Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Sedláček

O kostrách konečných grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 2, 221--227

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108107`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

O KOSTRÁCH KONEČNÝCH GRAFŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 28. srpna 1965)

Tento příspěvek obsahuje čtyři věty o počtu koster konečného neorientovaného grafu a jednu větu o počtu koster navzájem duálních rovinných multigrafů.

Grafem rozumíme v tomto příspěvku konečný neorientovaný graf bez smyček. Základní pojmy z teorie grafů jsou definovány např. v knížce [7]; v tomto příspěvku užíváme též stejnou symboliku jako v [7]. Pro stručnost vyjadřování označme $k(\mathscr{G})$ počet koster grafu $\mathscr{G}$. Z literatury je známo, že $k(\mathscr{G})$ lze určit tím, že vypočteme vhodný determinant (viz např. [3], [8]). Nechť je dáno přirozené číslo n. Označme A_n množinu všech přirozených čísel m takových, že existuje graf $\mathscr{G} = [U, H]$ splňující vztahy $|U| = n$, $k(\mathscr{G}) = m$. Snadným výpočtem se přesvědčíme, že platí

$$A_1 = A_2 = \{1\}\,, \quad A_3 = \{1, 3\}\,, \quad A_4 = \{1, 3, 4, 8, 16\}\,,$$

$$A_5 = \{1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 16, 20, 21, 24, 40, 45, 75, 125\}\,.$$

Je vidět, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \neq A_{n+1}$. Pro zápis množiny A_n (při $n \geqq 3$) si smluvme označení $A_n = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r\}$, přičemž $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_r$. Je triviální, že $x_1 = 1$, a že $x_i = i + 1$ pro $2 \leqq i \leqq n - 1$. Podle známého CAYLEYHO vzorce platí dále $x_r = n^{n-2}$. Ve větě 1 nás zajímají „mezery" v množině A_n.

Věta 1. *Nechť $n \geqq 8$. Potom platí* $x_{r-1} = (n-2)\, n^{n-3}$, $x_{r-2} = (n-2)^2\, n^{n-4}$, $x_{r-3} = (n-1)(n-3)\, n^{n-4}$, $x_{r-4} = (n-2)^3\, n^{n-5}$, $x_{r-5} = (n-3)(n-2) \,.\, (n-1)\, n^{n-5}$, $x_{r-6} = (n-2)(n^2 - 4n + 2)\, n^{n-5}$, $x_{r-7} = (n-3)^2\, n^{n-4}$, $x_{r-8} = (n-4)(n-1)^2\, n^{n-5}$, $x_{r-9} = (n-2)^4\, n^{n-6}$.

Důkaz. Označme $\mathscr{U}_n$ úplný graf s n uzly, odstraňme z $\mathscr{U}_n$ po řadě 1, 2, 3 a 4 hrany a pro příslušný graf vypočtěme vždy počet koster. Výsledek jsme sestavili do tabulky; uzly zde značíme u_i, přičemž si smluvíme, že různým indexům odpovídají různé uzly. Při odstraňování daného počtu hran je ovšem nutno zachytit všechny případy (vzhledem k izomorfismu).

graf	odstraněné hrany	počet koster
$\mathscr{G}_1$	u_1u_2	$(n-2)\,n^{n-3}$
$\mathscr{G}_2$	u_1u_2, u_3u_4	$(n-2)^2\,n^{n-4}$
$\mathscr{G}_3$	u_1u_2, u_1u_3	$(n-1)(n-3)\,n^{n-4}$
$\mathscr{G}_4$	u_1u_2, u_3u_4, u_5u_6	$(n-2)^3\,n^{n-5}$
$\mathscr{G}_5$	u_1u_2, u_1u_3, u_4u_5	$(n-3)(n-2)(n-1)\,n^{n-5}$
$\mathscr{G}_6$	u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4	$(n-2)(n^2-4n+2)\,n^{n-5}$
$\mathscr{G}_7$	u_1u_2, u_2u_3, u_3u_1	$(n-3)^2\,n^{n-4}$
$\mathscr{G}_8$	u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4	$(n-4)(n-1)^2\,n^{n-5}$
$\mathscr{G}_9$	$u_1u_2, u_3u_4, u_5u_6, u_7u_8$	$(n-2)^4\,n^{n-6}$
$\mathscr{G}_{10}$	$u_1u_2, u_3u_4, u_5u_6, u_5u_7$	$(n-1)(n-2)^2(n-3)\,n^{n-6}$
$\mathscr{G}_{11}$	$u_1u_2, u_1u_3, u_4u_5, u_4u_6$	$(n-1)^2(n-3)^2\,n^{n-6}$
$\mathscr{G}_{12}$	$u_1u_2, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_6$	$(n-2)^2(n^2-4n+2)\,n^{n-6}$
$\mathscr{G}_{13}$	$u_1u_2, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_3$	$(n-2)(n-3)^2\,n^{n-5}$
$\mathscr{G}_{14}$	$u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5$	$(n^2-5n+5)(n^2-3n+1)\,n^{n-6}$
$\mathscr{G}_{15}$	$u_1u_2, u_3u_4, u_3u_5, u_3u_6$	$(n-1)^2(n-2)(n-4)\,n^{n-6}$
$\mathscr{G}_{16}$	$u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1$	$(n-2)^2(n-4)\,n^{n-5}$
$\mathscr{G}_{17}$	$u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4, u_4u_5$	$(n-1)(n^3-7n^2+13n-5)\,n^{n-6}$
$\mathscr{G}_{18}$	$u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_2$	$(n-4)(n-3)(n-1)\,n^{n-5}$
$\mathscr{G}_{19}$	$u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4, u_1u_5$	$(n-1)^3(n-5)\,n^{n-6}$

Můžeme se přesvědčit, že $k(\mathscr{G}_1) > k(\mathscr{G}_2) > k(\mathscr{G}_3) > \ldots > k(\mathscr{G}_{18}) > k(\mathscr{G}_{19})$. Odstraníme-li z $\mathscr{U}_n$ aspoň 5 hran, dostaneme graf $\mathscr{G}$, který je izomorfní s podgrafem některého ze grafů $\mathscr{G}_9, \mathscr{G}_{10}, \mathscr{G}_{11}, \ldots, \mathscr{G}_{19}$. Z toho plyne $k(\mathscr{G}) \leqq k(\mathscr{G}_i)$ pro některé $i \in \langle 9, 19 \rangle$, takže jistě je $k(\mathscr{G}) \leqq k(\mathscr{G}_9)$. Tím je důkaz podán.

Z důkazu věty 1 je patrné, že bychom obdobným způsobem mohli počítat prvky $x_{r-10}, x_{r-11}, \ldots$, přičemž by jen stoupala náročnost na numerické výpočty. Ještě poznamenejme, že by bylo zajímavé znát závislost počtu prvků množiny A_n na čísle n.

Víme, že $|A_1| = |A_2| = 1$, $|A_3| = 2$, $|A_4| = 5$, $|A_5| = 16$ a z věty 1 lze odvodit i hrubý horní odhad pro $|A_n|$.

Dále odvodíme odhad pro počet koster, je-li znám počet uzlů a chromatické číslo.

Věta 2. *Nechť graf $\mathcal{G}$ má n uzlů a chromatické číslo $c \geqq 2$. Potom platí*

$$k(\mathcal{G}) \leqq n^{n-2} \left(\frac{c-1}{c} \right)^{n-c} . \tag{1}$$

Důkaz. Označme U_i množinu těch uzlů, jež odpovídají i-té barvě ($i = 1, 2, \ldots, c$) a sestrojme nový graf $\mathcal{G}^* = [U, H]$, kde $U = \bigcup_{i=1}^{c} U_i$ a kde pro každé $x \in U_i$, $y \in U_j$ ($i \neq j$) platí $xy \in H$. Je vidět, že $k(\mathcal{G}) \leqq k(\mathcal{G}^*)$. Počet koster grafu $\mathcal{G}^*$ je z literatury znám (viz [1])[1]); položíme-li $|U_i| = n_i$, potom je

$$k(\mathcal{G}^*) = n^{c-2} \prod_{i=1}^{c} (n - n_i)^{n_i - 1} . \tag{2}$$

Číslo $k(\mathcal{G}^*)$ závisí na proměnných n_i a vyšetříme proto maximum této funkce vázané podmínkou $\sum_{i=1}^{c} n_i = n$, přičemž $0 < n_i < n$. Dá se ukázat, že maximum nastává pro $n_1 = n_2 = \ldots = n_c = n/c$. Dosadíme-li toto do pravé strany vzorce (2), dostáváme již odhad (1) a důkaz je podán.

Obraťme se k další problematice. Nechť je dán souvislý graf $\mathcal{G}$. Máme určit soustavu $K = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_r\}$ koster grafu $\mathcal{G}$ s těmito vlastnostmi: I. Každé dvě různé kostry jsou hranově disjunktní. II. Soustava K má maximální počet prvků. Zajímá nás počet prvků množiny K, tedy číslo $|K|$. V literatuře byly odvozeny podmínky, kdy lze grafu „vepsat" daný počet hranově disjunktních koster. Pokud vím, vyjádření čísla $|K|$ nebylo zatím odvozeno. Zde si ukážeme jeden výsledek pro speciální případ grafu $\mathcal{G}$.

Věta 3. *Nechť $\mathcal{U}_n$ je úplný graf s n uzly ($n \geqq 2$). Potom platí $|K| = [n/2]$.*

Důkaz. Každá kostra grafu $\mathcal{U}_n$ má $n - 1$ hran takže platí $(n - 1)|K| \leqq \frac{1}{2}n(n-1)$ čili $|K| \leqq [\frac{1}{2}n]$. Zbývá tedy dokázat, že v $\mathcal{U}_n$ vždy existuje soustava koster, jež má $[\frac{1}{2}n]$ prvků. Pro $n = 2$ a $n = 3$ je to zřejmé. Dejme tomu, že tvrzení je správné až do přirozeného čísla $n \geqq 3$. V grafu $\mathcal{U}_{n+1}$ zvolíme dva různé uzly, jež označíme u_n, u_{n+1}. Ty odstraníme z grafu $\mathcal{U}_{n+1}$ spolu se všemi hranami, jež s nimi incidují. Ve zbylém grafu U_{n-1} lze najít soustavu K' koster, jež má $[\frac{1}{2}(n-1)]$ prvků.

[1]) Vzorec (2) je zobecněním vzorce pro počet koster tzv. úplného sudého grafu, který jsme r. 1958 odvodili v práci [3]. Pro úplnost uvádíme, že počet koster úplného sudého grafu počítali později a nezávisle na práci [3] též H. I. Scoins a S. Glicksman (Proc. Cambridge Philos. Soc., 58 (1962), 12—16; 59 (1963), 509—517). Poznamenejme ještě, že vzorec (2) odvodila nezávisle na práci [1] též I. Rohlíčková a referovala o něm v květnu 1961 na celostátním semináři z teorie grafů v Liblicích.

Chceme sestavit soustavu K pro graf $\mathscr{U}_{n+1}$. Množinu uzlů grafu $\mathscr{U}_{n-1}$ vyjádříme jako $V_1 \cup V_2 \cup V_3$, kde V_1, V_2, V_3 jsou po dvou disjunktní a platí $|V_1| = |V_2| = [\frac{1}{2}(n - 1)]$ (pro n liché resp. sudé je tedy $|V_3| = 0$ resp. 1). Očíslujme též prvky soustavy K' čísly $1, 2, 3, \ldots, [\frac{1}{2}(n - 1)]$. Nyní i-tou kostru z K' doplníme dvěma hranami xu_n, yu_{n+1} (kde $x \in V_1$, $y \in V_2$) a dvěma uzly u_n, u_{n+1}. Provedeme-li to pro každé $i = 1, 2, \ldots, [\frac{1}{2}(n - 1)]$, vidíme, že jsme tak sestrojili $[\frac{1}{2}(n - 1)]$ koster grafu $\mathscr{U}_{n+1}$, přičemž tyto kostry jsou po dvou hranově disjunktní. Abychom dostali K, musíme sestrojit ještě jednu kostru. Její hrany jsou $u_n u_{n+1}$, xu_{n+1}, yu_n pro každé $x \in V_1$ a každé $y \in V_2 \cup V_3$. Tím je důkaz podán.

Začneme-li v souvislém grafu $\mathscr{G}$ sestrojovat kostru tím, že vyjdeme z nějakého stromu $\mathscr{S}$ obsaženého v $\mathscr{G}$, lze konstrukci dokončit různými způsoby. Pro graf $\mathscr{U}_n$ si v dalším zjistíme, kolika způsoby je to možné. Snad trochu překvapující ve větě 4 je to, že (v tomto speciálním případě) počet možností nezávisí na struktuře stromu $\mathscr{S}$, nýbrž jen na počtu uzlů.

Věta 4. *Nechť $\mathscr{U}_n$ je úplný graf s n uzly. Nechť $\mathscr{S} = [U, H]$ je jeho podgraf, přičemž $|U| = s$. Nechť $\mathscr{S}$ je strom. Potom graf $\mathscr{U}_n$ obsahuje právě sn^{n-s-1} koster takových, že každá z nich obsahuje $\mathscr{S}$ jako podgraf.*

Důkaz. Vyjdeme z grafu $\mathscr{U}_n$ a sestrojíme orientovaný graf $\vec{\mathscr{U}}_n$ takto: každou hranu xy nahradíme dvojicí orientovaných hran $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{yx}$. V práci [3] jsme definovali pojem W-báze orientovaného grafu. Všimněme si všech W-bází grafu $\vec{\mathscr{U}}_n$, jejichž prameny tvoří právě množina U. Je vidět, že počet těchto W-bází se rovná počtu koster grafu $\mathscr{U}_n$, jež obsahují $\mathscr{S}$ jako podgraf. V citované práci je udána metoda, jak lze počet W-bází určit. Jde při tom o výpočet vhodného determinantu, jenž má v našem případě stupeň $n - s$, v hlavní diagonále jsou čísla $n - 1$ a všechny ostatní prvky jsou -1. Odtud již plyne naše tvrzení.

Nyní se budeme zabývat (konečnými) rovinnými multigrafy a připomeneme si pojem dvou *navzájem duálních*[2]) multigrafů, jež studoval např. již H. WHITNEY. Protože se zajímáme o kostry těchto multigrafů[3]), omezíme se jen na multigrafy souvislé a nepřipouštíme ani smyčky ani mosty. Přesně vzato, měli bychom rozlišovat mezi abstraktně definovaným multigrafem a jeho obrazem v rovině a mluvit (v důkaze věty 5) vždy o obraze uzlu, obraze hrany apod. Pro stručnost však od tohoto vyjadřování upouštíme v případě, nemůže-li dojít k nedorozumění. Jsou-li $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$ dva navzájem duální multigrafy a je-li h hrana z $\mathscr{M}_1$, pak h^* označíme tu hranu z $\mathscr{M}_2$, jež v rovinném znázornění protíná h (tento způsob označení viz [2]).

Věta 5. *Nechť $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ jsou konečné souvislé rovinné multigrafy bez smyček a mostů. Jsou-li $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$ navzájem duální, potom platí $k(\mathscr{M}_1) = k(\mathscr{M}_2)$.*

Důkaz. Zvolme v $\mathscr{M}_1$ libovolnou kostru $\mathscr{K}_1$ a definujme faktor $\mathscr{K}_2$ multigrafu $\mathscr{M}_2$

[2]) V ruském překladu BERGEOVY knihy [2] se na str. 236 užívá názvu двойственный граф.

[3]) Počet koster multigrafu $\mathscr{M}$ budeme obdobně značit $k(\mathscr{M})$.

takto. Je-li h hrana z $\mathscr{M}_1$, pak h^* je hrana z $\mathscr{K}_2$ právě tehdy, není-li h z $\mathscr{K}_1$. Dokážeme, že $\mathscr{K}_2$ je kostra multigrafu $\mathscr{M}_2$. Musíme tedy zjistit, zda $\mathscr{K}_2$ neobsahuje žádné kružnice a je souvislé. Kdyby $\mathscr{K}_2$ obsahovalo kružnici $\mathscr{C}$, pak by $\mathscr{C}$ dělilo rovinu na dvě oblasti. Uvnitř jedné i druhé bychom měli zobrazeny uzly z $\mathscr{M}_1$. Protože $\mathscr{K}_1$ je souvislé, mohli bychom najít hranu h z $\mathscr{K}_1$, jež protíná h^* z $\mathscr{K}_2$ (spor). Nyní k souvislosti $\mathscr{K}_2$. Dejme tomu, že $\mathscr{K}_2$ není souvislé; vyhledejme jednu jeho komponentu a označme ji $\mathscr{K}_2^0$. Uzlům z $\mathscr{K}_2^0$ odpovídají v rovině oblasti, jejichž sjednocení je rovněž oblast v rovině; označme ji Ω. Všimněme si hran, jež jsou zobrazeny na hranici Ω. Všechny tyto hrany nemohou patřit do $\mathscr{K}_1$, neboť $\mathscr{K}_1$ je strom a neobsahuje tedy kružnici. Proto na hranici Ω najdeme hranu h nepatřící do $\mathscr{K}_1$. Hrana h^* tedy patří do $\mathscr{K}_2$. To však je spor s tím, jak byla vybrána komponenta $\mathscr{K}_2^0$. Shrnujeme: $\mathscr{K}_2$ je kostra multigrafu $\mathscr{M}_2$.

V předcházejících řádcích jsme vlastně definovali zobrazení φ množiny koster multigrafu $\mathscr{M}_1$ do množiny koster multigrafu $\mathscr{M}_2$. Abychom zjistili, že je $k(\mathscr{M}_1) = K(\mathscr{M}_2)$, stačí, abychom se přesvědčili, že φ je prosté zobrazení na množinu. Zvolme dvě různé kostry $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_1'$ z $\mathscr{M}_1$. V $\mathscr{M}_1$ lze tedy najít hranu h patřící do $\mathscr{K}_1$ a nepatřící do $\mathscr{K}_1'$. Přejdeme-li ke kostrám $\mathscr{K}_2$, $\mathscr{K}_2'$ multigrafu $\mathscr{M}_2$, pak h^* nepatří do $\mathscr{K}_2$ a patří do $\mathscr{K}_2'$. Tyto kostry jsou tedy též různé. Je φ zobrazení na množinu? V $\mathscr{M}_2$ zvolíme kostru $\mathscr{K}_2$ a definujeme $\mathscr{K}_1$ v $\mathscr{M}_1$ tím, že h zařadíme do $\mathscr{K}_1$ právě tehdy, nepatří-li h^* do $\mathscr{K}_2$. Je vidět, že $\mathscr{K}_1$ je kostra v $\mathscr{M}_1$, kterou φ zobrazí na $\mathscr{K}_2$. Je tedy φ prosté zobrazení na množinu a důkaz je podán.

Práci zakončíme dvěma otevřenými otázkami:

I. Určete maximální resp. minimální počet koster pravidelného souvislého grafu třetího stupně s $2n$ uzly. (Lze formulovat též obecněji pro pravidelný graf k-tého stupně.)

II. Je zřejmé, že existují dva komplementární grafy $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$ takové, že $k(\mathscr{G}_1) = k(\mathscr{G}_2)$. Příkladem může být dvojice izomorfních komplementárních grafů[4]), jimiž se zabývali R. C. Read, G. Ringel, H. Sachs a B. Zelinka. Rozhodněte, zda vztah $k(\mathscr{G}_1) = k(\mathscr{G}_2)$ může platit i pro takovou dvojici komplementárních grafů $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$, jež nejsou izomorfní.

Literatura

[1] *T. Austin:* The enumeration of point labelled chromatic graphs and trees, Canad. J. Math. *12* (1960), 535—545.

[2] *C. Berge:* Théorie des graphes et ses applications, Paris 1958 (ruský překlad od A. A. Zykova vyšel v Moskvě r. 1962).

[3] *M. Fiedler - J. Sedláček:* O *W*-basích orientovaných grafů, Časopis pro pěstování matematiky *83* (1958), 214—225.

[4] *C. St. J. A. Nash-Williams:* Edge-disjoint spanning trees of finite graphs, J. London Math. Soc. *36* (1961), 445—450.

[4]) V německé literatuře se pro ně užívá názvu *selbstkomplementär* (viz např. [6]).

[5] *C. St. J. A. Nash-Williams:* Decomposition of finite graphs into forests, J. London Math. Soc. *39* (1964), 12.
[6] *H. Sachs:* Über selbstkomplementäre Graphen, Publ. Math. Debrecen *9* (1962), 270—288.
[7] *J. Sedláček:* Kombinatorika v teorii a praxi (Úvod do teorie grafů), Nakladatelství ČSAV, Praha 1964.
[8] *H. M. Trent:* A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, Proc. Math. Acad. Sci USA *40* (1954), 1004—1007.
[9] *W. T. Tutte:* On the problem of decomposing a graph into n connected factors, J. London Math. Soc. *36* (1961), 221—230.

Adresa autora: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Резюме

ОБ ОСНОВАХ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

ЙИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

Пусть $k(\mathscr{G})$ означает число всех основ конечного графа или мультиграфа $\mathscr{G}$. Доказаны следующие теоремы:

1. Пусть A_n — множество всех натуральных чисел m, для которых существует граф $\mathscr{G}$, содержащий n вершин и удовлетворяющий соотношению $k(\mathscr{G}) = m$. Положим $A_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, где $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$. Для $n \geqq 8$ справедливы равенства $x_r = n^{n-2}$ (формула Кейли), $x_{r-1} = (n-2)\, n^{n-3}$, $x_{r-2} = (n-2)^2\, n^{n-4}$, $x_{r-3} = (n-1)(n-3)\, n^{n-4}$, $x_{r-4} = (n-2)^3\, n^{n-5}$, $x_{r-5} = (n-3)(n-2) \,.\, (n-1)\, n^{n-5}$, $x_{r-6} = (n-2)(n^2 - 4n + 2)\, n^{n-5}$, $x_{r-7} = (n-3)^2\, n^{n-4}$, $x_{r-8} = (n-4)(n-1)^2\, n^{n-5}$, $x_{r-9} = (n-2)^4\, n^{n-6}$.

2. Пусть $c \geqq 2$ — хроматическое число графа $\mathscr{G}$ с n вершинами. Тогда $k(\mathscr{G}) \leqq n^{n-2}((c-1)/c)^{n-c}$.

3. Пусть $K = \{\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2, \ldots, \mathscr{K}_t\}$ — максимальное множество непересекающихся вдоль ребер основ полного графа с n вершинами ($n \geqq 2$). Тогда $t = [n/2]$.

4. Пусть $\mathscr{U}_n$ — полный граф с n вершинами. Пусть $\mathscr{S}$ — дерево, имеющее s вершин, расположенных в $\mathscr{U}_n$. Тогда существует в точности sn^{n-s-1} основ, которые содержат $\mathscr{S}$.

5. Пусть $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$ — конечные связные плоские мультиграфы без петлей и мостов. Если же $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$ взаимно двойственны, то $k(\mathscr{M}_1) = k(\mathscr{M}_2)$.

В заключение работы высказано следующее предположение: Два комплементарных графа имеют одинаковое число основ тогда и только тогда, когда они изоморфны.

Summary

ON THE SPANNING TREES OF FINITE GRAPHS

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

Denote by $k(\mathscr{G})$ the number of all spanning trees (i.e. maximal tree subgraphs) of a finite non-directed graph or multigraph $\mathscr{G}$. The following theorems are proved:

1. Let A_n be a set of all natural numbers m for which there exists a graph $\mathscr{G}$ with n vertices and $k(\mathscr{G}) = m$. Put $A_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, where $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$. For $n \geqq 8$ we have $x_r = n^{n-2}$ (Cayley's formula), $x_{r-1} = (n - 2)\, n^{n-3}$, $x_{r-2} = (n - 2)^2\, n^{n-4}$, $x_{r-3} = (n - 1)(n - 3)\, n^{n-4}$, $x_{r-4} = (n - 2)^3\, n^{n-5}$, $x_{r-5} = (n - 3)(n - 2)(n - 1)\, n^{n-5}$, $x_{r-6} = (n - 2)(n^2 - 4n + 2)\, n^{n-5}$, $x_{r-7} = (n - 3)^2\, n^{n-4}$, $x_{r-8} = (n - 4)(n - 1)^2\, n^{n-5}$, $x_{r-9} = (n - 2)^4\, n^{n-6}$.

2. Let $c \geqq 2$ be the chromatic number of a graph $\mathscr{G}$ with n vertices. Then $k(\mathscr{G}) \leqq n^{n-2}((c - 1)/c)^{n-c}$.

3. Let $K = \{\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2, \ldots, \mathscr{K}_t\}$ be the maximal set of edge-disjoint spanning trees of a complete graph with n vertices $(n \geqq 2)$. Then $t = [n/2]$.

4. Let $\mathscr{U}_n$ be a complete graph with n vertices. Let $\mathscr{S}$ be a tree contained in $\mathscr{U}_n$. If s is the number of vertices of $\mathscr{S}$ then there exists exactly sn^{n-s-1} spanning trees of $\mathscr{U}_n$ containing $\mathscr{S}$.

5. Let $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$ be finite connected planar multigraphs without loops and bridges. If $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$ are mutually dual then $k(\mathscr{M}_1) = k(\mathscr{M}_2)$.

Finally, the author remarks that he did not succeed in finding an example of two non-isomorphic complementary graphs having the same number of spanning trees. This open problem brings the investigation of spanning trees into connection with the known concept of self-complementary graphs.