Hans-Jürgen Bandelt

Tolerante Catalanzahlen

Archivum Mathematicum, Vol. 19 (1983), No. 3, 113--115

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107163

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIX: 113—116, 1983

TOLERANTE CATALANZAHLEN

HANS-J. BANDELT

(Eingegangen am 16. Februar 1981)

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [1] sind Toleranzrelationen (das sind reflexive und symmetrische Relationen, die mit den Verbandsoperationen verträglich sind) auf endlichen Ketten untersucht worden. Bei dieser Gelegenheit haben die Autoren eine Rekursionsformel für die Anzahl T_n aller Toleranzrelationen der endlichen Kette $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ aufgestellt und auch die ersten Werte der Folge T_n ermittelt. Da es sich dabei nun offenkundig um die Catalanzahlen $C_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ handelt, fühlt man sich aufgefordert, eine Interpretation der Toleranzrelationen zu geben, die die Übereinstimmung von T_n mit C_{n+1} sofort ins Auge springen läßt.

Es ist wohl am einfachsten, von einem quadratischen Gitter der Seitenlänge n auszugehen, in der die n^2 Teilquadrate in kanonischer Weise die Elemente von $n \times n$ repräsentieren. Jede Belegung (etwa durch Schraffieren der $\frac{n}{2}(n+1)$ Plätze oberhalb der Diagonale bestimmt eine reflexive und symmetrische Relation (und umgekehrt). Diese ist genau dann eine Toleranzrelation, wenn in jedem horizontalen und jedem vertikalen Streifen die Schraffierung zusammenhängend ist. Beispielsweise ist in Fig. 1, 2.

Fig. 1 die Toleranzrelation auf 7 visualisiert, bei der gerade 0, 1, 2 und 1, 2, 3 und 2, 3, 4, 5 jeweils untereinander „tolerant" sind. Jede solche Schraffierung ist nun wiederum durch den äußeren Begrenzungsweg bestimmt und natürlich liefert umgekehrt jeder nicht unterhalb der Diagonale verlaufende und nicht absteigende Weg der Länge $2n$ die zugehörige Toleranzrelation durch Schraffieren der darunterliegenden Gitterquadrate. Die Anzahl aller solchen Wege ist bekanntermaßen gleich C_{n+1}, womit $T_n = C_{n+1}$ bewiesen ist. Nebenbei bemerkt, dreht man Fig. 1 um 45° (oder Fig. 2 um $-45°$), so ergibt sich das Diagramm eines distributiven Verbandes (vgl. [2] S. 218 , in dem die Maximalketten (aufgrund der voranstehenden Betrachtung) gerade die Toleranzrelationen auf n (hier: $n = 7$) kodifizieren. Übrigens lassen sich diese Wege (bzw. Maximalketten) — sofern man

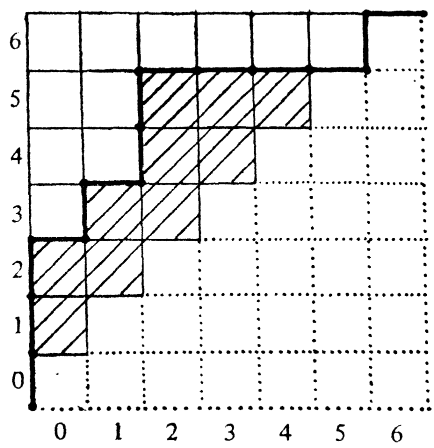

Fig. 1

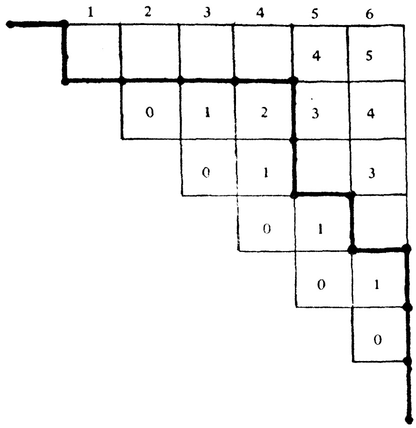

Fig. 2

gewillt ist – auch als gewisse n – Tupel von Zahlen verstehen. Um das sofort einzusehen, vertausche man in Fig. 1 „links“ mit „rechts“ und zähle in jedem vertikalen Streifen die horizontalen Wegstücke von der Diagonale an nach oben durch. Die Toleranzrelation aus Fig. 1 liest sich dann gemäß Fig. 2 als (0, 0, 1, 2, 3, 2, 2). So läßt sich jede Toleranzrelation durch die Nummernfolge ihrer horizontalen Wegstücke beschreiben. Es ist klar, daß auf diese Weise die Toleranzrelationen auf n genau den n-Tupeln $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ von Zahlen $x_i = 0, 1, \ldots, i$ entsprechen, für die stets $x_{i+1} \leqq x_i + 1$ gilt; nichts anderes aber sagt das Hauptergebnis der Arbeit [1] aus.

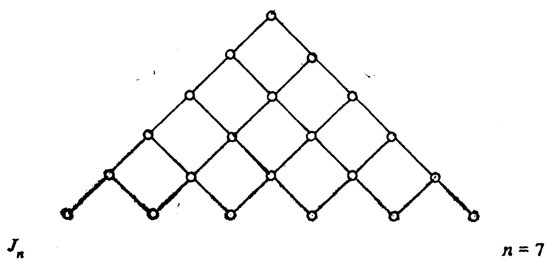

Fig. 3

Die Ordnungsrelation $\subseteq$ zwischen Toleranzrelationen überträgt sich in offensichtlicher Weise auf die zugehörigen Gitterwege. Die supremumsirreduziblen Toleranzrelationen (das sind diejenigen mit genau einem nichttrivialen Block), bzw. die entsprechenden Gitterwege werden in dem Gitterquadrat (von Fig. 1) durch die echt oberhalb der Zickzackdiagonale gelegenen Schnittpunkte repräsentiert. Dreht man den oberen Teil des Gitters mit jenen Punkten um $-45°$, so ergibt sich das Diagramm der geordneten Menge J_n der $\frac{n}{2}(n-1)$ supremums-irreduziblen Toleranzrelationen von n; für $n = 7$ siehe Fig. 3. J_n läßt sich identifizieren mit dem Halbverband $\{(i,j) \in \{1, 2, \ldots, n-1\}^2 \mid i + j \geqq n\}$. Die Antiketten (das sind Teilmengen paarweise unvergleichbarer Elemente) von J_n erzeugen (durch Supremumsbildung im Toleranzrelationenverband) umkehrbar eindeutig die Toleranzrelationen der Kette n. Folglich ist die Catalanzahl C_{n+1} auch gleich der Anzahl aller Antiketten in dem Halbverband J_n. Aber das kennt man schon, denn siehe [2]. Weiters stimmt aus demselben Grunde der Toleranzrelationenverband der Kette n mit dem Verband $J(S(n-1)$ aus [2] überein (vgl. beispielsweise Fig. 4 in [1] mit dem Diagramm von $J(S(3))$ in [2]).

NACHTRAG: Nicht einmal die Charakterisierung der Toleranzrelationen auf endlichen Ketten durch Gitterwege ist neu; für diesbezügliche Informationen bemühe man K. H. Kim, D. G. Rogers, and F. W. Roush, „*Similarity relations and semiorders*", Congressus Numerantium **24** (1979), pp. 577—594.

ZITATE

[1] Ivan Chajda, Josef Dalík, Josef Niederle, Vítězslav Veselý, Bohdan Zelinka, *How to draw tolerance lattices of finite chains,* Archivum Math. (Brno) *16* (1980), 161—166.

[2] Richard P. Stanley, *The Fibonacci lattice,* The Fibonacci Quarterly *13* (1975), 215—232.

Hans-J. Bandelt
Universität Oldenburg
D-2900 Oldenburg
BRD