ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 21, No. 2 (1985), 65–76

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАКСИМУМАМИ

П. С. СИМЕОНОВ, Д. Д. БАЙНОВ, ПЛОВДИВ

(Поступило в редакцию 30-го марта 1981)

Резюме. В работе обосновывается применение метода двусторонних приближений для нахождения периодических решений дифференциальных уравнений с максимумами.

Ключевые слова. Уравнения с максимумами, метод двусторонних приближений, периодические решения.

В работе рассматривается вопрос о существовании и нахождении периодического решения системы дифференциальных уравнений с максимумами вида

$$\frac{dx}{dt} = g\big(t, x(t), \max_{s \in E(t)} x(s)\big), \tag{1}$$

где $g(t, x, y) = (g_1(t, x, y), g_2(t, x, y), \ldots, g_K(t, x, y))$ – периодическая по $t$ с периодом $T$ функция; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_K) \in D$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_K) \in D$; $D$ – ограниченная область пространства $R^K$ с нормой $\|x\| = \max_{1 \leqq i \leqq K} |x_i|$; $E(t) = \{s \in R^1 : t + h_1(t) \leqq s \leqq t + h_2(t)\}$; $h_1(t)$, $h_2(t)$ – непрерывные на $R^1$периодические с периодом $T$ функции; $\max_{s \in E(t)} x(s) = (\max_{s \in E(t)} x_1(s), \max_{s \in E(t)} x_2(s), \ldots, \max_{s \in E(t)} x_K(s))$.

Для нахождения периодического решения системы (1) воспользуемся методом двусторонних приближений ([1], [2], [3]), который в работе (3) применен к дифференциальным системам с запаздыванием.

Функции $g(t, x, y)$ ставим в соответствии функцию $f(t, x, y, u, v)$, для которой

$$f(t, x, y, x, y) = g(t, x, y) \tag{2}$$

и рассмотрим систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t), \max_{s \in E(t)} x(s), x(t), \max_{s \in E(t)} x(s)\big). \tag{3}$$

Будем говорить, что выполнены условия (А), если выполнены следующие условия:

А1. Функция $f(t, x, y, u, v)$ — периодическая по $t$ с периодом $T$, непрерывная по совокупности переменных $t, x, y, u, v$ в области $R^1 \times D^4$.

А2. Функция $f(t, x, y, u, v)$ удовлетворяет неравенствам:

$$(4) \qquad m \leqq f(t, x, y, u, v) \leqq M,$$

$$m = (m_1, m_2, \ldots, m_K) \in R^K, \; M = (M_1, M_2, \ldots, M_K) \in R^K$$

$$(5) \qquad f(t, x, y, u, v) \leqq f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}),$$

при $x \leqq \bar{x}$, $y \leqq \bar{y}$, $\bar{u} \leqq u$, $\bar{v} \leqq v$, где неравенство $x \leqq y$ означает, что $x_i \leqq y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Предположим, что для области $D$ выполнено следующее условие (Б):

Б. Множество $D - (M - m)T/4$ не пусто.

Здесь под множеством $D - \varepsilon$ будем понимать множество всех $x \in R^K$, которые вместе со своей $\varepsilon$-окрестностью $W_\varepsilon(x) = \{y \in R^K : -\varepsilon \leqq x - y \leqq \varepsilon\}$ содержатся в $D$.

Функции $x(t)$ определенной на $(0, T)$ сопоставим периодическое с периодом $T$ продолжение, которое будем обозначать соответствующей заглавной буквой $X(t)$.

Для функции $x(t)$, определенной на $R^1$ введем обозначение $\hat{x}(t) = \max\limits_{s \in E(t)} x(s)$.

Отметим некоторые свойства функции $\hat{x}(t)$:

1°. Если $x(t)$ периодическая функция с периодом $T$; то функция $\hat{x}(t)$ тоже периодическая с периодом $T$.

2°. Если $x(t) \leqq y(t)$, то $\hat{x}(t) \leqq \hat{y}(t)$.

3°. $\hat{x}(t) - \hat{y}(t) \leqq \widehat{x(t) - y(t)}$.

Свойства 1°, 2° можно легко проверить, а свойство 3° следует из неравенства [4], стр. 5, $\max\limits_{s \in E(t)} [x(s) + y(s)] \leqq \max\limits_{s \in E(t)} x(s) + \max\limits_{s \in E(t)} y(s)$.

В новых обозначениях система (3) принимает вид

$$(6) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \hat{x}(t), x(t), \hat{x}(t)).$$

В дальнейшем будем пользоваться функцией $a(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right)$, $t \in [0, T]$ и соответствующими ей функциями $A(t)$, $\hat{A}(t)$. Эти функции имеют следующие свойства:

$$(7) \; 1'. \qquad \hat{A}(t) \leqq \frac{T}{2} \text{ при каждом } t;$$

2′. Если $0 < \tau < \frac{T}{2}$ и $E(t) \subseteq [t - \tau, t]$

при каждом $t$, то

$$\hat{A}(t) \leqq \max_{s \in E(t)} A(s) \leqq \max_{s \in [t-\tau, t]} A(s) \leqq A(t) + a(\tau); \tag{8}$$

3′. $$\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t ds + \frac{t}{T} \int_t^T ds = a(t)$$

$$\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t a(s)\,ds + \frac{t}{T} \int_t^T a(s)\,ds = \frac{Ta(t)}{6} + \frac{a^2(t)}{3}. \tag{9}$$

Перейдем к изложению метода двусторонних приближений для систем с максимумами.

Пусть $x_0 \in D - (M - m)T/4$. Определим две последовательности функций $\{u_n(t, x_0)\}$, $\{v_n(t, x_0)\}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{gathered} u_0(t, x_0) = x_0 - \frac{(M-m)\,T}{2} A(t) \\ v_0(t, x_0) = x_0 + \frac{(M-m)\,T}{2} A(t), \qquad \text{при} \qquad t \in R^1. \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t, x_0) = x_0 &+ \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t f(s, U_n(s, x_0), \hat{U}_n(s, x_0), V_n(s, x_0), \hat{V}_n(s, x_0))\,ds - \\ &- \frac{t}{T} \int_t^T f(s, V_n(s, x_0), \hat{V}_n(s, x_0), U_n(s, x_0), \hat{U}_n(s, x_0))\,ds, \\ v_n(t, x_0) = x_0 &+ \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t f(s, V_n(s, x_0), \hat{V}_n(s, x_0), U_n(s, x_0), \hat{U}_n(s, x_0))\,ds - \\ &- \frac{t}{T} \int_t^T f(s, U_n(s, x_0), \hat{U}_n(s, x_0), V_n(s, x_0), \hat{V}_n(s, x_0))\,ds, \end{aligned} \tag{11}$$

при $t \in [0, T]$ и $n = 0, 1, 2 \ldots$.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (А), (Б) *и* $x_0 \in D - \frac{(M-m)\,T}{4}$.

*Тогда для функций* $\{u_n(t, x_0)\}$, $\{v_n(t, x_0)\}$, *определенных соотношениями* (10) *и* (11), *имеют место следующие утверждения:*

(12) 1. *Функции* $u_n(t, x_0)$, $v_n(t, x_0)$ *непрерывны по* $t \in [0, T]$ и $u_n(0, x_0) = u_n(T, x_0) = v_n(0, x_0) = v_n(T, x_0) = x_0$;

2. *Значения функций* $u_n(t, x_0)$, $v_n(t, x_0)$ *не выходят из области* $D$ *при* $t \in [0, T]$.

3. *При* $t \in [0, T]$ *выполнены неравенства:*

$$u_0(t, x_0) \leqq u_1(t, x_0) \leqq \ldots \leqq u_n(t, x_0), \tag{13}$$

$$v_0(t, x_0) \geqq v_1(t, x_0) \geqq \ldots \geqq v_n(t, x_0) \tag{14}$$

$$u_n(t, x_0) \leqq v_n(t, x_0); \tag{15}$$

4. *Последовательности* $\{u_n(t, x_0)\}$, $\{v_n(t, x_0)\}$ *сходятся равномерно относительно* $t \in [0, T]$ *соответственно к функциям* $u_\infty(t, x_0)$, $v_\infty(t, x_0)$ *и кроме того*

$$u_n(t, x_0) \leqq u_\infty(t, x_0) \leqq v_\infty(t, x_0) \leqq v_n(t, x_0) \tag{16}$$

*при* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство.

1. Соотношение (12) следует из (10) и (11).

2. Покажем, что $u_n(t, x_0) \in D$ при $t \in [0, T]$. Так как $x_0 \in D - \frac{(M-m)T}{4}$, то достаточно показать, что

$$-\frac{(M-m)T}{4} \leqq u_n(t, x_0) - x_0 \leqq \frac{(M-m)T}{4}, \tag{17}$$

При $n = 0$, (17) следует из (10) и того факта, что

$$-\frac{(M-m)T}{4} \leqq \frac{(M-m)A(t)}{2} \leqq \frac{(M-m)T}{4}.$$

При $n = 1, 2, \ldots$ из (10) и (4) следует оценка

$$u_n(t, x_0) - x_0 \leqq \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t M\,\mathrm{d}s - \frac{t}{T}\int_t^T m\,\mathrm{d}s =$$

$$= Mt\left(1 - \frac{t}{T}\right) - mt\left(1 - \frac{t}{T}\right) = \frac{M-m}{2}a(t) \leqq \frac{(M-m)T}{4},$$

$$u_n(t, x_0) - x_0 \geqq \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t m\,\mathrm{d}s - \frac{t}{T}\int_t^T M\,\mathrm{d}s =$$

$$= mt\left(1 - \frac{t}{T}\right) - Mt\left(1 - \frac{t}{T}\right) = -\frac{M-m}{2}a(t) \geqq -\frac{(M-m)T}{4}.$$

Аналогично показывается, что

$$-\frac{(M-m)T}{4} \leqq v_n(t, x_0) - x_0 \leqq \frac{(M-m)T}{4}$$

т. е., $v_n(t, x_0) \in D$ при $t \in [0, T]$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Отметим, что если $x(t) \in D$ при $t \in [0, T]$ то и $X(t)$, $\hat{X}(t)$ принадлежат $D$ при $t \in R^1$.

3. Неравенства (13) и (14) докажем методом математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$u_1(t, x_0) \geqq x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t m\,\mathrm{d}s - \frac{t}{T}\int_t^T M\,\mathrm{d}s = x_0 - \frac{M-m}{2}d(t) = u_0(t, x_0),$$

при $t \in [0, T]$. Аналогично получаем неравенство

$$v_1(t, x_0) \leqq v_0(t, x_0) \quad \text{при } t \in [0, T]$$

Допустим, что при $n = N$ выполнены неравенства

$$u_0(t, x_0) \leqq u_1(t, x_0) \leqq \ldots \leqq u_N(t, x_0),$$
$$v_0(t, x_0) \geqq v_1(t, x_0) \geqq \ldots \geqq v_N(t, x_0).$$

Тогда при $n = N + 1$ имеем

$$\begin{aligned} u_{N+1}(t, x_0) &= x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t f(s, U_N(s, x_0)\, \hat{U}_N(s, x_0)\, V_N(s, x_0), \hat{V}_N(s, x_0))\, ds - \\ &\quad - \frac{t}{T} \int_t^T f(s, V_N(s, x_0), \hat{V}_N(s, x_0), U_N(s, x_0), \hat{U}_N(s, x_0))\, ds \geqq \\ &\geqq x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t f(s, U_{N-1}(s, x_0)\, \hat{U}_{N-1}(s, x_0), V_{N-1}(s, x_0)\, \hat{V}_{N-1}(s, x_0))\, ds - \\ &\quad - \frac{t}{T} \int_t^T f(s, V_{N-1}(s, x_0), \hat{V}_{N-1}(s, x_0), U_{N-1}(s, x_0), \hat{U}_{N-1}(s, x_0))\, ds = u_N(t, x_0). \end{aligned}$$

Здесь пользовались равенством (11) и неравенством (5). Аналогично находим, что $v_{N+1}(t, x_0) \leqq v_N(t, x_0)$. Этим доказано, что неравенства (13) и (14) выполнены при $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $t \in [0, T]$.

Неравенство (15) доказывается индукцией по $n$, основываясь на (5), (10) и (11).

4. Из непрерывности функции $f(t, x, y, u, v)$ и соотношений (10) и (11) следует, что последовательности $\{u_n(t, x_0)\}$, $(v_n(t, x_0)\}$ равностепенно непрерывны и равномерно ограничены. Так как эти последовательности монотонны и ограничены соответственно сверху и снизу, то они сходятся равномерно на $[0, T]$ к предельным функциям $u_\infty(t, x_0)$, $v_\infty(t, x_0)$ для которых неравенство (16) очевидно.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $x^*(t, x_0) \in D$ *является периодическим с периодом* $T$ *решением уравнения*

$$\begin{aligned} x(t, x_0) &= x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t f(s, x(s, x_0), \hat{x}(s, x_0), x(s, x_0), \hat{x}(s, x_0))\, ds - \\ &\quad - \frac{t}{T} \int_t^T f(s, x(s, x_0), \hat{x}(s, x_0), x(s, x_0)\, \hat{x}(s, x_0))\, ds. \end{aligned} \tag{18}$$

*Тогда для функции* $x^*(t, x_0)$ *и предельных функций* $u_\infty(t, x_0)$, $v_\infty(t, x_0)$ *выполнены неравенства*

$$u_\infty(t, x_0) \leqq x^*(t, x_0) \leqq v_\infty(t, x_0) \quad t \in [0, T] \tag{19}$$

Доказательство. Учитывая (18), (4) и (10), получаем

$$x^*(t, x_0) \geqq x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t m\, ds - \frac{t}{T} \int_t^T M\, ds = u_0(t, x_0), \qquad t \in [0, T],$$

$$x^*(t, x_0) \leqq x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^T M\, ds - \frac{t}{T} \int_t^T m\, ds = v_0(t, x_0), \qquad t \in [0, T],$$

т. е. $u_0(t, x_0) \leqq x^*(t, x_0) \leqq v_0(t, x_0)$, $t \in [0, T]$,

а для периодических продолжений имеем

$$U_0(t, x_0) \leqq x^*(t, x_0) \leqq V_0(t, x_0), \quad t \in R^1 \tag{20}$$

$$\hat{U}_0(t, x_0) \leqq x^*(t, x_0) \leqq \hat{V}_0(t, x_0), \quad t \in R^1. \tag{21}$$

Исходя из оценок (20), (21), уравнения (18) и неравенства (5) методом математической индукции можно показать, что при $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$u_n(t, x_0) \leqq x^*(t, x_0) \leqq v_n(t, x_0), \quad t \in [0, T]. \tag{22}$$

После предельного перехода в (22), согласно утверждению 4 теоремы 1, получаем требуемое неравенство (19).

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функция* $f(t, x, y, u, v)$ *удовлетворяет условиям:*

1. $$f(t, x, y, u, v) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) \leqq K_1(x - \bar{x}) + K_2(y - \bar{y}) + K_3(\bar{u} - u) + K_4(\bar{v} - v), \tag{23}$$

*при* $\bar{x} \leqq x$, $\bar{y} \leqq y$, $u \leqq \bar{u}$, $v \leqq \bar{v}$, *где* $K_1, K_2, K_3, K_4$ — $K \times K$ — *мерные матрицы с неотрицательными элементами.*

2. *Собственные числа матрицы*

$$P = T\left(\frac{K_1 + K_3}{3} + \frac{K_2 + K_4}{2}\right)$$

*по модулю меньше единицы.*

*Тогда для функций* $\{u_n(t, x_0)\}$, $\{v_n(t, x_0)\}$ *определенных соотношениями* (10), (11) *имеют место следующие утверждения:*

1. *При* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $t \in [0, T]$ *имеет место оценка*

$$v_n(t, x_0) - u_n(t, x_0) \leqq a(t) P^n (M - m) \tag{24}$$

2. *Предельные функции* $u_\infty(t, x_0)$, $v_\infty(t, x_0)$ *совпадают и если* $x = \varphi(t)$-*периодическое с периодом* $T$ *решение системы* (3), *проходящее при* $t = 0$ *через точку* $x_0 \in D - \frac{(M - m)T}{4}$, то

$$\varphi(t) = u_\infty(t, x_0) = v_\infty(t, x_0), \quad t \in [0, T]$$

Доказательство. Из (10) легко следуют равенства

$$\begin{aligned} &v_0(t, x_0) - u_0(t, x_0) = a(t)(M - m), \quad t \in [0, T]; \\ &V_0(t, x_0) - U_0(t, x_0) = A(t)(M - m), \quad t \in R^1; \\ &\hat{V}_0(t, x_0) - \hat{U}_0(t, x_0) = \hat{A}(t)(M - m) \quad t \in R^1, \end{aligned} \tag{25}$$

а из (11), (25) и (23) оценка

$$
\begin{aligned}
v_1(t, x_0) - u_1(t, x_0) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t (f(s, V_0(s, x_0), \hat{V}_0(s, x_0), U_0(s, x_0), \hat{U}_0(s, x_0)) -\\
-f(s, U_0(s, x_0), \hat{U}_0(s, x_0), V_0(s, x_0), \hat{V}_0(s, x_0))) \, ds -\\
- \frac{t}{T} \int_t^T (f(s, U_0(s, x_0), \hat{U}_0(s, x_0), V_0(s, x_0), \hat{V}_0(s, x_0)) -\\
- f(s, V_0(s, x_0), \hat{V}_0(s, x_0), U_0(s, x_0), \hat{U}_0(s, x_0))) \, ds \leqq\\
\leqq \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t (K_1(V_0(s, x_0) - U_0(s, x_0)) + K_2(\hat{V}_0(s, x_0) - \hat{U}_0(s, x_0)) +\\
+ K_3(V_0(s, x_0) - U_0(s, x_0)) + K_4(\hat{V}_0(s, x_0) - \hat{U}_0(s, x_0))) ds +\\
+ \frac{t}{T} \int_t^T (K_1(V_0(s, x_0) - U_0(s, x_0)) + K_2(\hat{V}_0(s, x_0) - \hat{U}_0(s, x_0)) +\\
+ K_3(V_0(s, x_0) - U_0(s, x_0)) + K_4(\hat{V}_0(s, x_0 - \hat{U}_0(s, x_0))) ds =\\
= \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t A(s) \, ds + \frac{t}{T} \int_t^T A(s) \, ds\right)(K_1 + K_3)(M - m) +\\
+ \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \hat{A}(s) \, ds + \frac{t}{T} \int_t^T \hat{A}(s) \, ds\right)(K_2 + K_4)(M - m)
\end{aligned}
$$

т. е.

$$
\begin{aligned}
v_1(t, x_0) - u_1(t, x_0) \leqq \left(\left(\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t A(s) \, ds + \frac{t}{T} \int_t^T A(s) \, ds\right)(K_1 + K_3) +\right.\\
\left. + \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \hat{A}(s) \, ds + \frac{t}{T} \int_t^T \hat{A}(s) \, ds\right)(K_2 + K_4)\right)(M - m).
\end{aligned} \tag{26}
$$

Аналогично получаем оценку

$$
\begin{aligned}
v_{n+1}(t, x_0) - u_{n+1}(t, x_0) \leqq\\
\leqq \left(\left(\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t (V_n(s, x_0) - U_n(s, x_0)) \, ds + \frac{t}{T} \int_t^T (V_n(s, x_0) - U_n(s, x_0)) \, ds\right) \times\right.\\
\times (K_1 + K_3) +\\
+ \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t (\hat{V}_n(s, x_0) - \hat{U}_n(s, x_0)) \, ds + \frac{t}{T} \int_t^T (\hat{V}_n(s, x_0) - \hat{U}_n(s, x_0)) ds (K_2 + K_4)\right) \times\\
\times (M - m).
\end{aligned} \tag{27}
$$

Из (26), (9) и (7) следует

$$
\begin{aligned}
v_1(t, x_0) - u_1(t, x_0) \leqq\\
\leqq \left(\left(\frac{a(t)\,T}{6} + \frac{a^2(t)}{3}\right)(K_1 + K_3) + \frac{a(t)\,T}{2}(K_2 + K_4)\right)(M - m) \leqq\\
\leqq a(t)\left(\frac{T}{3}(K_1 + K_3) + \frac{T}{2}(K_2 + K_4)\right)(M - m)
\end{aligned}
$$

или

$$(28) \qquad v_1(t, x_0) - u_1(t, x_0) \leqq a(t)P(M - m).$$

Допустим, что для некоторого $n \geqq 1$ выполнено неравенство

$$(29) \qquad v_n(t, x_0) - u_n(t, x_0) \leqq a(t)P^n(M - m).$$

Тогда из (29) следует, что

$$(30) \qquad \hat{V}_n(t, x_0) - \hat{U}_n(t, x_0) \leqq \widehat{V_n(t, x_0) - U_n(t, x_0)} \leqq \hat{A}(t)P^n(M - m).$$

Учитывая (27), (30), (9) и (7), получаем, что

$$v_{n+1}(t, x_0) - u_{n+1}(t, x_0) \leqq a(t)P^{n+1}(M - m)$$

т. е. неравенство (29) выполнено при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

После предельного перехода в (29), на основании условия 2 теоремы 3 получаем $u_\infty(t, x_0) = v_\infty(t, x_0) = x_\infty(t, x_0)$ при $t \in [0, T]$.

Если $x = \varphi(t)$-периодическое с периодом $T$ решение системы (3), проходящее при $t = 0$ через точку $x_0 \in D - \frac{(M - m)T}{4}$, то функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (18). Тогда согласно теореме 2 и последнему равенству следует, что $\varphi(t) = u_\infty(t, x_0) = v_\infty(t, x_0)$ при $t \in [0, T]$.

Заметим, что оценка $\hat{A}(t) \leqq \frac{T}{2}$, которой пользовались в (28) довольно „грубая", но из-за общих предположений насчет множества $E(t)$ ее нельзя улучшить. Если предположить, что $E(t) \subseteq [t - \tau, t]$, $0 < \tau < \frac{T}{2}$, то можно воспользоваться оценкой $\hat{A}(t) \leqq A(t) + a(\tau)$, которая дает хорошие результаты особенно, когда $\tau$ мало по сравнению с $T$.

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 4.** *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Выполнены условия теоремы* 1 *и условие* 1 *теоремы* 3.
2. *Для каждого* $t \in R^1$, $E(t) \subseteq [t - \tau, t]$, *где* $\tau$ — *постоянная*, $0 < \tau < \frac{T}{2}$.
3. *Собственные числа матрицы*

$$Q = T\left(\frac{K_1 + K_3}{3} + \frac{K_2 + K_4}{3}\left(1 + \frac{3a(\tau)}{T}\right)\right)$$

*по модулю меньше единицы.*

*Тогда для функций* $\{u_n(t, x_0)\}$, $\{v_n(t, x_0)\}$ *определенных соотношениями* (10), (11), *имеют место следующие утверждения:*

1. *Для каждого* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $t \in [0, T]$ *имеет место оценка* $v_n(t, x_0) - u_n(t, x_0) \leqq a(t)\, Q^n(M - m)$.

2. *Предельные функции* $u_\infty(t, x_0)$, $v_\infty(t, x_0)$ *совпадают и если* $x = \varphi(t)$*-периодическое с периодом* $T$ *решение системы* (3), *проходящее при* $t = 0$ *через точку* $x_0 \in D - \dfrac{(M - m)\,T}{4}$, *то*

$$\varphi(t) = u_\infty(t, x_0) = v_\infty(t, x_0) \text{ при } t \in [0, T].$$

Теорема 4 доказывается аналогично теореме 3.

Рассмотрим вопрос о существовании периодического с периодом $T$ решения системы (3).

Введем отображение $\Delta(x_0) : D - \dfrac{(M - m)\,T}{4} \to R^K$,

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_\infty(s, x_0), \hat{x}_\infty(s, x_0), x_\infty(s, x_0), \hat{x}_\infty(s, x_0))\, ds, \tag{31}$$

где $x_\infty(t, x_0)$ — решение уравнения (18).

Перепишем уравнение (18) в виде

$$\begin{aligned} x_\infty(t, x_0) = x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t f(s, x_\infty(s, x_0), \hat{x}_\infty(s, x_0), x_\infty(s, x_0), \hat{x}_\infty(s, x_0))\, ds\, - \\ - \frac{t}{T}\int_t^T f(s, x_\infty(s, x_0), \hat{x}_\infty(s, x_0), x_\infty(s, x_0), \hat{x}_\infty(s, x_0))\, ds. \end{aligned} \tag{32}$$

Из (32) следует, что при $\Delta(x_0) = 0$ функция $x_\infty(t, x_0)$ будет периодическим решением системы (3). Таким образом существование периодического решения системы (3) связано с существованием нулей отображения $\Delta(x_0)$.

Отображение $\Delta(x_0)$ можно вычислить приближенно, поэтому вводим отображения

$$\Delta_n(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, U_n(s, x_0), \hat{U}_n(s, x_0), V_n(s, x_0), \hat{V}_n(s, x_0))\, ds, \tag{33}$$

$$\Delta^n(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, V_n(s, x_0), \hat{V}_n(s, x_0), U_n(s, x_0), \hat{U}_n(s, x_0))\, ds. \tag{34}$$

В силу условия (5) и неравенств (13), (14), (15) и (22) имеет место неравенство

$$\Delta_n(x_0) \leqq \Delta(x_0) \leqq \Delta^n(x_0) \tag{35}$$

при $x_0 \in D - \dfrac{(M - m)\,T}{4}$.

Из неравенства (35) непосредственно следует

**Теорема 5.** *Если для некоторого целого числа* $n$, $\Delta_n(x_0) > 0$ *или* $\Delta^n(x_0) < 0$, *то система* (3) *не имеет периодического с периодом* $T$ *решения, проходящего через точку* $(0, x_0)$.

Справедлива также

**Теорема 6.** *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Выполнены условия теоремы* 3.
2. *Для некоторого* $n$, $\Delta_n(x_0)$ *имеет изолированную особую точку* $\Delta_n(x_0) = 0$.
3. *Индекс этой особой точки отличен от нуля.*
4. *Существует замкнутая, выпуклая область* $\mathscr{D}_1$, *содержащаяся в* $D - \frac{(M-m)T}{4}$ *и имеющая* $x_0$ *единственной особой точкой такая, что на ее границе* $\Gamma_{D_1}$ *выполнено неравенство*

$$P^{n+1}(M-m) \leqq \inf_{x \in \Gamma D_1} \|\Delta_n(x)\|. \tag{36}$$

*Тогда система* (3) *имеет периодическое с периодом* $T$ *решение* $x = x(t)$, *для которого* $x(0) \in D_1$.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 5.5, стр. 166 [3], достаточно показать, что

$$\|\Delta_n(x)\| \geqq \|\Delta(x) - \Delta_n(x)\|$$

*при* $x \in \Gamma D_1$, или учитывая (35), что

$$\|\Delta_n(x)\| \geqq \Delta(x) - \Delta_n(x)$$

при $x \in \Gamma\mathscr{D}_1$.

Действительно, при $x \in \Gamma\mathscr{D}_1$,

$$\begin{aligned} &\Delta(x) - \Delta_n(x) \leqq \Delta^n(x) - \Delta_n(x) \\ &\leqq \frac{1}{T}\int_0^T ((K_1+K_3)(V_n(s,x) - U_n(s,x)) + (K_2+K_4)(\hat{V}_n(s,x) - \hat{U}_n(s,x)))\,ds \leqq \\ &\leqq \frac{1}{T}\int_0^T ((K_1+K_3)a(s) + (K_2+K_4)\hat{A}(s))\,ds P^n(M-m) \leqq \\ &\leqq \frac{1}{T}\left((K_1+K_3)\frac{T^2}{3} + (K_2+K_4)\frac{T^2}{2}\right)P^n(M-m) \leqq \\ &\leqq P^{n+1}(M-m) \leqq \inf_{x \in \Gamma D_1} \|\Delta_n(x)\| \leqq \|\Delta_n(x)\|. \end{aligned}$$

Этим теорема 6 доказана.

**Замечание 1.** Теорема 6 имеет место если в ее условиях функцию $\Delta_n(x)$ заменить функцией $\Delta^n(x)$.

**Замечание 2.** Теорема 6 имеет место если вместо условия теоремы 3 выполнены условия теоремы 4 и неравенство (35) заменено неравенством

$$Q^{n+1}(M-m) \leqq \inf_{x \in \Gamma\mathscr{D}_1} \|\Delta_n(x)\|.$$

**Замечание 3.** Отметим, что функцию $f(t, x, y, u, v)$, удовлетворящую условию (5) можно выбрать следующим образом:

Если в области $D$ имеет место неравенство

$$-h(t, x, y) + h(t, u, v) \leqq g(t, x, y) - g(t, u, v) \leqq h(t, x, y) - h(t, u, v)$$

при $x \geqq u$, $y \geqq v$, то за функцию $f$ можно взять

$$f(t, x, y, u, v) = \frac{1}{2}(g(t, x, y) + h(t, x, y)) + \frac{1}{2}(g(t, u, v) - h(t, u, v)).$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. С. Курпель, *О двусторонних приближений к периодическим решениям дифференциальных уравнений*. Труды V международной конференции по нелинейным колебаниям, Институт математики АН УССР, Киев, т. 1 (1970), 348—352.

[2] Н. С. Курпель и Б. А. Шувар, *Двусторонние операторные неравенства и их приложения*, „Наукова думка", Киев, 1980.

[3] Ю. А. Митропольский и Д. И. Мартынюк, *Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием*, „Выща школа", Киев, 1979.

[4] Ю. А. Рябов и А. Р. Магомедов, *О периодических решениях линейных дифференциальных уравнений с максимумами*, Математическая физика, выпуск 23, (1978), 3—9.

*П. С. Симеонов,*
*Д. Д. Байнов,*
*Пловдивский Университет*
*имени П. Хилендарского*
*Пловдив*
*Болгария*