Länge δ mit dem Anfangspunkt P, der den Punkt $\bar{P}$ enthält. Die Vereinigung aller dieser Linienabschnitte ist eine gewisse Menge $M \supset K_n \cap \Omega$, $M \subset \Omega$. Wenn wir noch beweisen, dass $M \subset K_n \cap \Omega$, sind wir fertig. Es sei also $P_0 \in M$. Auf der Halbgeraden PP_0 liegt also ein Punkt $Q \in K_n \cap \Omega$. Es ist $P = 1$, $|Q(t)| \leqq 1$ für $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $P_0 = P + \lambda(Q - P)$, $\lambda \geqq 0$. Es ist $Q(t) - P(t) \leqq 0$, daraus folgt $P_0(t) \leqq 1$ für $t \in \langle 0, 1 \rangle$; weiter ist $P_0 \in \Omega$, also $P_0(t) \geqq -1$ für $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Es ist also $P_0 \in K_n \cap \Omega$.

Da wir wissen, dass alle Hyperebenen (25) Stützebenen im Punkt 1 bilden (siehe 3.4) und dass man unter ihnen $n + 1$ linear unabhängige Stützebenen wählen kann, gibt es nach 2.13 im Punkt P eine Stützebene N_0, die mit K_n nur den Punkt P gemeinsam hat. Bilden wir in dem Gipfel P einen Kegel C, und zwar so, dass man alle Halbgeraden nimmt, die P mit Punkten der Menge $K_n \cap \Omega$ verbinden. Aus der Konvexität des Körpers K_n folgt, dass $C \supset K_n$ ist. Offensichtlich ist auch $K_n \cap \Omega = C \cap \Omega$, nach 2.9 haben also K_n und C in jedem ihren Punkt, der innerhalb Ω liegt, dieselben Stützebenen und deswegen auch dieselben Hauptstützebenen. Es sei jetzt N irgendeine Hauptstützebene zu K_n (also auch zu C) im Punkt P. Nach 2.12 gibt es einen Punkt $P_0 \neq P$, der innerhalb Ω liegt, in dem N eine Hauptstützebene zu C und also auch zu K_n ist; nach 3.6.I hat also N die Gleichung $P_0(\alpha) N_\alpha = 1$, wo $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, $P_0(\alpha) = \pm 1$ ist, nach der Wahl von Ω ist aber $P_0(\alpha) = 1$.

Der Fall $P = -1$ folgt gleich aus dem Fall $P = 1$ und aus der Symmetrie des Körpers K_n.

3.7. Satz. *Wenn das Polynom $P \in K_n$ die Werte ± 1 genau in m ($1 \leqq m \leqq n + 1$) verschiedenen Punkten des Intervalles $\langle 0, 1 \rangle$ annimmt, dann ist P eine m-Ecke.*

Beweis. Aus 3.4. folgt, dass P mindestens eine m-Ecke ist, und aus 3.6.I. folgt, das P höchstens eine m-Ecke ist.

3.8. Wir wissen schon, dass alle Hauptstützebenen zum Körper K_n die Form $N_\alpha = \pm 1$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ haben. Für $n \geqq 2$ gilt auch umgekehrt, dass jede solche Hyperebene eine Hauptstützebene bildet. Man kann nämlich leicht ein Polynom zweiten Grades bilden, das im Punkt α den Wert 1 (resp. -1) annimmt und in allen anderen Punkten des Intervalles $\langle 0, 1\rangle$ den Absolutbetrag kleiner als 1 hat. Im Punkt P ist dann nach 3.6.I. $N_\alpha = 1$ (resp. $N_\alpha = -1$) die einzige und deswegen die Hauptstützebene.

3.9. Aus 3.8. und 3.3. folgt: Ist $P \neq \pm 1$ eine k-Ecke, bildet der Normalenkegel in P eine k-dimensionale Pyramide, die man leicht bestimmen kann, wenn man alle Wurzeln der Gleichungen $P(t) = 1$, $P(t) = -1$ im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ kennt. Für $P = \pm 1$ ist der Normalenkegel mehr kompliziert.

4. DER POLARE KÖRPER

4.1. Der polare Körper $H_n \subset E_{n+1}$ zu K_n ist folgenderweise definiert:[7]) Man nimmt alle Stützebenen $\sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i = 1$ des Körpers K_n; die Punkte $[a_0, a_1, \ldots, a_n] \in E_{n+1}$ bilden die Grenze eines gewissen Körpers H_n, der offensichtlich den Mittelpunkt im Ursprung hat. Wir haben schon gesehen, dass (für $n \geqq 2$) alle Hyperebenen $\pm \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \xi_i = 1$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ Stützebenen des Körpers K_n sind (siehe 3.8.) und dass alle Stützebenen ihre konvexe Kombinationen sind (siehe 3.6.).

H_n ist also die konvexe Hülle[7]) der Vereinigung von zwei Kurven

$$+ [1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n],\ \alpha \in \langle 0, 1\rangle\ ; \quad - [1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n],\ \alpha \in \langle 0, 1\rangle \tag{26}$$

und alle Gipfelpunkte des Körpers H_n sind unter den Punkten (26) enthalten. Im Fall $n = 1$ sind nicht alle Punkte dieser Kurven Gipfelpunkte, sondern offensichtlich nur die vier Endpunkte (es handelt sich um zwei Linienabschnitte). Im Fall $n = 0$ gehen die Kurven (26) in zwei Punkte ± 1 über. Es gilt dann der Satz:

4.2. Satz. *Alle Punkte* (26) *bilden für $n \neq 1$ Gipfelpunkte des Körpers H_n.*

Beweis. Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Es sei $n \geqq 2$. Der Punkt $(\beta) = [1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^n]$ sei kein Gipfelpunkt. Dann ist (β) eine lineare Kombination m linear unabhängiger Punkte der Form (26), die alle von (β) verschieden sind, mit positiven Koeffizienten μ_j, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m = 1$, $2 \leqq m \leqq n + 2$. Daraus ist klar, dass alle diese Punkte notwendig die Form $+ [1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n]$ haben müssen. Diese Punkte liegen aber in der Hyperebene $\xi_0 = 1$ und sind linear unabhängig, es ist also $m \leqq n + 1$.

Es geht also darum, ob man die Gleichungen $\sum_{i=1}^{m} \mu_i \alpha_i^j = \beta^j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ mit positiven Zahlen μ_i erfüllen kann, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ voneinander verschieden sind und $2 \leqq m \leqq n + 1$ ist.

[7]) siehe [2].

Dieses System ist aber nur dann lösbar, wenn die Matrix M und die Matrix N,

$$M = \begin{pmatrix} 1, & 1, & .., & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n, & \alpha_2^n, & \ldots, & \alpha_m^n \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n, & \alpha_2^n, & \ldots, & \alpha_m^n, & \beta^n \end{pmatrix}$$

denselben Rang haben. Das kann aber nur im Fall $m = n + 1$ geschehen. In diesem Falle kann man aber die Zahlen μ_j $(j = 1, 2, \ldots, n + 1)$ nach der Regel von Cramer ausrechnen (als $V(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ wird die Vandermondsche Determinante der Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ bezeichnet):

$$\mu_j = \frac{V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \beta, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{n+1})}{V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})} \quad (j = 1, 2, \ldots, n + 1).$$

Denkt man sich die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ der Grösse nach geordnet, dann gilt für ein gewisses k $(k = 0, 1, \ldots, n + 1)$: $\alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \beta < \alpha_{k+1} < \ldots < \alpha_{n+1}$. Es ist dann $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) > 0$, und deswegen ist für $k - 1 \geqq 1$

$$\operatorname{sgn} \mu_{k-1} = \operatorname{sgn} V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-2}, \beta, \alpha_k, \ldots, \alpha_{n+1}) = -1,$$

was einen Widerspruch bietet. Ist aber $k - 1 \leqq 0$, ist $k + 2 \leqq 3 \leqq n + 1$, und dann ist

$$\operatorname{sgn} \mu_{k+2} = \operatorname{sgn} V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}, \beta, \alpha_{k+3}, \ldots, \alpha_{n+1}) = -1$$

– was wieder ein Widerspruch ist. (β) ist also ein Gipfelpunkt. Nachdem H_n symmetrisch um den Ursprung liegt, ist auch $-(\beta)$ ein Gipfelpunkt.

Literatur

[1] *Petrův:* Der Körper der im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ gleichmässig beschränkten Polynome. Čas. pro pěst. mat. 91 (1966), 34–52.

[2] *Bonnesen-Fenchel:* Theorie der konvexen Körper, Berlín, Springer-Verlag, 1934.

[3] *Steinitz:* Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. Crelle Journal, *143*, *144* und *146*.

[4] *Klee:* Some characterisations of convex polyhedra. Acta math. *102* (1959), 79–107.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Výtah

OPĚRNÉ NADROVINY TĚLESA POLYNOMŮ STEJNĚ OMEZENÝCH NA KOMPAKTNÍM INTERVALU

VLADIMÍR PETRŮV, Praha

V práci jsou vyšetřovány opěrné nadroviny konvexního tělesa K_n, tj. opěrné nadroviny množiny všech polynomů

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i t^i \,, \tag{1}$$

pro něž platí

$$\max_{t \in \langle 0,1 \rangle} |P(t)| \leqq 1 \,. \tag{2}$$

(Každý polynom (I) ztotožníme s bodem $[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in E_{n+1}$.) Pro těleso K_n jsou dokázány tyto věty:

Věta 1. *Budiž $P \in K_n$. Položme $N_\alpha(\xi) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \alpha^i$.*

I. Budiž $P \neq \pm 1$ a buďtež $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$ $(m > 0)$ všechny body intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, v nichž je $|P(t)| = 1$. Pak právě všechny opěrné nadroviny v bodě P jsou dány vzorcem

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \, P(\alpha_i) \, N_{\alpha_i}(\xi) = 1 \,,$$

kde $\mu_i \geqq 0$, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m = 1$.

II. Budiž $P = 1$ nebo $P = -1$. Pak právě všechny opěrné nadroviny v bodě P dostaneme takto: Vezmeme všechny možné systémy $n + 1$ bodů $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n+1}$ $(0 \leqq \alpha_1, \alpha_{n+1} \leqq 1)$ a pro každý systém vezmeme všechny nadroviny

$$P(0) \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \, N_{\alpha_i}(\xi) = 1 \,,$$

kde $\mu_i \geqq 0$, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n+1} = 1$.

Věta 2. *Jestliže polynom $P \in K_n$ nabývá hodnot ± 1 v alespoň $m \leqq n + 1$ různých bodech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, pak nadroviny $P(\alpha_j) \, N_{\alpha_j}(\xi) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ jsou lineárně nezávislými opěrnými nadrovinami v bodě P.*

Odtud plyne: Nabývá-li polynom $P \in K_n$ hodnot ± 1 v právě m $(1 \leqq m \leqq n + 1)$ různých bodech intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, pak P je m-roh.

Všechny hlavní opěrné nadroviny tělesa K_n jsou právě nadroviny $N_\alpha = \pm 1$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ (pro $n \geqq 2$). Je-li $P \neq \pm 1$ m-rohem, je kužel normál v bodě P m-rozměrným jehlanem, který se dá snadno stanovit z kořenů rovnic $P(t) = 1$ a $P(t) = -1$, které leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Těleso polární k tělesu K_n je konvexním obalem sjednocení dvou křivek: $+ [1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n]$, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ a $- [1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n]$, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Pro $n = 1$ jsou vrcholy tohoto polárního tělesa dány právě čtyřmi koncovými body těchto křivek; pro $n = 0$ degenerují tyto křivky na body $+1$ a -1, které jsou jedinými vrcholy. Pro $n \neq 1$ jsou pak všechny body obou křivek vrcholy polárního tělesa.

Резюме

ОПОРНЫЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ ФИГУРЫ МНОГОЧЛЕНОВ, РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫХ НА КОМПАКТНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

ВЛАДИМИР ПЕТРУВ (Vladimír Petrův), Прага

В работе рассматриваются опорные гиперплоскости выпуклой фугуры K_n, т. е. множества всех многочленов

$$(1) \qquad P(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i t^i ,$$

для которых правильно неравенство

$$(2) \qquad \max_{t \in \langle 0,1\rangle} |P(t)| \leqq 1 .$$

(Каждый многочлен (1) отождествлен с точкой $[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] \in E_{n+1}$.) Для фигуры K_n доказываются теоремы:

Теорема: *Пусть $P \in K_n$. Обозначим $N_\alpha(\xi) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \alpha^i$.*

I. Если $P \neq \pm 1$ и если $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$ $(m > 0)$ суть все точки промежутка $\langle 0, 1\rangle$, для которых $|P(t)| = 1$, то формула

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \, P(\alpha_i) \, N_{\alpha_i}(\xi) = 1 ,$$

где $\mu_i \geqq 0$, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m = 1$, выражает как раз все опорные гиперплоскости в точке P.

II. Если $P = 1$ или $P = -1$, то можно следующим образом получить точно все опорные в точке P гиперплоскости: Возьмем все возможные системы $n + 1$ точек $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n+1}$ $(0 \leqq \alpha_1, \alpha_{n+1} \leqq 1)$ и для каждой из них построим все гиперплоскости $P(0) \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i N_{\alpha_i}(\xi) = 1$, где $\mu_i \geqq 0$, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m = 1$.

Теорема: *Если многочлен $P \in K_n$ достигает по крайней мере в $m \leqq n + 1$ раз-*

ных точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ значений ± 1, то гиперплоскости $P(\alpha_j)\, \dot{N}_{\alpha_j}(\xi) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ будут линейно независимыми опорными гиперплоскостями в точке P.

Следовательно, если многочлен P достигает значений ± 1 именно в m $(1 \leqq m \leqq m + 1)$ разных точках промежутка $\langle 0, 1\rangle$, то P является m-углом.

Все главные опорные гиперполоскости фигуры K_n — это именно гиперплоскости $N_\alpha = \pm 1$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Если $P \neq \pm 1$ является m-углом, то конус нормалей в точке P будет m-мерной пирамидой, которая легко определяется из корней уравнений $P(t) = 1$ и $P(t) = -1$ в промежутке $\langle 0, 1\rangle$.

Полярная к K_n фигура есть выпуклая оболочка объединения двух кривых: $+ [1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n]$, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ и $- [1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n]$, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. В случае $n = 1$ вершинами полярной фигуры являются именно 4 конца этих кривых, в случае $n = 0$ кривые переходят в точки $+1$ и -1, которые являются единственными вершинами. В случае $n \neq 1$ все точки этих кривых являются вершинами полярной фигуры.