Archivum Mathematicum

Emil Slatinský

Die arithmetische Operation der Summe

Archivum Mathematicum, Vol. 20 (1984), No. 1, 9--20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107181

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XX: 9–20, 1984

DIE ARITHMETISCHE OPERATION DER SUMME

EMIL SLATINSKÝ, Brno

(Eingegangen am 5. Jänner 1981)

1. EINFÜHRUNG UND BEZEICHNUNGEN

In der Literatur werden verschiedene Operationen zwischen geordneten Mengen studiert (siehe z. B. [1], [2], [3], [4]). Dabei ensteht eine natürliche Frage: Sei $\mathscr{K}$ eine Klasse geordneter Mengen und sei eine Operation auf der Klasse aller geordneten Mengen gegeben. Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß Resultat dieser Operation, die auf Elemente der Klasse $\mathscr{K}$ angewendet wird, wieder ein Element aus $\mathscr{K}$ wäre?

In dieser Note beschäftigen wir uns mit dieser Frage für den Fall, daß $\mathscr{K}$ die Klasse aller Verbände ist.

1.1. Bezeichnung. Sei A eine Menge mit einer binären Relation ϱ; solche Menge bezeichnen wir mit (A, ϱ). Sei weiter B eine Menge mit einer binären Relation σ. Wir schreiben $A \cong B$ genau dann, wenn ein Isomorphismus $\varphi : (A, \varrho) \to (B, \sigma)$ existiert. Sind speziell die Mengen A, B mengentheoretisch gleich und ist id_A ein Isomorphismus (A, ϱ) auf (B, σ), dann schreiben wir $A = B$.

1.2. Verabredung. Sei (A, ϱ) eine Menge mit einer binären Relation und $B \subseteq A$. Dann wird B immer als eine Menge mit einer binären Relation vorausgezetzt, und zwar mit der induzierten binären Relation $\varrho \cap B^2$. Umgekehrt, für zwei Mengen (A, ϱ), (B, σ), das Symbol $A \subseteq B$ bedeutet die mengentheoretische Inklusion und zugleich $\varrho = \sigma \cap A^2$.

1.3. Definition. Sei $\{M_\iota; \iota \in G\}$ ein System von Mengen. Wird eine Ordnung $\leqq$ auf der Menge $A = \bigcup_{\iota \in G} M_\iota$ definiert, dann bezeichnen wir das System $\{M_\iota; \iota \in G\}$ mit $\{M_\iota; \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$.

Wir definieren auf dem System $\{M_\iota; \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ folgende Relationen:

$$M_{\iota_1} \,\varepsilon\, M_{\iota_2} \Leftrightarrow a_{\iota_1} \leqq a_{\iota_2} \quad \text{für beliebige} \quad a_{\iota_1} \in M_{\iota_1}, a_{\iota_2} \in M_{\iota_2},$$
$$M_{\iota_1} \prec M_{\iota_2} \Leftrightarrow a_{\iota_1} < a_{\iota_2} \quad \text{für beliebige} \quad a_{\iota_1} \in M_{\iota_1}, a_{\iota_2} \in M_{\iota_2},$$
$$M_{\iota_1} \preceq M_{\iota_2} \Leftrightarrow M_{\iota_1} \prec M_{\iota_2} \quad \text{oder} \quad M_{\iota_1} = M_{\iota_2}.$$

, **1.4. Bemerkung.** Es ist leicht zu sehen, daß $\precsim$ eine Ordnung auf $\{M_\iota;$ $\in G \mid (A, \leqq)\}$ ist.

1.5. Verabredung. In der ganzen Arbeit werden wir eine Ordnung auf einer beliebigen Menge mit dem Symbol $\leqq$ bezeichnen.

1.6. Definition. Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ ein System und sei G eine geordnete Menge. Ein solches System nennen wir *isoton* genau dann, wenn für beliebige $\iota_1, \iota_2 \in G$ aus $\iota_1 < \iota_2$ stets $M_{\iota_1} \varepsilon M_{\iota_2}$ folgt.

1.7. Verabredung. Für ein System $\{M_\iota;\ \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ werden wir immer voraussetzen, daß G eine geordnete Menge ist.

1.8. Bezeichnung.

(a) Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein System geordneter Mengen. Mit $\sum_{\iota \in G} M_\iota$ bezeichnen wir die Kardinalsumme der Mengen M_ι; $\iota \in G$.

(b) Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen, wo G eine Kette ist. Mit $\sum^o_{\iota \in G} M_\iota$ bezeichnen wir die Ordinalsumme der Mengen M_ι; $\iota \in G$.

(c) Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Mit $\sum^l_{\iota \in G} M_\iota$ bezeichnen wir die lexikographische Summe der Mengen M_ι; $\iota \in G$.

(d) Seien M, N geordnete Mengen. Mit $M \circ N$ bezeichnen wir das Ordinalprodukt der Mengen M, N. Mit MN bezeichnen wir das Kardinalprodukt der Mengen M, N.

1.9. Definition. Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ ein System. Sei $\sum^A_{\iota \in G} M_\iota$ die Menge aller geordneten Paare (ι, a_ι), wo $\iota \in G$, $a_\iota \in M_\iota$, mit folgender Relation: $(\iota_1, a_{\iota_1}) \leqq$ $\leqq (\iota_2, a_{\iota_2}) \Leftrightarrow \iota_1 \leqq \iota_2$ in G und $a_{\iota_1} \leqq a_{\iota_2}$ in A. $\sum^A_{\iota \in G} M_\iota$ wird *Summe* des Systems $\{M_\iota;\ \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ genannt.

1.10. Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, daß $\leqq$ eine Ordnungsrelation auf $\sum^A_{\iota \in G} M_\iota$ ist. Also ist $\sum^A_{\iota \in G} M_\iota$ eine geordnete Menge.

1.11. Bemerkung. Aus 1.9 folgt gleich:

(a) Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Wenn G eine Antikette ist, dann gilt $\sum^l_{\iota \in G} M_\iota = \sum_{\iota \in G} M_\iota$. Wenn G eine Kette ist, dann gilt $\sum^l_{\iota \in G} M_\iota = \sum^o_{\iota \in G} M_\iota$.

(b) Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Ist $M_\iota \cong M$ für jedes $\iota \in G$, dann gilt $\sum^l_{\iota \in G} M_\iota = G \circ M$.

(c) Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ ein System. Dann gilt $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota = \sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota \Leftrightarrow$ das System ist isoton. Weiter gilt $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota = GA \Leftrightarrow M_\iota = A$ für jedes $\iota \in G$.

1.12. Bemerkung. Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Dann existiert ein isotones System $\{N_\iota;\ \iota \in G \mid (B, \leqq)\}$ mit $N_\iota \cong M_\iota$ für jedes $\iota \in G$. Dann gilt $\sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota \cong \sum\limits_{\iota \in G}^{l} N_\iota = \sum\limits_{\iota \in G}^{B} N_\iota$.

1.13. Bemerkung. Alle arithmetischen Operationen zwischen geordneten Mengen, die in 1.8 eingeführt werden, sind Speziallfälle der Summe $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$.

2. ANWENDUNG DER OPERATION DER SUMME AUF DIE KLASSE ALLER VERBÄNDE

2.1. Bezeichnung. Sei M eine geordnete Menge, $N \subseteq M$. Wir bezeichnen $L_M(N) = \{a \in M;\ a$ *ist eine untere Schranke von* $N\}$, $U_M(N) = \{a \in M;\ a$ *ist eine obere Schranke von* $N\}$. Wenn $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist, schreiben wir $L_M(N) = L_M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

2.2. Bemerkung. Sei M eine geordnete Menge, $N \subseteq M$. N heißt *nach unten* [*nach oben*] *beschränkt in* M genau dann, wenn $L_M(N) \neq \emptyset$ [$U_M(N) \neq \emptyset$] ist. M heißt *nach unten* [*nach oben*] *beschränkt* genau dann, wenn M in M nach unten [nach oben] beschränkt ist.

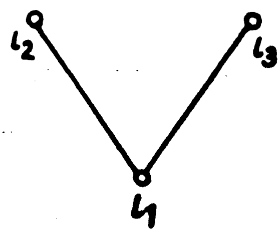

Fig. 1

2.3. Bezeichung. Sei M eine nach unten [nach oben] beschränkte Menge. Das *kleinste* [*größte*] Element der Menge M bezeichnen wir mit $l(M)$ [$g(M)$].

2.4. Bemerkung. Es gibt solche Durchschnittshalbverbände G, M, daß $G \circ M$ kein Durchschnittshalbverband ist.

2.5. Beispiel. Sei $G = \{\iota_1, \iota_2, \iota_3\}$ geordnete Menge mit dem Diagramm in Fig. 1. Also ist G ein Durchschnittshalbverband. Sei M ein nach oben unbeschränkter

Durchschnittshalbverband. Sei $a \in M$ ein beliebiges Element. Wir zeigen, daß $(\iota_2, a) \wedge (\iota_3, a)$ in $G \circ M$ nicht existiert. Setzen wir voraus $(\iota_0, c) = (\iota_2, a) \wedge (\iota_3, a)$. Dann ist $(\iota_0, c) \leqq (\iota_2, a)$, also $\iota_0 < \iota_2$ oder $\iota_0 = \iota_2$ und $c \leqq a$ und ähnlich $(\iota_0, c) \leqq \leqq (\iota_3, a)$, also $\iota_0 < \iota_3$ oder $\iota_0 = \iota_3$ und $c \leqq a$. Es kann $\iota_0 = \iota_2$ nicht sein, denn in diesem Fall $\iota_2 \leqq \iota_3$ wäre, was ein Widerspruch mit $\iota_2 \| \iota_3$ ist. Ebenso ist $\iota_0 = \iota_3$ unmöglich. Also $\iota_0 < \iota_2$ und gleichzeitig $\iota_0 < \iota_3$. Dann ist aber $\iota_0 = \iota_1$. Also $(\iota_2, a) \wedge (\iota_3, a) = (\iota_1, c)$. Sei $d \in M$ ein beliebiges Element. Dann ist $(\iota_1, d) \leqq \leqq (\iota_2, a)$, $(\iota_1, d) \leqq (\iota_3, a)$, d. h. $(\iota_1, d) \in L_{G \circ M}((\iota_2, a), (\iota_3, a))$. Daraus $(\iota_1, d) \leqq \leqq (\iota_1, c)$, also $d \leqq c$, d. h. $c = g(M)$. Das ist ein Widerspruch mit der Voraussetzung, daß M eine nach oben unbeschränkte Menge ist. Also existiert $(\iota_2, a) \wedge \wedge (\iota_3, a)$ nicht und $G \circ M$ ist kein Durchschnitsshalbverband.

Aus der Bemerkung 1.11(b), (c) und 2.4 folgt

2.6. Bemerkung.

(a) Sei $\{M_\iota; \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Sind alle Mengen M_ι Verbände und G ein Verband, dann braucht $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ kein Verband zu sein.

(b) Sei $\{M_\iota; \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ ein System. Sind alle Mengen M_ι Verbände und G ein Verband, dann braucht $\sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ kein Verband zu sein.

2.7. Problem. Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß Resultat der Operation der Summe ein Verband ist?

2.8. Bezeichnung. Sei $\{M_\iota; \iota \in G\}$ ein System geordneter Mengen, sei $\bigcup_{\iota \in G} M_\iota = A$. Ist $B \subseteq A$, dann bezeichnen wir $G(B) = \{\iota \in G;\ M_\iota \cap B \neq \emptyset\}$. Speziell für $a \in A$ ist $G(a) = \{\iota \in G;\ a \in M_\iota\}$. Weiter, für $H \subseteq G$ setzen wir $A(H) = \bigcup_{\iota \in H} M_\iota$. Speziell ist $A(\iota_0) = M_{\iota_0}$ für $\iota_0 \in G$.

2.9. Bemerkung. Ist $\{M_\iota; \iota \in G\}$ ein System geordneter Mengen und $\bigcup_{\iota \in G} M_\iota = A$, dann ist $A(H) = \{a \in A;\ H \cap G(a) \neq \emptyset\}$. Ebenso gilt $G(a) \subseteq G(B)$ für $a \in B \subseteq A$ und $A(\iota_0) \subseteq A(H)$ für $\iota_0 \in H \subseteq G$.

2.10. Satz. *Sei $\{M_\iota; \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ ein System, $(\iota_1, a), (\iota_2, b) \in \sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota$. Dann sind folgenden Bedingungen äquivalent:*

(A) $(\iota_0, c) = (\iota_1, a) \wedge (\iota_2, b)$,

(B) $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$,

$c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))))$,

$c \in M_{\iota_0}$.

Beweis: Es gelte (A), d. h. $(\iota_0, c) = (\iota_1, a) \wedge (\iota_2, b)$. Bezeichnen wir $\sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota = S$. Also ist $(\iota_0, c) \in L_S((\iota_1, a), (\iota_2, b))$. Es ist klar, daß $\iota_0 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$, $c \in L_A(a, b)$, $c \in M_{\iota_0}$ ist.

Weiter ist $\iota_0 \in G(c)$. Nach 2.9 ist $\iota_0 \in G(L_A(a, b))$, also auch $\iota_0 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap \cap G(L_A(a, b))$. Ferner ist $c \in A(\iota_0)$, also auch $c \in A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$ nach 2.9.

Sei $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$ ein beliebiges Element. Nach 2.8 ist $M_{\iota_3} \cap \cap L_A(a, b) \neq \emptyset$. Sei $d \in M_{\iota_3} \cap L_A(a, b)$ ein beliebiges Element; dann ist $(\iota_3, d) \in \in L_S((\iota_1, a), (\iota_2, b))$ und aus (A) folgt $(\iota_3, d) \leqq (\iota_0, c)$. Daher ist $\iota_3 \leqq \iota_0$ und wir haben $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$.

Sei $e \in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$ ein beliebiges Element. Nach 2.9 ist $(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))) \cap G(e) \neq \emptyset$. Sei $\iota_4 \in (L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))) \cap G(e)$ ein beliebiges Element, dann $\iota_4 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$, $\iota_4 \in G(e)$, also $e \in M_{\iota_4}$. Daraus folgt $(\iota_4, e) \in L_S((\iota_1, a), (\iota_2, b))$, also $(\iota_4, e) \leqq (\iota_0, c)$ und daher ist $e \leqq c$. Deshalb haben wii $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))))$. Es gilt also (B).

Es gelte (B). Dann ist $\iota_1, \iota_2 \in G$, $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$ und auch $(\iota_0, c) \in L_S((\iota_1, a), (\iota_2, b))$. Sei $(\iota_3, d) \in L_S((\iota_1, a), (\iota_2, b))$ ein beliebiges Element. Dann gilt $d \in L_A(a, b)$, $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$, $\iota_3 \in G(d)$ und nach 2.9 ist $\iota_3 \in G(L_A(a, b))$. Deshalb ist $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap \cap G(L_A(a, b))$ und aus (B) folgt $\iota_3 \leqq \iota_0$. Gleichzeitig ist $d \in M_{\iota_3}$, d. h. $d \in A(\iota_3)$ und nach 2.9 ist $d \in A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$. Daraus $d \in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap \cap G(L_A(a, b)))$ und (B) impliziert $d \leqq c$. Schließlich haben wir $(\iota_3, d) \leqq (\iota_0, c)$, also $(\iota_0, c) = (\iota_1, a) \wedge (\iota_2, b)$ und das ist (A).

Direkt aus 2.10 folgt

2.11. Folgerung. *Sei $\{M_\iota; \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ ein System. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent:*

(A) $\sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ *ist ein Durchschnittshalbverband*

(B) *Die Mengen $L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$, $L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$ haben größte Elemente für alle $\iota_1, \iota_2 \in G$, $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$. Ist $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap \cap G(L_A(a, b)))$, $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap (G(L_A(a, b))))$, dann $c \in M_{\iota_0}$.*

3. SPEZIELLE OPERATIONEN

3.1. Bemerkung. Sei G ein Verband, $\{M_\iota; \iota \in G\}$ ein System von Verbänden. Dann braucht $\sum_{\iota \in G} M_\iota$ kein Verband zu sein.

Zum Beispiel: Sei $G = \{\iota_1, \iota_2\}$ mit der Ordnung $\iota_1 < \iota_2$, also ist G ein Verband. Seien M_ι $(\iota \in G)$ Verbände. Für $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$ existiert $(\iota_1, a) \wedge (\iota_2, b)$ nicht, also ist $\sum_{\iota \in G} M_\iota$ kein Verband.

3.2. Definition. Eine geordnete Menge M heißt *nach unten gerichtet*, wenn $L_M(a, b) \neq \emptyset$ für alle $a, b \in M$ gilt.

3.3. Definition. Eine geordnete Menge M heißt *relativer Durchschnittshalbverband*, wenn aus $L_M(a, b) \neq \emptyset$ die Existenz von $a \wedge b$ für alle $a, b \in M$ folgt.

3.4. Lemma. *Sei* $\{M_\iota; \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ *ein isotones System.*

(a) *Seien* $\iota_1, \iota_2 \in G$, *sei* $\iota_3 \in G$ *ein solches Element, daß* $\iota_3 < \iota_1$, $\iota_3 < \iota_2$ *und sei* $d \in M_{\iota_3}$ *ein beliebiges Element. Dann gilt* $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$, $d \in L_A(a, b) \cap \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$ *für beliebige* $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$.

(b) *Hat* $L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$ *das größte Element für alle* $\iota_1, \iota_2 \in G$ *und alle* $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$, *dann ist G ein Durchschnittshalbverband.*

(c) *Sei die Voraussetzung von* 3.4 (b) *erfüllt und* $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$. *Ist* $\iota_1 \parallel \iota_2$, *dann* $\iota_0 = \iota_1 \wedge \iota_2$.

(d) *Sei* $\iota_0 \in G$ *und* $a, b \in M_{\iota_0}$ *mit* $L_M(a, b) \neq \emptyset$. *Wenn* $c = g(L_{M_{\iota_0}}(a, b))$ *existiert, dann ist* $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_0) \cap G(L_A(a, b))))$.

(e) *Seien* $\iota_1, \iota_2 \in G$ *und* $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$. *Ist* $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$, $\iota_0 < \iota_1$, $\iota_0 < \iota_2$ *und* $c = g(M_{\iota_0})$, *dann* $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))))$.

Beweis: (a) Es ist klar, daß $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$. Da das System $\{M_\iota; i \in G \mid (A, \leqq)\}$ isoton ist, gilt $M_{\iota_3} \varepsilon M_{\iota_1}$, $M_{\iota_3} \varepsilon M_{\iota_2}$ und also $d \leqq a$, $d \leqq b$ für beliebige $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$, $d \in M_{\iota_3}$. Folglich ist $d \in L_A(a, b)$, also $M_{\iota_3} \cap L_A(a, b) \neq \emptyset$ und nach 2.8 ist $\iota_3 \in G(L_A(a, b))$. Daraus $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$. Ferner ist $d \in A(\iota_3)$ und nach 2.9 ist $d \in A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$. Wir haben gezeigt $d \in L_A(a, b) \cap \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$.

(b) Bezeichnen wir $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$. Also ist $\iota_0 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$. Wenn ι_1, ι_2 vergleichbar sind, dann ist die Existenz von $\iota_1 \wedge \iota_2$ trivial. Sei also $\iota_1 \parallel \iota_2$. Ist $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$ ein beliebiges Element, dann $\iota_3 < \iota_1$, $\iota_3 < \iota_2$ und nach 3.4(a) ist $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$. Deshalb $\iota_3 \leqq \iota_0$, also $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2))$, d. h. $\iota_0 = \iota_1 \wedge \iota_2$. G ist also ein Durchschnittshalbverband.

(c) Die Behauptung folgt einfach aus dem Beweis von 3.4(b).

(d) Es ist $c \in L_{M_{\iota_0}}(a, b)$, $c \in M_{\iota_0}$, und auch $c \in L_A(a, b)$. Also ist $c \in M_{\iota_0} \cap L_A(a, b)$ und nach 2.8 ist $\iota_0 \in G(L_A(a, b))$, woraus $\iota_0 \in L_G(\iota_0) \cap G(L_A(a, b))$ folgt. Weiter ist $c \in A(\iota_0)$ und nach 2.9 ist $c \in A(L_G(\iota_0) \cap G(L_A(a, b)))$, also $c \in L_A(a, b) \cap \cap A(L_G(\iota_0) \cap G(L_A(a, b)))$. Sei $d \in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_0) \cap G(L_A(a, b)))$ ein beliebiges Element. Dann ist $d \in A(L_G(\iota_0) \cap G(L_A(a, b)))$ und nach 2.9 ist $L_G(\iota_0) \cap G(L_A(a, b)) \cap \cap G(d) \neq \emptyset$. Also gibt es ein $\iota_1 \in L_G(\iota_0)$ so, daß $d \in M_{\iota_1}$. Ist $\iota_1 = \iota_0$, dann $d \in L_{M_{\iota_0}}(a, b)$ und $d \leqq c$. Wenn $\iota_1 < \iota_0$, dann gilt $M_{\iota_1} \varepsilon M_{\iota_0}$, also wieder $d \leqq c$. Deshalb $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_0) \cap G(L_A(a, b))))$.

(e) Es ist $c \in M_{\iota_0}$ und nach 3.4(a) ist $c \in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$. Sei $d \in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$ ein beliebiges Element. Dann ist $d \in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$ und nach 2.9 gilt $L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)) \cap \cap G(d) \neq \emptyset$. Also gibt es ein $\iota_4 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$ so, daß $d \in M_{\iota_4}$. Ist $\iota_4 = \iota_0$, dann ist $d \in M_{\iota_0}$ und also $d \leqq c$. Wenn $\iota_4 < \iota_0$ gilt, dann ist $M_{\iota_4} \varepsilon M_{\iota_0}$, also wieder $d \leqq c$. Folglich $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))))$.

3.5. Lemma. *Sei* $\{M_\iota; \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ *ein System,* (ι_1, a), $(\iota_1, b) \in \sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ *und sei*

$(\iota_1, c) \in \sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ *ein solches Element, daß* $(\iota_1, c) = (\iota_1, a) \wedge (\iota_1, b)$ *gilt. Dann ist* $c = a \wedge b$.

Beweis: Bezeichnen wir $\sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota = S$. Es ist $c \in L_A(a, b) \cap M_{\iota_1}$. Ist $d \in L_A(a, b) \cap \cap M_{\iota_1}$ ein beliebiges Element, dann ist $(\iota_1, d) \in L_S((\iota_1, a), (\iota_1, b))$. Also gilt $(\iota_1, d) \leqq \leqq (\iota_1, c)$ und daraus $d \leqq c$. Wir haben also $c = a \wedge b$.

3.6. Lemma. *Sei* $\{M_\iota; \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ *ein solches System, daß* $\sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ *ein Durchschnitts halbverband ist. Dann ist* M_ι *ein relativer Durchschnittshalbverband für alle* $\iota \in G$.

Beweis: Sei $\iota_1 \in G$ ein beliebiges Element und $a, b \in M_{\iota_1}$ solche Elemente, daß $L_{M_{\iota_1}}(a, b) \neq \emptyset$ ist. Es ist $(\iota_1, a), (\iota_1, b) \in \sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota$. Bezeichnen wii $(\iota_0, c) = (\iota_1, a) \wedge \wedge (\iota_1, b)$; dann ist $\iota_0 \leqq \iota_1$. Gleichzeitig gilt $M_{\iota_1} \cap L_{M_{\iota_1}}(a, b) \neq \emptyset$, also auch $M_{\iota_1} \cap L_A(a, b) \neq \emptyset$ und nach 2.8 ist $\iota_1 \in G(L_A(a, b))$. Also ist $\iota_1 \in L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b))$. Nach dem Satz 2.10 gilt $\iota_0 = g(L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b)))$, also ist $\iota_1 \leqq \iota_0$. Wir haben gezeigt $\iota_1 \leqq \iota_0 \leqq \iota_1$, also $\iota_0 = \iota_1$. Dann ist $(\iota_1, a) \wedge (\iota_1, b) = (\iota_1, c)$ und nach 3.5 ist $c = a \wedge b$. Also ist M_{ι_1} ein relativer Durchschnittshalbverband.

3.7. Bezeichnung. Mit $\prec$ bezeichnen wir die Nachbarschaftsrelation (d. h. $a \prec b$ dann und nur dann, wenn $a < b$ und wenn es kein x mit $a < x < b$ gibt).

3.8. Bezeichnung. Sei $\{M_\iota; \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen.

Wir sagen, daß $\{M_\iota; \iota \in G\}$ die Bedingung (α) erfüllt, wenn folgendes gilt: Ist $\iota_1 \in G$ ein solches Element, daß M_{ι_1} nach unten nicht gerichtet ist, dann gibt es genau ein $\iota_0 \in G$, $\iota_0 \prec \iota_1$ und dann ist M_{ι_0} nach oben beschränkt.

Wir sagen, daß $\{M_\iota; \iota \in G\}$ die Bedingung (β) erfüllt, wenn folgendes gilt: Wenn $\iota_1, \iota_2 \in G$, $\iota_1 \parallel \iota_2$ ist und $\iota_1 \wedge \iota_2 = \iota_0$ existiert, dann ist M_{ι_0} nach oben beschränkt.

3.9. Satz. *Sei* $\{M_\iota; i \in G\}$ *ein geordnetes System geordneter Mengen. Dann ist* $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *ein Durchschnittshalbverband genau dann, wenn* G *ein Durchschnittshalbverband ist,* M_ι *ein relativer Durchschnittshalbverband für jedes* $\iota \in G$ *ist und die Bedingungen* (α), (β) *erfüllt sind.*

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband. Nach 1.12 existiert ein isotones System von Mengen $\{N_\iota; \iota \in G \mid (\bigcup_{\iota \in G} N_\iota = A, \leqq)\}$ mit $N_\iota \cong M_\iota$ für jedes $\iota \in G$ und $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota \cong \sum_{\iota \in G}^{l} N_\iota = \sum_{\iota \in G}^{A} N_\iota$.

Also ist $\sum_{\iota \in G} N_\iota$ ein Durchschnittshalbverband und nach 2.11 existieren $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$, $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))))$ für alle $\iota_1, \iota_2 \in G$, $a \in N_{\iota_1}$, $b \in N_{\iota_2}$; dabei ist $c \in N_{\iota_0}$.

Nach 3.4(b) ist G ein Durchschnittshalbverband.

Nach 3.6 ist N_ι ein relativer Durchschnittshalbverband für jedes $\iota \in G$. Da $N_\iota \cong M_\iota$ gilt, ist auch M_ι ein relativer Durchschnittshalbverband für jedes $\iota \in G$.

Sei $\iota_1 \in G$ ein beliebiges Element. Setzen wir voraus, daß N_{ι_1} nach unten nicht gerichtet wird. Dann existieren Elemente $a, b \in N_{\iota_1}$ so, daß $L_{N_{\iota_1}}(a, b) = \emptyset$. Für $\iota_0 = g(L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b)))$ gilt $\iota_0 < \iota_1$. Nach 3.4(a) gilt $\iota_3 \in L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b))$ für jedes $\iota_3 \in G$ mit $\iota_3 < \iota_1$. Also ist $\iota_3 \leqq \iota_0$ und ι_0 ist genau ein Element aus G mit $\iota_0 \prec \iota_1$. Ferner ist nach 3.4(a) $d \in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b)))$ für je: des Element $d \in N_{\iota_0}$, also $d \leqq c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b))))$. Da $N_\iota \cong M_\iota$ für jedes $\iota \in G$ ist, gilt also die Bedingung (α).

Seien nun $\iota_1, \iota_2 \in G$ mit $\iota_1 \parallel \iota_2$. Nach 3.4(c) ist $\iota_0 = \iota_1 \wedge \iota_2$ und nach 3.4(a) ist $d \in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$ für jedes $d \in N_{\iota_0}$. Also ist $d \leqq c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))))$. Da $N_\iota \cong M_\iota$ für jedes $\iota \in G$ ist, gilt also die Bedingung (β). „$\Leftarrow$“ Sei G ein Durchschnittshalbverband, M_ι ein relativer Durchschnittshalbverband für jedes $\iota \in G$ und setzen wir voraus, daß die Bedingungen (α), (β) erfüllt sind.

Sei $\{N_\iota; \iota \in G \mid (\bigcup_{\iota \in G} N_\iota = A, \leq)\}$ ein isotones System mit $N_\iota \underset{A}{\cong} M_\iota$ für jedes $\iota \in G$. Ein solches System existiert nach 1.12 und es gilt $\sum'_{\iota \in G} M_\iota \cong \sum'_{\iota \in G} N_\iota = \sum_{\iota \in G} N_\iota$. Dann ist auch N_ι ein relativer Durchschnittshalbverband für $\iota \in G$ und wir können die Mengen M_ι durch N_ι in (α), (β) ersetzen.

Seien $\iota_1, \iota_2 \in G$. Nehmen wir zuerst an, daß $\iota_1 = \iota_2$ gilt. Seien $a, b \in N_{\iota_1}$ solche Elemente, daß $L_{N_{\iota_1}}(a, b) \neq \emptyset$ gilt. Dann ist $N_{\iota_1} \cap L_{N_{\iota_1}}(a, b) \neq \emptyset$, also auch $N_{\iota_1} \cap L_A(a, b) \neq \emptyset$. Daraus $\iota_1 \in G(L_A(a, b))$ und wir bekommen $\iota_1 \in L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a,b))$ Sei $\iota_3 \in L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b))$ ein beliebiges Element. Dann ist $\iota_3 \in L_G(\iota_1)$, also $\iota_3 \leqq \iota_1$ und wir haben $\iota_1 = g(L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b)))$. Da N_{ι_1} ein relativer Durchschnittshalbverband ist, existiert ein $c \in N_{\iota_1}$ mit $c = a \wedge b$. Also ist $c = g(L_{N_{\iota_1}}(a,b))$ und nach 3.4(d) ist $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b))))$. Seien wieder $\iota_1, \iota_2 \in G$, $\iota_1 = \iota_2$ und nehmen wir an, daß N_{ι_1} nach unten nicht gerichtet wird. Dann existieren Elemente $a, b \in N_{\iota_1}$ so, daß $L_{N_{\iota_1}}(a, b) = \emptyset$ gilt. Nach der Voraussetzung existiert genau ein $\iota_0 \in G$ so, daß $\iota_0 \prec \iota_1$. Nach 3.4(a) ist $\iota_0 \in L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b))$. Sei $\iota_3 \in L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b))$ ein beliebiges Element; dann ist $\iota_3 \in L_G(\iota_1)$, also $\iota_3 \leqq \iota_0$ und wir haben $\iota_0 = g(L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b)))$. Nach der Voraussetzung existiert $c = g(N_{\iota_0})$, also ist $c \in N_{\iota_0}$. Nach 3.4(e) ist $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1) \cap G(L_A(a, b))))$.

Seien nun $\iota_1, \iota_2 \in G$ mit $\iota_1 < \iota_2$. Dann ist $\iota_1 = \iota_1 \wedge \iota_2$. Seien $a \in N_{\iota_1}$, $b \in N_{\iota_2}$ beliebige Elemente. Es gilt $N_{\iota_1} \mathbin{8} N_{\iota_2}$, also $a \leqq b$ und deshalb $a = a \wedge b$. Dann ist $a \in L_A(a, b)$, also $N_{\iota_1} \cap L_A(a, b) \neq \emptyset$ und nach 2.8 ist $\iota_1 \in G(L_A(a, b))$. Schließlich ist $\iota_1 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$. Sei $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$ ein beliebiges Element. Dann ist $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$, also $\iota_3 \leqq \iota_1$ und wir haben $\iota_1 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$. Offenbar ist $a \in A(\iota_1)$, nach 2.9 also $a \in A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$ und daraus $a \in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$. Ist $d \in$

$\in L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$ ein beliebiges Element, dann $d \in L_A(a, b)$ und also $d \leqq a \leqq b$. Wir bekommen wieder $a = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap$ $\cap G(L_A(a, b))))$.

Seien endlich $\iota_1, \iota_2 \in G$ mit $\iota_1 \parallel \iota_2$. Dann existiert $\iota_1 \wedge \iota_2 = \iota_0$. Sind $a \in N_{\iota_1}$, $b \in N_{\iota_2}$ beliebige Elemente, dann $\iota_0 < \iota_1$, $\iota_0 < \iota_2$. Nach 3.4(a) ist $\iota_0 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap$ $\cap G(L_A(a, b))$. Sei $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$ ein beliebiges Element. Dann ist $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$, also $\iota_3 \leqq \iota_0$ und wir bekommen $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$. Nach der Voraussetzung existiert $c = g(N_{\iota_0})$, d. h. $c \in N_{\iota_0}$. Nach 3.4(e) bekommen wir wieder $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))))$.

Also existiert $g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))) = \iota_0$, $g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap$ $\cap G(L_A(a, b)))) = c$ für alle $\iota_1, \iota_2 \in G$ und alle $a \in N_{\iota_1}$, $b \in N_{\iota_2}$ und es ist $c \in$ $\in N_{\iota_0}$. Nach 2.11 ist $\sum_{\iota \in G}^{A} N_\iota$ ein Durchschnittshalbverband. Da $\sum_{\iota \in G}^{A} N_\iota \cong \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ gilt, ist $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ auch ein Durchschnittshalbverband.

3.10. Lemma. *Sei $\{M_\iota; \iota \in G \mid (A, \leqq)\}$ ein System. Seien $\iota_1, \iota_2 \in G$, $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$ mit $L_G(\iota_1, \iota_2) \neq \emptyset$, $L_A(a, b) \neq \emptyset$. Sei $M_\iota = A$ für jedes $\iota \in G$. Dann ist $L_G(\iota_1, \iota_2) \subseteq G(L_A(a, b))$ und $L_A(a, b) \subseteq A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$.*

Beweis: Sei $\iota_3 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$ ein beliebiges Element. Für jedes $d \in L_A(a, b)$ ist $d \in A = M_{\iota_3}$, also $d \in M_{\iota_3} \cap L_A(a, b)$ und nach 2.8 ist $\iota_3 \in G(L_A(a, b))$. Deshalb $L_G(\iota_1, \iota_2) \subseteq G(L_A(a, b))$ und das ist der erste Teil der Behauptung.

Sei $e \in L_A(a, b)$ ein beliebiges Element. Also ist $e \in A = M_\iota$ für jedes $\iota \in G$. Für jedes $\iota_4 \in L_G(\iota_1, \iota_2)$ ist $e \in M_{\iota_4} \cap L_A(a, b)$, also $\iota_4 \in G(L_A(a, b))$ und auch $\iota_4 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))$. Dann ist $\iota_4 \in L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))) \cap G(e)$ und nach 2.9 ist $e \in A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$. Also gilt $L_A(a, b) \subseteq A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap$ $\cap G(L_A(a, b)))$ und wir bekommen den zweiten Teil der Behauptung.

3.11. Satz *Seien G, A geordnete Mengen. Dann ist GA ein Durchschnittshalbverband genau dann, wenn G, A Durchschnittshalbverbände sind.*

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei GA ein Durchschnittshalbverband. Ist $M_\iota = A$ für $\iota \in G$, dann gilt $GA = \sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ nach 1.11(c), also ist $\sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband. Nach 2.11 gilt die Behauptung (B). Sei $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b)))$, $c =$ $= g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))))$. Nach 3.10 ist $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2)$, d. h. G ist ein Durchschnittshalbverband. Ferner ist $c = g(L_A(a, b))$ nach 3.10, d. h. A ist ein Durchschnittshalbverband.

„$\Leftarrow$" Seien G, A Durchschnittshalbverbände. Ist $M_\iota = A$ für alle $\iota \in G$, dann ist nach 1.11(c) $\sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota = GA$. Für beliebige Elemente $\iota_1, \iota_2 \in G$ und beliebige Elemente $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$ existieren $g(L_G(\iota_1, \iota_2))$ und $g(L_A(a, b))$. Wenn wir $\iota_0 =$ $= g(L_G(\iota_1, \iota_2))$, $c = g(L_A(a, b))$ bezeichnen, dann gilt nach 3.10 $\iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap$

$\cap\, G(L_A(a, b)))$. Ferner gilt $c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))))$ und offenbar ist $c \in M_{\iota_0}$. Also gilt die Behauptung (B) aus 2.11; deshalb ist $\sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband und dann ist auch GA ein Durchschnittshalbverband.

3.12. Satz. *Sei G eine Kette, sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Die geordnete Menge $\sum_{\iota \in G}^{o} M_\iota$ ist ein Durchschnittshalbverband genau dann, wenn M_ι ein relativer Durchschnittshalbverband für jedes $\iota \in G$ ist und die Bedingung (α) erfüllt wird.*

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei $\sum_{\iota \in G}^{o} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband. Da G eine Kette ist, gilt $\sum_{\iota \in G}^{o} M_\iota = \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ nach 1.11(a). Also ist $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband; daraus folgt, daß M_ι ein relativer Durchschnittshalbverband für jedes $\iota \in G$ ist und daß die Behauptung (α) erfüllt wird.

„$\Leftarrow$" Sei M_ι ein relativer Durchschnittshalbverband für jedes $\iota \in G$ und setzen wir voraus, daß die Bedingung (α) erfüllt wird. G ist eine Kette, also $\sum_{\iota \in G}^{o} M_\iota = \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ nach 1.11(a). Offenbar ist G ein Durchschnittshalbverband und es gibt keine $\iota_1, \iota_2 \in G$ mit $\iota_1 \parallel \iota_2$. Also gilt die Bedingung (β). Nach 3.9 ist $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband, also ist auch $\sum_{\iota \in G}^{o} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband.

3.13. Bezeichnung. Seien G, M geordnete Mengen.

Wir sagen, daß das Paar (G, M) die Bedingung (α_1) erfüllt, wenn folgendes gilt: Ist M nach unten nicht gerichtet, dann ist M nach oben beschränkt und jedes Element von G hat genau einen unteren Nachbar.

Wir sagen, daß das Paar (G, M) die Bedingung (β_1) erfüllt, wenn folgendes gilt: Ist G keine Kette, dann ist M nach oben beschränkt.

3.14. Satz. *Seien G, M geordnete Mengen. Dann ist $G \circ M$ ein Durchschnittshalbverband genau dann, wenn G ein Durchschnittshalbverband ist, M ein relativer Durchschnittshalbverband ist und die Bedingungen (α_1), (β_1) erfüllt sind.*

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei $G \circ M$ ein Durchschnittshalbverband. Sei $M_\iota \cong M$ für jedes $\iota \in G$; dann gilt $G \circ M = \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$, also ist $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband. Nach 3.9 ist dann G ein Durchschnittshalbverband, M_ι ist ein relativer Durchschnittshalbverband für jedes $\iota \in G$, d, h. M ist ein relativer Durchschnitshalbverband und auch gelten die Bedingungen (α), (β). Nehmen wir an, daß M nach unten nicht gerichtet wird. Da $M \cong M_\iota$ für alle $\iota \in G$, ist M_ι nach unten nicht gerichtet für jedes $\iota \in G$. Wegen der Bedingung (α) existiert zu jedem $\iota_1 \in G$ genau ein $\iota_0 \in G$ mit dieser Eigenschaft: $\iota_0 \prec \iota_1$ und M_{ι_0} ist nach oben beschränkt. Es ist aber $M \cong M_{\iota_0}$, also ist M nach oben beschränkt und es gilt (α_1).

Seien $\iota_1, \iota_2 \in G$ mit $\iota_1 \parallel \iota_2$. Dann existiert $\iota_0 = \iota_1 \wedge \iota_2$, also nach der Bedingung (β) und in bezug auf den Isomorphismus $M_{\iota_0} = M$ ist M nach oben beschränkt. Also gilt (β_1).

„$\Leftarrow$" Sei G ein relativer Durchschnittshalbverband, sei M ein relativer Durchschnittshalbverband und setzen wir voraus, daß die Bedingungen (α_1), (β_1) erfüllt sind. Sei $M_\iota \cong M$ für jedes $\iota \in G$; dann gilt $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota = G \circ M$ nach 1.13(b). Offenbar ist M_ι ein relativer Durchschnittshalbverband für jedes $\iota \in G$. Nehmen wir an, daß es solches $\iota_1 \in G$ gibt, daß M_{ι_1} nach unten nicht gerichtet wird. In bezug auf den Isomorphismus $M_\iota \cong M$ für jedes $\iota \in G$ und die Bedingung (α_1) existiert genau ein $\iota_0 \in G$ so, daß $\iota_0 \prec \iota_1$ und M_{ι_0} nach oben beschränkt ist. Es gilt also die Bedingung (α).

Seien $\iota_1, \iota_2 \in G$ solche Elemente, daß $\iota_1 \parallel \iota_2$. Dann existiert $\iota_0 = \iota_1 \wedge \iota_2$. Da $M_\iota \cong M$ für jedes $\iota \in G$ und die Bedingung (β_1) erfüllt ist, ist M_{ι_0} nach oben beschränkt. Also gilt (β).

Nach 3.9 ist dann $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband. Also ist $G \circ M$ ein Durchschnittshalbverband.

Die letzte Behauptung 3.15 können wir als eine Folgerung des gemeinsamen Satzes 2.11 bekommen.

3.15. Bemerkung. Sei G eine Menge, sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein System geordneter Mengen. Dann ist $\sum_{\iota \in G} M_\iota$ ein Durchschnittshalbverband genau dann, wenn $G = \{\iota_0\}$ und M_{ι_0} ein Durchschnittshalbverband ist.

3.16. Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, daß wit die Bedingung (B) in Satz 2.10 gegen die äquivalente Bedingung

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{B}_1)\quad & \iota_0 = g(L_G(\iota_1, \iota_2) \cap G(L_A(a, b))),\\
& c = g(L_A(a, b) \cap A(L_G(\iota_1, \iota_2))(,\\
& c \in M_{\iota_0}
\end{aligned}
$$

austauschen können.

Alle Überlegungen in dem Teil 2. und 3. kann man dual für Vereinigungshalbverbände und damit auch für Verbände formulieren.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Birkhoff, G.: *Lattice Theory, New York*, rev. ed. 1948.
[2] Kopeček, O.: *Allgemeine Kardinaloperationen*, Archivum math. T 3 (1967), 35–44.
[3] Kopeček, O.: *Die arithmetischen Operationen für geordnete Mengen*, Spisy PF UJEP v Brně, T 4 (1968), 157–174.
[4] Kopeček, O.: *Aritmetické operace na uspořádaných množinách*, kandidátská disertační práce, Brno 1970.
[5] Szasz, G.: *Einführung in die Verbandstheorie*, Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962.

E. Slatinský
662 37 Brno, Barvičova 85
Czechoslovakia