Archivum Mathematicum

A. G. Nakonechnyj

Минимаксная оценка функционалов от решений операторных уравнений

Archivum Mathematicum, Vol. 14 (1978), No. 1, 55--59

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106991`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIV: 55—60, 1978

МИНИМАКСНАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

НАКОНЕЧНЫЙ А. Г., Киев
(Поступило в редакцию 3го декабра 1976г)

Приводится некоторая, общая схема минимаксной оценки функционалов от решений операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Используя указанную схему, в дальнейшем предполагается рассмотреть задачи оценки состояний для уравнений с частными производными.

Использующиеся в статье результаты из теории гильбертовых пространств с негативной нормой см., например в [1] и [2].

Пусть имеется гильбертово пространство H_0 и его оснащение пространствами H_+ и H_-. Скалярные произведения и нормы в этих пространствах будем обозначать соответствующими индексами.

Предположим, что нам дано операторное уравнение вида

$$Ax = f_1 + a_1 \tag{1}$$

где A линейный непрерывный оператор действующий из H_+ в H_- и для которого существует ограниченный обратный. a_1, f_1 – некоторые элементы из H_-.

Предположим далее, что задан элемент y, гильбертого пространства H, вида

$$y = Cx + a_2 + f_2 \tag{2}$$

C – ограниченный оператор переводящий H_+ в H
a_2, f_2 – элементы из H.

Относительно вектора $f = (f_1, f_2) \in H_- \times H$, сделаем следующее предположение.

Нам задана область $D \subset H_- \times H$, которой этот вектор принадлежит.

$$D = \{f: (Q_1 f_1, f_1)_- + (Q_2 f_2, f_2) \leqq 1\}$$

Q_1, Q_2 – неотрицательные непрерывные самосопряженные операторы, обратные для которых ограничены.

Наша задача состоит в том, чтобы зная элемент y, вида (2) и зная, что $f \in D$, оценить наилучшим, в некотором смысле, образом линейный непрерывный функционал от решения уравнения (1).

Заметим, что при решении этой задачи, не ограничивая общности, можем считать, что $a_1 = a_2 = 0$. В противном случае, можно ввести элементы

$\tilde{x} = x - \bar{x}$ и $\tilde{y} = y - \bar{y}$, где $\bar{x}$ удовлетворяет уравнению $A\bar{x} = a_1$ а $\bar{y}$ определяется из условия $\bar{y} = C\bar{x} + a_2$, которые удовлетворяют уравнению вида (1) и (2) с $a_1 = a_2 = 0$ и решать задачу оценки для функционала от $\tilde{x}$.

В дальнейшем, для функционала $l(x)$ мы будем использовать представление $l(x) = (l, x)_0$; $l \in H_-$.

Пусть допустимые оценки для этого функционала имеют вид

$$\hat{l}(x) = -(u, y); \qquad u \in H$$

Оценку для которой элемент u определяется из условия

$$\inf_u \sup_{f \in D} [l(x) - \hat{l}(x)]^2$$

назовем минимаксной.

Теорема. *Минимаксная оценка имеет вид*

$$\hat{l}(x) = -(\hat{u}, y).$$

где $\hat{u} = -Q_2Cp$, *а элемент* p находится из решения системы уравнений

$$IAp = \hat{Q}_1 z \tag{4}$$
$$A^+z = l - C^*\Lambda Q_2 Cp$$

где A^+ *— сопряженный оператор к оператору* A, *непрерывно переводящий* H_+ в H_- *и удовлетворяющий условию*

$$(Ag, v)_0 = (g, A^+v)_0; \qquad v \in H_+, \qquad g \in H_+$$

Λ *— канонический изоморфизм пространства* H *в сопряженное см* [2]. $\tilde{Q}_1 = IQ_1^{-1}I^*$; I *— оператор обратный к оператору вложения* H_+ в H_-.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая Лемма. Задача нахождения минимаксной оценки, эквивалентна задаче оптимального управления системой

$$A^+z = l + C^*\Lambda u \tag{5}$$

с критерием качества, вида

$$I(u) = (\tilde{Q}_1 z, z)_+ + (Q_1^{-1}u, u)$$

Так как

$$l(x) = (l, x)_0 = (A^+z, x)_0 - (C^*\Lambda u, x)_0 = (z, f_1)_0 - (u, Cx)$$
$$\hat{l}(x) = -(u, y) = -(u, Cx) - (u, f_2),$$

то

$$[l(x) - \hat{l}(x)]^2 = [(z, f_1)_0 + (u, f_2)]^2 = [(z, If_1)_+ + (u, f_2)]^2 = [(I^* z, f_1)_- + \\ + (u, f_2)]^2 .$$

С этого представления получаем, что

$$\sup_{f \in D} [l(x) - \hat{l}(x)]^2 = (\tilde{Q}_1 z, z)_+ + (Q_2^{-1} u, u) = I(u) .$$

Доказательство теоремы.

Так как $I(u) \geqq c(u, u)$, то согласно [2], существует единственный элемент $\hat{u} \in H$, такой что

$$I(\hat{u}) = \inf_u I(u) .$$

Для нахождения $\hat{u}$, найдем $I'(u)$. Обозначим через $z(u)$ и $z(v)$, решения уравнения (5) при управлениях u и v — соответственно.

Из (5) имеем, что

$$z(u) = (A^+)^{-1} (l + C^* \Lambda u)$$

и значит

$$z'(u)(v - u) = [z(v) - z(u)] .$$

Таким образом

$$\begin{aligned} 2^{-1} I'(u)(v - u) &= [\tilde{Q}_1 z(u), z(v) - z(u)]_+ + (Q_2^{-1} u, v - u) = \\ &= [Ap, z(v) - z(u)]_0 + (Q_2^{-1} u, v - u) = \\ &= [p, A^+(z(v) - z(u)]_0 + (Q_2^{-1} u, v - u) = \\ &= [p, C^* \Lambda(v - u)]_0 + (Q_2^{-1} u, v - u) = \\ &= (Cp, v - u) + (Q_2^{-1} u, v - u) . \end{aligned}$$

И так как

$2^{-1} I'(u) = Cp + Q_2^{-1} u$, то

$\hat{u} = -Q_2 C p$, что и требовалось показать.

Следствие.

Пусть $H_+ = H_0$, тогда система уравнений (4) запишется в виде

$$Ap = Q_1^{-1} z$$
$$A^* z = l - C^* \Lambda Q_2 C p$$

Замечание.

Пусть f_1 и f_2 — случайные величины со значениями в пространстве H_- и H_+, соответственно, причем

$$M \| f_1 \|^2 < \infty, \qquad M \| f_2 \|^2 < \infty; \qquad M f_1 = M f_2 = 0 ;$$

и нам известно, что либо $f = (f_1, f_2) \in D_1$, либо $f \in D_2$ если f_1 и f_2 некоррелированы
где

$$D_1 = \{f\colon M(Q_1 f_1, f_1)_- + M(Q_2 f_2, f_2) \leqq 1\}$$

$$D_2 = \{f\colon M(Q_2 f_1, f_1) \leqq 1; \qquad M(Q_2 f_2, f_2) \leqq 1\}.$$

В этом случае оценку функционала $l(x)$, вида $\hat{l}(x) = -(u, y)$, где x удовлетворяет уравнению (1), а y, вида (2), можно искать из условия

$$\inf_u \sup_{f \in D_s} M[l(x) - \hat{l}(x)]^2, \qquad s = 1, 2.$$

Так же можно показать, что минимаксная оценка имеет вид

$$\hat{l}(x) = -(\hat{u}, y); \qquad \hat{u} = -Q_2 Cp, \text{ а}$$

p — определяется из системы (4) и эта оценка несмещена.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть x удовлетворяет уравнению

$$Ax = Ba + f_1$$

где B — непрерывный оператор действующий из гильбертового пространства H_1 в пространство H_-, a — неизвестный элемент из пространства H. В предположении, что известен элемент y, вида

$$y = Cx + f_2$$

и что $f \in D$, нужно получить минимаксную оценку линейного непрерывного функционала $l(a)$, предполагая что оценка имеет вид

$$\hat{l}(a) = -(u, y); \qquad u \in H$$

а элемент u ищется из условия

$$\inf_{u \in U} \sup_{f \in D} [l(a) - \mathrm{l}(a)]^2,$$

где $U \subseteq H$

$$U = \{u : z \in Z\}.$$

Z — совокупность решений уравнения

$$B^+ z = -l$$

u, z, связаны уравнением

$$A^+ z = C^* \Lambda u$$

B^+ — оператор удовлетворяющий условию

$$(Ba, z)_0 = (a, B^+ z)_1.$$

Подобно тому, как доказывается теорема, можно показать, что задача отыскания оценки эквивалентна некоторой задаче оптимального управления и решая эту задачу в предположении что у оператора $R = pQ^{-1}p$ существует обратный, где

$$p = B^{+}(A^{+})^{-1}\, C^{*}\Lambda\, ;$$

$$Q = \Lambda^{*}C^{*}[(A^{+})^{-1}]^{*}\, \tilde{Q}_1 C^{*}\Lambda + Q_2^{-1}$$

и получить минимаксную оценку в виде

$$\hat{l}(a) = (Q^{-1}p^{*}R^{-1}B^{+}(A^{+})^{-1}\, l, a)_1 .$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Березанский, Ю. М.: *Разложение по созбственным функциям самосопряженных операторов.* Киев, 1965 г.

[2] Лионс, Ж. Л.: *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с часными производными,* Мир, М ., 1972 г.

Наконечный А. Г.
Факультет кибернетики, Университет им. Т. Шевченка
Киев 252022, *Владимирская* 64
СССР