Vasil G. Angelov; Drumi Dimitrov Bajnov

Существование и единственность решения обобщенной начальной задачи Коши для некоторых нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве

Archivum Mathematicum, Vol. 15 (1979), No. 4, 185--192

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107040`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XV: 185—192, 1979

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Г. АНГЕЛОВ, Д. Д. БАЙНОВ

(Поступило в редакцию 10-го августа 1977)

В настоящей работе доказана теорема существования и единственности решения обобщенной начальной задачи для нелинейных интегродифференциальных уравнений [1].

При доказательстве теоремы используется апарат аналитической теории полугрупп [2], [3].

Предварительно приведем несколько теорем теории аккретивных операторов в банаховом пространстве [3].

Определение I. Аккретивным оператором будем называть оператор $L : D(L) \to B$ (B — банаховое пространство и $D(L) \subset B$), удовлетворяющий неравенству

$$\| (I + \lambda L) x - (I + \lambda L) y \|_B \geqq \| x - y \|_B$$

для каждого $\lambda > 0$ и $x, y \in D(L)$, где I — идентитет, $D(L)$ — дефиниционная область L. Если кроме этого оператор $I + \lambda L$ отображает H на B для каждого $\lambda > 0$, то оператор L называется m — аккретивным.

Теорема 1 [3]. *Если — M — генератор сильно непрерывной полугруппы линейных нерастягивающих операторов в банаховом пространстве B и N — оператор, определен на B, непрерывен, нелинеен и аккретивен в B, то $M + N - m$ — аккретивный оператор.*

Теорема 2 [3]. *Пусть B_1 и B_2 — два банаховые пространства. Предположим, что выполнены следующие условия* (A):

A1. *Определена сильно непрерывная полугруппа $T_i(s)$, $s \geqq 0$ линейных нерастягивающих операторов на B_i с генератором — $M_i (i = 1, 2)$.*

A2. *На B_i определены нелинейные непрерывные операторы $N_i : B_i \to B_i$ удовлетворяющие реляциям*

$$\| ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N_i) x - ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N_i) y \|_{B_i} \geqq \| x - y \|_{B_i}.$$

для некоторых чисел γ, $\alpha > 0$ и $x, y \in B_i$ $(i = 1, 2)$.

A3. *На B_1 определено линейное отображение j: $B_1 \to B_2$ со следующими свойствами*

1. $j(N_1 x) = N_2(jx)$ *для каждого* $x \in B_1$.

2. *Если* $x \in D(M_1)$ *то* $jx \in D(M_2)$ *и* $j(M_1 x) = M_2(jx)$.

Тогда для каждого $x \in B_1$ и $y \in D(M_2)$, для которых $jx = (M_2 + N_2 + \gamma I) y$ существует единственный элемент $z \in D(M_1)$, такой, что

$$(M_1 + N_1 + \gamma I) z = x \quad \text{и} \quad jz = y.$$

Теорема 3 [3]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Выполнены условия* (A).
2. *При $x, x' \in B_1$ и $y, y' \in D(M_2)$ выполнены равенства*

$$jx = (M_2 + N_2 + \gamma I) y \qquad jx' = (M_2 + N_2 + \gamma I) y'.$$

3. *При $z, z' \in D(M_1)$ выполнены реляции*

$$(M_1 + N_1 + \gamma I) z = x \qquad jz = y$$
$$(M_2 + N_2 + \gamma I) z' = x' \qquad jz' = y'$$

(верность этих равенств гарантирована теоремой 2).

Тогда выполнено неравенство $\| z - z' \|_{B_1} \leqq \frac{1}{\alpha} \| x - x' \|_{B_1}$.

Пусть B — банаховое пространство и R — множество действительных чисел.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функция $X(t, x, y)$ определена на $[0, \infty) \times B \times B$, принимает значения в B, равномерно непрерывна по t и удовлетворяет неравенствам*

$$\| X(t, x, y) \|_B \leqq M(e^{\gamma t} + \| x \|_B + e^{\gamma t} \| y \|_B)$$
$$\| X(t, x, y) - X(t, \bar{x}, \bar{y}) \|_B \leqq M \max \{\| x - \bar{x} \|_B, e^{\gamma t} \| y - \bar{y} \|_B\}$$

где γ, M — положительные числа и $\gamma > M$.

2. *Функция $a(t) : R \to R$ равномерно непрерывна. Кроме того*

а) $\dot{a}(t)$ *существует и* $\dot{a}(t) > 0$ *при* $t \leqq 0$.

б) $a(t) < 0$ *при* $t < 0$.

в) $a(0) = 0$.

3. *Функция $b(t)$ определена и равномерно непрерывна на $[0, \infty)$, принимает значения в R и удовлетворяет условиям:*

а) $-\infty < b(0) \leqq 0$.

б) $| b(t) - a(t) | \leqq L$, $t \in [0, \infty)$

в) $\max | b(t) - a(t) | = | b(t') - a(t') | = Q$, $(t' \neq \infty)$

где L — положительная постоянная.

4. *Функция* $K(t, s, y) : [0, \infty) \times R \times B \to B$ *— непрерывна, равномерно непрерывна по t и удовлетворяет неравенствам*

$$\| K(t, s, y) \|_B \leqq K_1(t) (1 + e^{-\gamma s} \| y \|_B)$$

$$\| K(t, s, y) - K(t, s, \bar{y}) \|_B \leqq K_2(t) \frac{e^{-\gamma s}}{Q} \| y - \bar{y} \|_B,$$

где функции $K_i(t) : [0, \infty) \to (0, 1]$ — непрерывны.

5. *Функция $\varphi(t)$ определена на $(-\infty, 0]$, принимает значения в B. Функции* $e^{-\gamma t}\varphi(a^{-1}(t))$ *и* $e^{-\gamma t}\dot{\varphi}(a^{-1}(t))\, \dot{a}^{-1}(t)$ *ограничены и равномерно непрерывны. Предположим кроме того, что выполнено условие*

$$\dot{\varphi}(0) = X(0, \varphi(0), \int_{a(0)}^{b(0)} K(0, s, \varphi(a^{-1}(s)))\, ds).$$

Замечание. При вышеизложенных требований для $a(t)$ в интервале $(-\infty, 0]$ существует единственная обратная функция $a^{-1}(t)$ на $a(t)$, такая, что $a^{-1}(t) < 0$ при $t < 0$, $a^{-1}(0) = 0$ и $\dot{a}^{-1}(t)$ существует при $t \leqq 0$.

Тогда

1. Существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $x(t) : R \to B$, такая, что

$$x[a(t)] = \varphi(t), \qquad t \leqq 0 \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t), \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, x(s))\, ds), \qquad t > 0. \tag{2}$$

Функция $x(t)$ удовлетворяющая (1), (2) такая, что функция $e^{-\gamma t}x(t)$ ограничена и равномерно непрерывна.

Доказательство. Пусть B_1 — банаховое пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций $f : R \to B$ с нормой $\| f \|_{B_1} = \sup_{t \in R} \| f(t) \|_B$; B_2 — банаховое пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций $g : (-\infty, 0] \to B$ с нормой $\| g \|_{B_2} = \sup_{t \in (-\infty, 0)} \| g(t) \|_B$.

Обозначим через $T_1(s)$, $s \geqq 0$ сильно непрерывную полугруппу правых трансляций $[T_1(s)f](t) = f(t - s)$, $t \in R$, $f \in B_1$. Оператор $- M_1$ определен формулой $- M_1 f = - \dot{f}$ является генератором полугруппы $T_1(s)$ с областью определения $D(M_1) = \{f \in B_1 : \dot{f} \in B_1\}$.

Обозначим через $T_2(s)$, $s \geqq 0$ сильно непрерывную полугруппу правых трансляций $[T_2(s) g] (t) = g(t - s)$, $t \in (-\infty, 0]$, $g \in B_2$. Оператор $- M_2$, определен формулой $- M_2 g = - \dot{g}$ является генератором полугруппы $T_2(s)$ с областью определения $D(M_2) = \{g \in B_2 : \dot{g} \in B_2\}$.

Легко видно, что операторы $T_1(s)$ и $T_2(s)$ нерастягивающие для каждого $s \geqq 0$.

Пусть оператор $N_1 : B_1 \to B_1$ действует по формуле

$$(N_1 f)(t) = \begin{cases} -e^{-\gamma t} X\left(t, e^{\gamma t} f(t), \int\limits_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds\right), & t \geqq 0 \\ -X\left(0, f(0), \int\limits_{a(0)}^{b(0)} K(0, s, \varphi(a^{-1}(s))\, ds\right), & t \leqq 0 \end{cases}$$

где $f \in B_1$ и оператор $N_2 : B_2 \to B_2$ действует по формуле

$$(N_2 f)(t) = -X\left(0, f(0), \int\limits_{a(0)}^{b(0)} K(0, s, \varphi(a^{-1}(s)))\, ds\right), \qquad t \leqq 0.$$

Здесь $f \in B_2$.

Пусть отображение $j : B_1 \to B_2$ определено как рестрикция функции $f \in B_1$ на интервале $(-\infty, 0]$.

Легко проверяется, что выполнены условия A1 и A3 теоремы 2. Покажем, что выполнено и условие A2 той же теоремы.

Если функция $f \in B_1$, то функция $N_1 f$ тоже принадлежит B_1.

Действительно, при $t \leqq 0$, $N_1 f$ – постоянная. При $t \geqq 0$ из условий теоремы следует

$$\begin{aligned} \| (N_1 f)(t) \|_B &\leqq \left\| e^{-\gamma t} X\left(t, e^{\gamma t} f(t), \int\limits_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds\right) \right\|_B \leqq \\ &\leqq M e^{-\gamma t}\left(e^{\gamma t} + e^{\gamma t} \| f(t) \|_B + e^{\gamma t} \left\| \int\limits_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds \right\|_B\right) \leqq \\ &\leqq M\left(1 + \| f(t) \|_B + \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \| K(t, s, e^{\gamma s} f(s)) \|_B\, ds\right) \leqq \\ &\leqq M\left(1 + \| f(t) \|_B + K_1(t) \int\limits_{a(t)}^{b(t)} (1 + \| f(s) \|_B)\, ds\right) \leqq \\ &\leqq M(1 + \| f(t) \|_B + (1 + P)\, | b(t) - a(t) |) \leqq M[1 + P + (1 + P) L] \end{aligned}$$

где P некоторая верхная грань $\| f(t) \|_B$, т. е. $\| f(t) \|_B \leqq P$.

Этот результат показывает, что функция $(N_1 f)(t)$ ограничена.

Покажем, что функция $(N_1 f)(t)$ равномерно непрерывна.

Из условий теоремы следует, что при $t, \bar{t} > 0$

$$\begin{aligned} &\| (N_1 f)(t) - (N_1 f)(\bar{t}) \|_B \leqq \\ &\leqq \left\| e^{-\gamma t} X\left(t, e^{\gamma t} f(t), \int\limits_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds\right) - e^{-\gamma \bar{t}} X\left(\bar{t}, e^{\gamma t} f(t), \int\limits_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds\right) \right\|_B + \\ &+ \left\| e^{-\gamma \bar{t}} X\left(\bar{t}, e^{\gamma t} f(t), \int\limits_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds\right) - e^{-\gamma \bar{t}} X\left(\bar{t}, e^{-\gamma \bar{t}} f(\bar{t}), \int\limits_{a(\bar{t})}^{b(\bar{t})} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds\right) \right\|_B \leqq \end{aligned}$$

$$\leqq \| e^{-\gamma t} X(t, e^{\gamma t} f(t), \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds) - e^{-\gamma \bar{t}} X(\bar{t}, e^{\gamma t} f(t), \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds) \|_B +$$

$$+ M \max \{ \| e^{\gamma t - \gamma \bar{t}} f(t) - f(\bar{t}) \|_B, \| \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds - \int_{a(\bar{t})}^{b(\bar{t})} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds \|_B \}.$$

Введем следующие обозначения:

Обозначим через I_1 первое слагаемое, через I_2 — первое выражение в скобках максимума, через I_3 — второе выражение в скобках максимума. Оценим выражения I_1, I_2 и I_3 в отдельности.

Пусть ε произвольное положительное число. Так как функция $X(t, x, y)$ равномерно непрерывна по t, существует такое число $\delta_1 > 0$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, что

$$I_1 = \| e^{-\gamma t} X(t, e^{\gamma t} f(t), \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds) - e^{-\gamma \bar{t}} X(\bar{t}, e^{\gamma t} f(t), \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds) \|_B <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2},$$

если $| t - \bar{t} | < \delta_1$.

Используя факт что $f \in B_1$ можем найти число $\delta_2 > 0$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ такое, чтобы выполнялось неравенство

$$I_2 = \| e^{\gamma t - \gamma \bar{t}} f(t) - f(\bar{t}) \|_B \leqq \| f(t) \|_B | 1 - e^{\gamma (t - \bar{t})} | +$$

$$+ \| f(t) - f(\bar{t}) \|_B < \frac{\varepsilon}{2M},$$

если $| t - \bar{t} | < \delta_2$.

Для I_3 получаем оценку

$$I_3 = \| \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds - \int_{a(\bar{t})}^{b(\bar{t})} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds \|_B \leqq$$

$$\leqq \| \int_{a(\bar{t})}^{b(\bar{t})} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds - \int_{a(t)}^{b(t)} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds \|_B +$$

$$+ \| \int_{a(t)}^{b(t)} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds - \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds \|_B = I_3' + I_3'',$$

$$I_3' = \| \int_{a(\bar{t})}^{b(\bar{t})} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds - \int_{a(\bar{t})}^{b(\bar{t})} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds -$$

$$+ \int_{a(\bar{t})}^{a(t)} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds - \int_{b(\bar{t})}^{b(t)} K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds \|_B \leqq$$

$$\leqq \int_{a(t)}^{a(\bar{t})} \| K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s)) \|_B\, ds + \int_{b(t)}^{b(\bar{t})} \| K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s)) \|_B\, ds \leqq$$

$$\leqq K_1(\bar{t}) \int_{a(t)}^{a(\bar{t})} (1 + \| f(s) \|_B)\, ds + K_1(\bar{t}) \int_{b(t)}^{b(\bar{t})} (1 + \| f(s) \|_B)\, ds \leqq$$

$$\leqq (1 + P) | a(\bar{t}) - a(t) | + (1 + P) | b(\bar{t}) - b(t) | < \frac{\varepsilon}{4M},$$

если $|t - \bar{t}| < \delta_3$, $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon)$, так как функции $a(t)$ и $b(t)$ равномерно непрерывны и P — некоторая верхняя грань для $\|f(t)\|_B$.

Из равномерной непрерывности функции $K(t, s, y)$ по t следует, что можно найти число $\delta_4 > 0, \delta_4 = \delta_4(\varepsilon)$ такое, чтобы при $|t - \bar{t}| < \delta_4$ было выполнено неравенство

$$I_3'' \leqq \int_{a(t)}^{b(t)} \| K(t, s, e^{\gamma s} f(s)) - K(\bar{t}, s, e^{\gamma s} f(s)) \|_B \, ds < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. Тогда при $|t - \bar{t}| < \delta$ получаем

$$\| (N_1 f)(t) - (N_1 f)(\bar{t}) \|_B < \varepsilon,$$

что доказывает равномерную непрерывность функции $(N_1 f)(t)$.

Покажем, что операторы N_1 и N_2 непрерывны.

Действительно, если функции f, $g \in B_1$, то согласно условиям теоремы 4 и 8.7.7. (стр. 169) из [4] имеем

1. При $t \geqq 0$

$$\| (N_1 f)(t) - (N_1 g)(t) \|_B \leqq$$

$$\leqq \| e^{-\gamma t} X(t, e^{\gamma t} f(t), \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds) - e^{-\gamma t} X(t, e^{\gamma t} g(t), \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} g(s))\, ds \|_B \leqq$$

$$\leqq e^{-\gamma t} M \max\{\| e^{\gamma t} f(t) - e^{\gamma t} g(t) \|_B, e^{\gamma t} \| \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} f(s))\, ds - \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, e^{\gamma s} g(s))\, ds \|_B\} \leqq$$

$$\leqq M \max\{\| f(t) - g(t) \|_B, \int_{a(t)}^{b(t)} \| K(t, s, e^{\gamma s} f(s)) - K(t, s, e^{\gamma s} g(s)) \|_B \, ds\} \leqq$$

$$\leqq M \max\left\{\| f(t) - g(t) \|_B, K_2(t) \int_{a(t')}^{b(t')} \frac{e^{-\gamma s}}{Q} \| e^{\gamma s} f(s) - e^{\gamma s} g(s) \|_B \, ds\right\} \leqq$$

$$\leqq M \max\left\{\| f(t) - g(t) \|_B, \frac{Q}{Q} \sup_{s \in [a(t'), b(t')]} \| f(s) - g(s) \|_B\right\} \leqq$$

$$\leqq M \max\{\| f(t) - g(t) \|_B, \sup_{s \in R} \| f(s) - g(s) \|_B\} \leqq M \| f - g \|_{B_1}.$$

2. При $t \leqq 0$

$$\| (N_1 f)(t) - (N_1 g)(t) \|_B \leqq$$

$$\leqq \| X(0, f(0), \int_{a(0)}^{b(0)} K(0, s, \varphi(a^{-1}(s)))\, ds) - X(0, g(0), \int_{a(0)}^{b(0)} K(0, s, \varphi(a^{-1}(s)))\, ds) \|_B \leqq$$

$$\leqq M \max\left\{\| f(0) - g(0) \|_B, K_2(0) \int_{a(0)}^{b(0)} \frac{e^{-\gamma s}}{Q} \| \varphi(a^{-1}(s)) - \varphi(a^{-1}(s)) \|_B \, ds\right\} \leqq$$

$$\leqq M \max\{\| f(0) - g(0) \|_B, 0\} \leqq M \| f - g \|_{B_1}.$$

Следовательно

$$\| N_1 f - N_1 g \|_{B_1} \leqq M \| f - g \|_{B_1}.$$

Пусть теперь f и $g \in B_2$. Тогда

$$\| (N_2 f)(t) - (N_2 g)(t) \|_B \leqq$$
$$\leqq M \max \{\| f(0) - g(0) \|_B, \int_{a(0)}^{b(0)} \| K(0, s, \varphi(a^{-1}(s))) - K(0, s, \varphi(a^{-1}(s))) \|_B \, ds\} \leqq$$
$$\leqq M \max \left\{ \| f(0) - g(0) \|_B, K_2(0) \int_{a(0)}^{b(0)} \frac{e^{-\gamma s}}{Q} \| \varphi(a^{-1}(s)) - \varphi(a^{-1}(s)) \|_B \, ds \right\} \leqq$$
$$\leqq M \max \{\| f(0) - g(0) \|_B, 0\} \leqq M \| f - g \|_{B_2}.$$

Следовательно

$$\| N_2 f - N_2 g \|_{B_2} \leqq M \| f - g \|_{B_2}.$$

Покажем, что выполнено условие A2 теоремы 2. Положим $\alpha = \gamma - M$. Тогда

$$\| ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N_i) f - ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N_i) g \|_{B_i} \geqq$$
$$\geqq \| (1 + \lambda M)(f - g) \|_{B_i} - \lambda \| N_i f - N_i g \|_{B_i} \geqq$$
$$\geqq (1 + \lambda M) \| f - g \|_{B_i} - \lambda M \| f - g \|_{B_i}.$$

Следовательно

$$\| ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N_i) f - ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N_i) g \|_{B_i} \geqq \| f - g \|_{B_i}$$
$$(i = 1, 2)$$

где $f, g \in B_i$.

Приложим теорему 2. Из условий теоремы 4 следует, что $e^{-\gamma t}\varphi(a^{-1}(t))$ принадлежит $D(M_2)$.

Пусть функция $g \in B_1$ определена по формуле

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \geqq 0, \\ (M_i + N_2 + \gamma I)(e^{-\gamma t} \varphi(a^{-1}(t))), & t < 0. \end{cases}$$

Согласно теоремы 2 существует единственная функция $h(t)$, $h(t) \in D(M_1)$ для которой $(M_1 + N_1 + \gamma I) h(t) = g(t)$ и $(jh)(t) = e^{-\gamma t}\varphi(a^{-1}(t))$, т. е.

$$\dot{h}(t) + (N_1 h)(t) + \gamma h(t) = g \equiv 0$$

при $t \geqq 0$ и $h(t) = e^{-\gamma t}\varphi(a^{-1}(t))$ при $t \leqq 0$.

Положим $x(t) = e^{\gamma t} h(t)$ при $t \in R$. Непосредственно проверяется, что функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2).

Действительно, при $t \leqq 0$, $x(t) = e^{-\gamma t} e^{\gamma t}\varphi(a^{-1}(t)) = \varphi(a^{-1}(t))$ и $x[a(t)] = \varphi(t)$, а при $t \geqq 0$

$$\dot{x}(t) = \gamma h(t) e^{\gamma t} + e^{\gamma t}\dot{h}(t) = \gamma h(t) e^{\gamma t} - e^{\gamma t}(N_1 h)(t) - \gamma h(t) e^{\gamma t} =$$
$$= X\left(t, x(t), \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s, x(s)) \, ds\right).$$

Единственность решения следует из единственности функции $h(t)$.

Этим теорема 4 доказана.

Наконец с помощью теоремы 3 докажем теорему об устойчивости.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Выполнены условия теоремы 4.*

2. *Функции* $x_\varphi(t)$ *и* $x_\psi(t)$ — *решения задачи* (1), (2) *с начальными функциями* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *при* $t \leqq 0$.

Тогда

$$\| x_\varphi(t) - x_\psi(t) \|_B \leqq$$

$$\leqq \frac{e^{\gamma t}}{\gamma - M} \{\sup_{t \leqq 0} \| e^{-\gamma t} [\varphi(a^{-1}(t)) \,.\, \dot{a}^{-1}(t) - \dot{\psi}(a^{-1}(t)) \,.\, \dot{a}^{-1}(t)] \|_B + \| \dot{\varphi}(0) - \dot{\psi}(0) \|_B\}.$$

Доказательство.

$$\| e^{-\gamma t} x_\varphi(t) - e^{-\gamma t} x_\psi(t) \|_{B_1} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\gamma - M} \| (M_2 + N_2 + \gamma I) e^{-\gamma t} \varphi(a^{-1}(t)) - (M_2 + N_2 + \gamma I) e^{-\gamma t} \psi(a^{-1}(t)) \|_{B_1} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\gamma - M} \| e^{-\gamma t} \dot{\varphi}(a^{-1}(t)) \dot{a}^{-1}(t) - X\Big(0, \varphi(0), \int_{a(0)}^{b(0)} K(0, s, \varphi(a^{-1}(s)))\, ds\Big) -$$

$$- e^{-\gamma t} \dot{\psi}(a^{-1}(t)) \dot{a}^{-1}(t) + X\Big(0, \psi(0), \int_{a(0)}^{b(0)} K(0, s, \psi(a^{-1}(s)))\, ds\Big) \|_{B_2} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\gamma - M} \{\| \dot{\varphi}(0) - \dot{\psi}(0) \|_{B_2} + \| e^{-\gamma t} [\dot{\varphi}(a^{-1}(t)) \dot{a}^{-1}(t) - \dot{\psi}(a^{-1}(t)) \dot{a}^{-1}(t)] \|_{B_2}\}.$$

Следовательно

$$\| x_\varphi - x_\psi \|_B \leqq$$

$$\leqq \frac{e^{\gamma t}}{\gamma - M} \{\sup_{t \leqq 0} \| e^{-\gamma t} [\dot{\varphi}(a^{-1}(t)) \dot{a}^{-1}(t) - \dot{\psi}(a^{-1}(t)) \dot{a}^{-1}(t) \|_B + \| \dot{\varphi}(0) - \dot{\psi}(0) \|_B\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Krivocheine, L. E., Leung, K. V., Mangeron, D., Oguztöreli, M. N.: *Sur une nouvelle extension du problème de Cauchy pour certains systèmes integrodifferentielle non lineares.* Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser. 60, 28—35 (1974).

[2] Lovelady, D., Martin, R.: *A global existence theorem for a nonautonomous differential equation in a Banach space,* Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 445—449.

[3] Webb, G. F.: *Accretive operators and existence for nonlinear functional differential equations.* J. Differential Equations 14 (1973), Num. 1.

[4] Дьедонне, Ж.: *Увод в съвременния анализ.* Наука и изкуство, София 1972.

В. Г. Ангелов
Д. Д. Байнов
София-4, Оборище 23
Болгария