Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Об одном обобщении конструктивного аналога теоремы К. М. Гарга

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 22 (1981), No. 3, 607--620

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106102

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
22,3 (1981)

ОВ ОДНОМ ОВОВЩЕНИИ КОНСТРУКТИВНОГО АНАЛОГА ТЕОРЕМЫ К.М. ГАРГА

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH)

Содержание: В статье доказан аналог теоремы К.М. Гарга о производных Дини для двусторонних нижних и верхних псевдопроизводных [0]-равномерно непрерывных конструктивных [0]-функций по функциям того же типа и области арифметических действительных чисел.

Ключевые слова: Арифметическое действительное число, [0]-конструктивная функция действительной переменной, производные Дини функции по функции, псевдодифференцируемость.

Classification: 03F65, 26A24

Утверждения, доказанные в настоящей статье, дополняют результаты из [8]. Их можно использовать при изучении вопросов, связанных с однозначностью конструктивного интеграла Перрона-Стилтьеса.

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [7] и [8], в частности, переменными, перечисленными в [7]. Определения использованных основных понятий конструктивного математического анализа содержатся в [2].

Определение. Пусть $\mathcal{G}$ псевдоравномерно непрерывная [0]-функция и X АДЧ. Мы определим

$$\mathrm{Reg}_0(\mathcal{G},X) \rightleftharpoons \neg\neg\exists m\,\forall Y(0<|Y-X|<2^{-m}\ \&\ Op[\mathcal{G}](Y)=Op[\mathcal{G}](X)\supset$$
$$\forall p\,\neg\neg\exists a b(|a-Y|<2^{-p}\ \&\ |b-Y|<2^{-p}\ \&\ \mathcal{G}(a)<Op[\mathcal{G}](Y)<\mathcal{G}(b))).$$

Основным результатом настоящей статьи является следующее утверждение (ср. теорему 2 и замечание 4 из [8]). Соответствующее классическое утверждение можно доказать на основании леммы 5.1 и теоремы 5.3 из [1], стр. 272-273.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [0]- равномерно непрерывные [0]-функции. Тогда существует возрастающая всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]- КФДП $\mathcal{J}$ такая, что
$0 \leq \mathcal{J} \leq 1 \& \forall X(\neg D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{J}, Op[\mathcal{F}](X)) \& Reg(\mathcal{G}, X) \supset 0 < X < 1 \&$
$\& Reg_0(\mathcal{F}, X) \& \neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = -\infty \& \overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = +\infty \vee$
$\vee \underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = \overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) \& \neg(\underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = 0)))$.

Замечание 1. Пусть $\mathcal{F}$ псевдоравномерно непрерывная [0]-функция, $\mathcal{G}$ [0]- равномерно непрерывная [0]-функция и X АДЧ. Тогда $Reg_0(\mathcal{F}, X) \supset Reg(\mathcal{F}, X)$,
$\neg\neg(Incr(\mathcal{F}, X) \vee Decr(\mathcal{F}, X)) \supset Reg_0(\mathcal{F}, X)$ и
$Reg_0(\mathcal{G}, X) \equiv \neg\neg\exists m \forall c d((X - 2^{-m} < c < d < X \vee X < c < d < X + 2^{-m}) \supset$
$\neg(Op[\mathcal{G}](X) = \langle I, \mathcal{G}\rangle(c \Delta d) \vee Op[\mathcal{G}](X) = \langle S, \mathcal{G}\rangle(c \Delta d)))$.

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ псевдоравномерно непрерывные [0]-функции и X и Y АДЧ такие, что $Reg_0(\mathcal{G}, X) \& Reg(\mathcal{G}, Y)$. Тогда $Reg_0(-\mathcal{G}, X)$, $\underline{D}[\mathcal{F}, -\mathcal{G}](X) = -\overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X)$ и $\underline{D}[-\mathcal{F}, \mathcal{G}](Y) = -\overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](Y)$.

Пример 1. Существуют [0]-равномерно непрерывные [0]-функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ и [0]-КДЧ v такие, что $Reg(\mathcal{G}, v) \& \underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) =$
$= -\infty \& \overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) = +\infty \& \underline{D}[\mathcal{F}, -\mathcal{G}](v) = 1 \& \overline{D}[\mathcal{F}, -\mathcal{G}](v) = +\infty$.

Замечание 2. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ псевдоравномерно непрерывные [0]-функции, X, Y, Z_0 и Z_1 АДЧ, $Z_0 \leq Z_1$

1) Согласно [8] значение $\Theta(\mathcal{F}, \mathcal{G}, X, Y)$ определено только в том случае, если

(1) $Op[\mathcal{F}](Y) = Op[\mathcal{F}](X) \& Op[\mathcal{G}](Y) = Op[\mathcal{G}](X)$

неверно. Если (1) верно, то мы будем считать, что выражения

$Z_0 \leq \Theta(\mathcal{F}, \mathcal{G}, X, Y)$, $\Theta(\mathcal{F}, \mathcal{G}, X, Y) \leq Z_1$ и $Z_0 \leq \Theta(\mathcal{F}, \mathcal{G}, X, Y) \leq Z_1$

являются верными суждениями (ср. замечание 1 из [8]).

2) В следующем мы будем пользоваться тем, что двойное отрицание можно с равенства и неравенства снять ([2], стр. 37) и что - очевидно - $0 < X < 1 \supset \underline{D}[\mathcal{F}, h_1](X) = \underline{D}[\mathcal{F}](X)$ & $\overline{D}[\mathcal{F}, h_1](X) = \overline{D}[\mathcal{F}](X)$ ([7]).

Замечание 3. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [0]-равномерно непрерывные [0]-функции, $a \triangle b$ рациональный сегмент, $a \triangle b \subseteq \subseteq 0 \triangledown 1$, и ℓ НЧ. Мы можем без ограничения общности предположить, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [0]-функции типа B (см. [8]).

Мы обозначим посредством φ, f, φ_0, φ_1, $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ [0]-равномерно непрерывные [0]-функции типа B такие, что $\varphi = \mathcal{F} + (\ell + 1) \cdot \mathcal{G}$, для любого НЧ i , $0 \leq i \leq 1$, φ_i линейна на сегментах $0 \triangle a$ и $b \triangle 1$, $\varphi_i(0) = (-1)^i \cdot$ $\cdot (\langle I, (-1)^i \cdot \varphi \rangle (0 \triangle 1) - 1)$, $\varphi_i(1) = (-1)^i \cdot (\langle S, (-1)^i \cdot \varphi \rangle (0 \triangle 1) + 1)$

и для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$ выполнено

$$f(x^{[0]}) = max(a, min(x^{[0]}, b)) ,$$

$$(x^{[0]} \in a \triangle b \supset \varphi_i(x^{[0]}) = (-1)^i \cdot \langle S, (-1)^i \cdot \varphi \rangle (a \triangle f(x^{[0]}))) ,$$

$$\mathcal{G}_i(x^{[0]}) = (-1)^i \cdot \langle S, (-1)^i \cdot \mathcal{G} \rangle (a \triangle f(x^{[0]})) \qquad \text{и}$$

$$\mathcal{F}_i(x^{[0]}) = \varphi_i(x^{[0]}) - (\ell + 1) \cdot \mathcal{G}_i(x^{[0]}) .$$

Пусть f_0 (соотв. f_1) возрастающая (соотв. убывающая) всюду определенная [0]-КФДП типа B линейная на сегменте $\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a} \rightleftharpoons (\langle I, \varphi \rangle (0 \triangle 1) - 1) \triangle (\langle S, \varphi \rangle (0 \triangle 1) + 1)$, и отображающая его на сегмент $0 \triangle 1$. Мы определим $\tau \rightleftharpoons |\mathfrak{a}|$.

Существует [0]-КФДП типа A (см. [8]) $\overline{\psi}$ такая, что $\forall c\, D_{\text{кл}}(+\infty, \overline{\psi}, \mathcal{F}(c))$ & $\forall c d j (c < d$ & $0 \leq j \leq 1 \supset$

$D_{\text{кл}}(+\infty, \overline{\psi}, (-1)^j \cdot (\langle S, (-1)^j \cdot \varphi \rangle (c \triangle d) - (\ell+1) \cdot \langle S, (-1)^j \cdot \mathcal{G} \rangle (c \triangle d))))$.

1) Исходя от пары $\mathcal{G}$, φ, мы построим согласно теореме 1 из [8] [0]-КФДП типа А $\overline{\mathcal{H}}$, обладающую описанными там свойствами.

Пусть i НЧ, $0 \leq i \leq 1$.

Мы напомним, что $*$ обозначает операцию суперпозиции. Пусть

$$\Phi_i \rightleftharpoons \frac{1}{\Delta(\overline{\mathcal{H}} * \varphi_i + (-1)^i \cdot h_1, 0\Delta 1)} \cdot (\overline{\mathcal{H}} * \varphi_i - \overline{\mathcal{H}} * \varphi_i(0) + (-1)^i \cdot h_1).$$

Тогда $\Phi_i(0) = 0 \,\&\, \Phi_i(1) = 1$, Φ_i возрастающая на $0 \Delta 1$ [0]-равномерно непрерывная [0]-функция и, следовательно, мы можем без ограничения общности предположить, что Φ_i [0]-функция типа В. Мы напомним, что $(\Phi_i)^{-1}$ [0]-функция обратная к Φ_i.

Исходя от [0]-функции $\mathcal{F}_i * (\Phi_i)^{-1}$, мы построим согласно теореме 3 из [7] [0]-КФДП типа А ψ_i, для которой выполнено

(2) $\forall X (\underline{D}^{-}[\mathcal{F}_i * (\Phi_i)^{-1}](\Phi_i(X)) = 0 \supset D_{кл}(+\infty, \psi_i, \mathcal{F}_i(X)))$.

Мы определим $\hat{\psi} \rightleftharpoons \frac{1}{3} \cdot (\overline{\psi} + \psi_0 + \psi_1)$. Тогда $\hat{\psi}$ [0]-КФДП типа А, $\forall c\, D_{кл}(+\infty, \hat{\psi}, \mathcal{F}(c))$ и, следовательно, $\forall X (\neg D_{кл}(+\infty, \hat{\psi}, \mathcal{F}(X)) \supset \mathrm{Reg}(\mathcal{F}, X))$

Пусть m НЧ и v $[m]$-КДЧ, для которого выполнено

(3) $$\neg D_{кл}(+\infty, \hat{\psi}, \mathcal{F}(v))$$

и

(4) $$a < v < b \,\&\, \forall X (X \in a \Delta b \supset -\ell \leq \Theta(\mathcal{F}, \mathcal{G}, v, X)) \,\&\, \underline{D}[\mathcal{G}, \mathcal{F}](v) = -\infty \,\&\, \overline{D}[\mathcal{G}, \mathcal{F}](v) = +\infty .$$

Тогда, как мы покажем, имеет место

(5) $$D_{кл}(0, \mathcal{F} | \mathcal{G}, v).$$

а) Ввиду (4) для всякого АДЧ X из $a \Delta b$ верно

$1 \leq \theta(\varphi, \mathcal{G}, v, X)$ и, следовательно, $0 \leq \theta(\mathcal{G}, \varphi, v, X) \leq$
$\leq 1 \,\&\, (\varphi(X) = \varphi(v) \equiv (\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(v) \,\&\, \mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(v))) \,\&$
$\&\, (\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(v) \supset \varphi(X) \geq \varphi(v))$.

б) На основании (3), а) и свойств [0]-КФДП $\overline{\psi}$ мы получаем

(6) $\neg \exists c\, (c \in a \Delta b \,\&\, \varphi(c) = \varphi(v)) \,\&\, \neg \exists c d\, (a \leq c < d \leq b \,\&$
$(\varphi(v) = \langle I, \varphi \rangle (c \Delta d) \vee \varphi(v) = \langle S, \varphi \rangle (c \Delta d)))$.

Итак, $\varphi(v)$ $[m]$-КДЧ,

(7) $\neg(\varphi(a) = \varphi(v)) \,\&\, \mathrm{Reg}(\varphi, v)$

и осуществимо $[m]$-КДЧ $\overline{v}$ такое, что

(8) $a < \overline{v} \leq v \,\&\, \varphi(\overline{v}) = \varphi(v) \,\&\, \forall X\, (a \leq X < \overline{v} \supset$
$0 < (\varphi(\overline{v}) - \varphi(X)) \cdot (\varphi(\overline{v}) - \varphi(a)))$.

Пусть i НЧ, для которого выполнено

(9) $0 \leq i \leq 1 \,\&\, 0 < (-1)^{i} \cdot (\varphi(\overline{v}) - \varphi(a))$.

Тогда согласно (8),(6) и а) верно

(10) $\varphi_i(\overline{v}) = \varphi(\overline{v}) = \varphi(v) \,\&\, \mathcal{G}_i(\overline{v}) = \mathcal{G}(\overline{v}) = \mathcal{G}(v) \,\&$
$\mathcal{F}_i(\overline{v}) = \mathcal{F}(\overline{v}) = \mathcal{F}(v) \,\&\, \mathrm{Incr}((-1)^{i} \cdot \varphi_i, \overline{v})$

и - тем более -

(11) $$\mathrm{Reg}(\varphi_i, \overline{v}) \ .$$

Легко доказать, что для всякого АДЧ X , $a \leq X < \overline{v}$, верно

(12) $\exists Y_0 Y_1 (a \leq Y_0 \leq X \,\&\, a \leq Y_1 \leq X \,\&\, \varphi_i(X) = \varphi_i(Y_0) = \varphi(Y_0) \,\&$
$\mathcal{G}_i(X) = \mathcal{G}_i(Y_1) = \mathcal{G}(Y_1))$

и, следовательно, ввиду а), (10) и свойств [0]-функций φ_i и $\mathcal{G}_i$ имеет место $0 \leq \theta(\mathcal{G}_i, \varphi_i, \overline{v}, X) \leq 1$.

Мы допустим, что $D_{\kappa\lambda}(+\infty, \overline{\mathcal{H}}, \varphi(v))$. Тогда согласно (10) $D_{\kappa\lambda}(+\infty, \overline{\mathcal{H}}, \varphi_i(\overline{v}))$ и ввиду (11) выполнено

$\mathrm{Reg}(\overline{\mathcal{H}} * \varphi_i, \overline{v}) \& \underline{D}^{-}[\mathcal{G}_i, \overline{\mathcal{H}} * \varphi_i](\overline{v}) = \overline{D}^{-}[\mathcal{G}_i, \overline{\mathcal{H}} * \varphi_i](\overline{v}) = 0 \& \underline{D}[\varphi_i, \overline{\mathcal{H}} * \varphi_i](\overline{v}) = \overline{D}[\varphi_i, \overline{\mathcal{H}} * \varphi_i](\overline{v}) = 0$ и, следовательно,

(13) $\underline{D}^{-}[\mathcal{F}_i, \overline{\mathcal{H}} * \varphi_i](\overline{v}) = \overline{D}^{-}[\mathcal{F}_i, \overline{\mathcal{H}} * \varphi_i](\overline{v}) = 0$.

Из (13) непосредственно следует $\underline{D}^{-}[\mathcal{F}_i * (\Phi_i)^{-1}](\Phi_i(\overline{v})) = 0$, что ввиду (3),(10) и (2) неверно.

Итак, мы доказали $\neg D_{\text{кл}}(+\infty, \overline{\mathcal{H}}, \varphi(v))$. Но тогда мы на основании (7), а) и свойств [0]-КФДП $\overline{\mathcal{H}}$ получаем

(14) $0 \leq \underline{D}[\mathcal{G}, \varphi](v) = \overline{D}[\mathcal{G}, \varphi](v) \leq 1$.

Ясно, что $\underline{D}[\varphi, \varphi](v) = \overline{D}[\varphi, \varphi](v) = 1$ и, таким образом, $\underline{D}[\mathcal{F}, \varphi](v) = \overline{D}[\mathcal{F}, \varphi](v) = 1 - (\ell + 1) \cdot \underline{D}[\mathcal{G}, \varphi](v)$.

Допустив, что $\neg(\underline{D}[\mathcal{F}, \varphi](v) = 0)$, мы согласно замечанию 1 и лемме 1 из [8] получаем $\underline{D}[\mathcal{G}, \mathcal{F}](v) = \overline{D}[\mathcal{G}, \mathcal{F}](v)$, что противоречит (4).

Таким образом, верно $\underline{D}[\mathcal{F}, \varphi](v) = 0$ и, следовательно, $0 < \underline{D}[\mathcal{G}, \varphi](v)$ и ввиду (14) и леммы 1 из [8] выполнено $\mathrm{Reg}(\mathcal{G}, v) \& \underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) = \overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) = 0$, т.е. (5), что и требовалось доказать.

2) Пусть $\ell = 0$.

Пусть i НЧ, $0 \leq i \leq 1$.

Для всякого НЧ m мы построим согласно лемме 4 из [4] и замечанию 1 из [5] [0]-КДЧ w_m и z_m и [0]-последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов $\{H_p^{i,m}\}_p^{[0]}$ такие, что $\overline{\mathcal{H}}(\{H_p^{i,m}\}_p^{[0]}) \& 0 < z_m < w_m < 2^{-m} \& \forall p (H_p^{i,m} \subseteq 0 \Delta 1 \supset (-1)^i \cdot \Delta(\varphi_i, H_p^{i,m}) < w_m \cdot |H_p^{i,m}|) \& \forall x^{[0]} y^{[0]} (0 \leq x^{[0]} < y^{[0]} \leq 1 \supset z_m \cdot |x^{[0]} \Delta y^{[0]}| < (-1)^i \cdot \Delta([\varphi_i, \{H_p^{i,m}\}_p^{[0]}], x^{[0]} \Delta y^{[0]}))$,

и определим $\overline{\psi}_{i,m} \rightleftharpoons (f_i * [\varphi_i, \{H_p^{i,m}\}_p^{[0]}])^{-1}$, $\psi_{0,m} \rightleftharpoons \overline{\psi}_{0,m}$ и

$\psi_{1,m} \rightleftharpoons (\bar{\psi}_{1,m} * (1 - h_1))$. Тогда $\psi_{0,m}$ и $\psi_{1,m}$ строго монотонные на $0 \triangle 1$ [0]-равномерно непрерывные [0]-функции и мы можем предположить, что они являются [0]-функциями типа B.

Пользуясь теоремой 3 из [7] мы построим [0]-КФДП типа A $\mathcal{H}_i$, для которой выполнено

$$\forall X((\neg D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{H}_i, \varphi_i(X)) \supset 0 < X < 1 \,\&\, 0 < (-1)^i \cdot \underline{D}[\varphi_i](X) = (-1)^i \cdot \bar{D}[\varphi_i](X)) \,\&\, \forall m(\neg D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{H}_i, \varphi_i * \psi_{i,m}(X)) \supset 0 < X < 1 \,\&\, 0 < \underline{D}[\varphi_i * \psi_{i,m}](X) = \bar{D}[\varphi_i * \psi_{i,m}](X))) . \tag{15}$$

Следовательно, для всякого НЧ m имеет место

$$\forall X(\neg D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{H}_i, \varphi_i * \psi_{i,m}(f_0 * \varphi_i(X))) \,\&\, \neg \exists p (X \in H_p^{i,m}) \supset 0 < X < 1 \,\&\, D_{\text{кл}}(\tau, \varphi_i * \psi_{i,m}, f_0 * \varphi_i(X))) . \tag{16}$$

Мы используем теорему 2 из [8] и построим, исходя от пары $\mathcal{F}_i$, φ_i (соотв. от пары $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{H}_i * \varphi_i$) [0]-КФДП типа A $\bar{\mathcal{H}}_{i,0}$ (соотв. $\bar{\mathcal{H}}_{i,1}$), обладающую описанными там свойствами.

Пусть $\hat{\mathcal{H}} \rightleftharpoons \frac{1}{5} \cdot (\bar{\psi} + \bar{\mathcal{H}}_{0,0} + \bar{\mathcal{H}}_{0,1} + \bar{\mathcal{H}}_{1,0} + \bar{\mathcal{H}}_{1,1})$, где $\bar{\psi}$ [0]-КФДП из начальной части замечания. Ясно, что $\hat{\mathcal{H}}$ [0]-КФДП типа A.

Пусть n НЧ, v [n]-КДЧ и k НЧ такие, что

$$\neg D_{\text{кл}}(+\infty, \hat{\mathcal{H}}, \mathcal{F}(v)) \tag{17}$$

и

$$a < v < b \,\&\, \forall X(X \in a \triangle b \supset |\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}(v)| \leq 2^{-k-1} \cdot |\mathcal{G}(X) - \mathcal{G}(v)|) . \tag{18}$$

Мы определим

$$w \rightleftharpoons f_0(\varphi(v)) \tag{19}$$

и заметим, что $\varphi(v)$ и w [n]-КДЧ,

$$w = \frac{1}{\tau} \cdot (\varphi(v) - \langle I, \varphi \rangle (0 \triangle 1) + 1) \tag{20}$$

и, следовательно, $0 < w < 1$ и w зависит только от $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и v.

а) Ввиду (18) для всякого АДЧ X из $a \triangle b$ выполнено $1-2^{-k-1} \le \theta(\varphi, \mathcal{G}, v, X) \le 1+2^{-k-1} \& (\mathcal{G}(X)=\mathcal{G}(v) \equiv \varphi(X) = \varphi(v)) \& (\mathcal{G}(X)=\mathcal{G}(v) \supset \mathcal{F}(X)=\mathcal{F}(v))$.

б) На основании (17), а) и свойств $[0]$-КФДП $\overline{\psi}$ верно (6) и (7) и осуществимо $[m]$-КДЧ $\overline{v}$ такое, что (8).

Пусть i НЧ, для которого выполнено (9).

Тогда согласно (8),(6) и а) верно (10).

Для всякого АДЧ X, $a \le X < \overline{v}$, верно (12) и, следовательно, ввиду а),(10) и свойств $[0]$-функций φ_i и $\mathcal{G}_i$ имеет место $1-2^{-k-1} \le \theta(\varphi_i, \mathcal{G}_i, \overline{v}, X) \le 1+2^{-k-1} \& -2^{-k} \le \theta(\mathcal{F}_i, \varphi_i, \overline{v}, X) \le 2^{-k}$.

Ввиду этого, (10),(17) и свойств $[0]$-КФДП $\hat{\mathcal{H}}$ и $\overline{\mathcal{H}}_{i,0}$ выполнено

$$\text{(21)}\quad \begin{aligned} &\mathrm{Incr}\,((-1)^i \cdot \varphi_i, \overline{v}) \& -2^{-k} \le \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}_i, \varphi_i](\overline{v}) = \overline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}_i, \varphi_i](\overline{v}) \le \\ &\le 2^{-k} \& \neg(\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}_i, \varphi_i](\overline{v}) = 0). \end{aligned}$$

Мы допустим, что $\mathrm{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{H}_i, \varphi_i(\overline{v}))$. Тогда $\mathrm{Incr}\,((-1)^i \cdot \mathcal{H}_i * \varphi_i, \overline{v}) \& \underline{\mathrm{D}}^-[\mathcal{F}_i, \mathcal{H}_i * \varphi_i](\overline{v}) = \overline{\mathrm{D}}^-[\mathcal{F}_i, \mathcal{H}_i * \varphi_i](\overline{v}) = 0$, что ввиду (10),(17) и свойств $[0]$-КФДП $\hat{\mathcal{H}}$ и $\overline{\mathcal{H}}_{i,1}$ невозможно.

Итак, верно

$$\text{(22)}\qquad \neg\, \mathrm{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{H}_i, \varphi_i(\overline{v}))$$

и тогда согласно (15) имеет место $0 < (-1)^i \cdot \underline{\mathrm{D}}[\varphi_i](\overline{v}) = (-1)^i \cdot \overline{\mathrm{D}}[\varphi_i](\overline{v})$. Таким образом, ввиду монотонности $[0]$-функции φ_i не может не существовать НЧ m, для которого выполнено

$$\text{(23)}\qquad \neg\, \exists p\, (\overline{v} \in H_p^{i,m}).$$

Пусть m НЧ такое, что (23).

Тогда мы на основании (10) и (19) получаем $\varphi_i(\overline{v}) = \varphi(v)$,

(24) $\psi_{i,m}(w) = \overline{v}\ \&\ \mathcal{F}_i * \psi_{i,m}(w) = \mathcal{F}(v)\ \&\ w = f_0(\varphi_i(\overline{v}))$

и ввиду (22),(16),(21) и $Incr((-1)^i \cdot \psi_{i,m}, w)$ верно $D_{кл}(\tau, \varphi_i * \psi_{i,m}, w)\ \&\ -2^{-k} \le \underline{D}[\mathcal{F}_i * \psi_{i,m}, \varphi_i * \psi_{i,m}](w) = \overline{D}[\mathcal{F}_i * \psi_{i,m}, \varphi_i * \psi_{i,m}](w) \le 2^{-k}\ \&\ \neg(\underline{D}[\mathcal{F}_i * \psi_{i,m}, \varphi_i * \psi_{i,m}](w) = 0)$.
Следовательно, согласно лемме 1 из [8] выполнено

$$-\tau \cdot 2^{-k} \le \underline{D}[\mathcal{F}_i * \psi_{i,m}](w) = \overline{D}[\mathcal{F}_i * \psi_{i,m}](w) \le \tau \cdot 2^{-k}\ \& \tag{25}$$
$$\neg(\underline{D}[\mathcal{F}_i * \psi_{i,m}](w) = 0).$$

Таким образом, из (17) и (18) следует, что для $[m]$-КДЧ w, где (20), не могут не существовать НЧ i и m, для которых верно $0 \le i \le 1$, (24) и (25).

Замечание 4. Пусть $\{\mathcal{J}_p\}_p^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-равномерно непрерывных [0]-функций. Для всяких НЧ p и q мы используем теорему 3 из [7] и построим, исходя от [0]-функции $min(\mathcal{J}_p, \mathcal{J}_q)$, [0]-КФДП типа А $\mathcal{H}_{p,q}$, обладающую описанными там свойствами. Существует [0]-КФДП типа А $\hat{\mathcal{J}}$ такая, что $\hat{\mathcal{J}} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+q+2}} \cdot \mathcal{H}_{p,q}$. Мы получаем
$\forall p q X(\neg D_{кл}(+\infty, \hat{\mathcal{J}}, Op[\mathcal{J}_p](X))\ \&\ Op[\mathcal{J}_p](X) = Op[\mathcal{J}_q](X)\ \&\ \underline{D}[\mathcal{J}_p](X) = \overline{D}[\mathcal{J}_p](X)\ \&\ \underline{D}[\mathcal{J}_q](X) = \overline{D}[\mathcal{J}_q](X) \supset \underline{D}[\mathcal{J}_p](X) = \underline{D}[\mathcal{J}_q](X))$.

<u>Лемма 2</u>. (Ср. [1], стр. 273.) Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [0]-равномерно непрерывные [0]-функции. Тогда существует возрастающая всюду определенная [0]-равномерно непрерывная [0]-КФДП $\mathcal{J}$ такая, что $0 \le \mathcal{J} \le 1\ \&\ \forall X(D_{кл}(0, \mathcal{F}|\mathcal{G}, X) \supset D_{кл}(+\infty, \mathcal{J}, Op[\mathcal{F}](X)))$.

Доказательство. Пусть
$\tau \rightleftharpoons |(\langle I, \mathcal{F}+\mathcal{G}\rangle(0\Delta 1) - 1)\Delta(\langle S, \mathcal{F}+\mathcal{G}\rangle(0\Delta 1) + 1)|$, а $\{a_t \Delta b_t\}_t^{[0]}$ пересчет всех рациональных сегментов, содержащихся в $0 \triangledown 1$. Для всякого НЧ t мы используем часть 2 замечания 3 и постро-

им, исходя от пары $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, сегмента $a_t \Delta b_t$ и НЧ 0, [0]- КФДП типа А $\hat{\mathcal{H}}_t$ и для всяких НЧ i и m , $0 \leq i \leq 1$, [0]-функцию типа В $\mathcal{F}_i^t * \psi_{i,m}^t$, обладающие описанными там свойствами. Пусть $\{\mathcal{J}_p\}_p^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-равномерно непрерывных [0]-функций типа В, образованная [0]-функциями $\mathcal{F}_i^t * \psi_{i,m}^t$, где t , i и m НЧ, $0 \leq i \leq 1$. Пусть $\hat{\mathcal{I}}$ [0]-КФДП типа А, построенная для этой последовательности согласно замечанию 4.

Мы построим [0]-КФДП типа А $\mathcal{I}$ такую, что

$$\mathcal{I} = \left(\frac{1}{2} \cdot \hat{\mathcal{I}} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^{t+2}} \cdot \hat{\mathcal{H}}_t \right) .$$

Мы допустим, что v АДЧ, для которого верно $\mathrm{D}_{\text{кл}}(0, \mathcal{F} | \mathcal{G}, v) \& \neg \mathrm{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{I}, \mathcal{O}p[\mathcal{F}](v))$. Тогда $0 < v < 1$.

Пусть $w \rightleftharpoons \frac{1}{\tau} \cdot (\mathcal{O}p[\mathcal{F}+\mathcal{G}](v) - \langle \mathrm{I}, \mathcal{F}+\mathcal{G} \rangle (0 \Delta 1) + 1)$.

Иммет место $\neg \mathrm{D}_{\text{кл}}(+\infty, \hat{\mathcal{I}}, \mathcal{O}p[\mathcal{F}](v))$ и согласно части 2 замечания 3 выполнено $\forall k \neg\neg \exists p (\mathcal{J}_p(w) = \mathcal{O}p[\mathcal{F}](v) \& -\tau \cdot 2^{-k} \leq \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{J}_p](w) = \overline{\mathrm{D}}[\mathcal{J}_p](w) \leq \tau \cdot 2^{-k} \& \neg (\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{J}_p](w) = 0))$, что ввиду свойств [0]-КФДП $\hat{\mathcal{I}}$ исключено.

Пример 2. Существуют псевдоравномерно непрерывнне [0]-функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ такие, что $0 \leq \mathcal{F} \leq 1 \& \forall y^{[0]} (y^{[0]} \in 0 \Delta 1 \supset \neg\neg \exists x^{[0]} (\mathcal{F}(x^{[0]}) = y^{[0]} \& \mathrm{D}_{\text{кл}}(0, \mathcal{F} | \mathcal{G}, x^{[0]}) \& \underline{\mathrm{D}}^{-}[\mathcal{F}](x^{[0]}) = \overline{\mathrm{D}}^{+}[\mathcal{F}](x^{[0]}) = 0))$.

(Ср. [1], стр. 274, и теорему 5 из [7].)

Доказательство теоремы 1. Мы используем лемму 2 (соотв. теорему 1 из [8]) и построим, исходя от пары $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ (соотв. от пары $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$) [0]-КФДП типа А $\mathcal{J}$ (соотв. $\mathcal{H}$), обладающую описанными там свойствами. Пусть $\overline{\varphi}$ [0]-КФДП типа А такая, что $\forall c\, d\, y^{[0]} (c < d \& (y^{[0]} = \mathcal{F}(c) \vee y^{[0]} = \langle \mathrm{I}, \mathcal{F} \rangle (c \Delta d) \vee$

$y^{[0]} = \langle S, \mathcal{F}\rangle (c \vartriangle d)) \supset D_{\text{кл}}(+\infty, \overline{\varphi}, y^{[0]}))$,

а $\{a_t \vartriangle b_t \square \ell_t\}_t^{[0]}$ пересчет всех слов типа $P \square R$, где P рациональный сегмент, содержащийся в $0 \triangledown 1$, и R НЧ. Для всякого НЧ t мы используем часть 1 замечания 3 и построим, исходя от пары $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ (соотв. от пары $-\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$), сегмента $a_t \vartriangle b_t$ и НЧ ℓ_t, [0]-КФДП типа А $\hat{\psi}_{t,0}$ (соотв. $\hat{\psi}_{t,1}$), обладающую описанными там свойствами. Для любого НЧ t пусть $\overline{\psi}_{t,0}$ и $\overline{\psi}_{t,1}$ [0]-КФДП типа А такие, что $\overline{\psi}_{t,0} = \hat{\psi}_{t,0}$ & $\forall x^{[0]} (\overline{\psi}_{t,1}(x^{[0]}) = 1 - \hat{\psi}_{t,1}(-x^{[0]}))$.

Существует [0]-КФДП типа А $\mathcal{J}$, для которой выполнено

$$\mathcal{J} = \frac{1}{4} \cdot (\mathcal{I} + \mathcal{H} + \overline{\varphi} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^{t+2}} \cdot (\overline{\psi}_{t,0} + \overline{\psi}_{t,1})) .$$

Пусть v АДЧ такое, что

(26) $\neg D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{J}, Op[\mathcal{F}](v))$ & $Req(\mathcal{G}, v)$.

Тогда ввиду свойств [0]-КФДП $\overline{\varphi}$, $\mathcal{I}$ и $\mathcal{H}$ и замечания 1 имеет место

(27) $0 < v < 1$ & $Req_0(\mathcal{F}, v)$ & $\neg D_{\text{кл}}(0, \mathcal{F} | \mathcal{G}, v)$

и не может не быть верной одна из следующих двух формул:

(28) $D_{\text{кл}}(\mathcal{G} | \mathcal{F}, v)$,

(29) $\underline{D}[\mathcal{G}, \mathcal{F}](v) = -\infty$ & $\overline{D}[\mathcal{G}, \mathcal{F}](v) = +\infty$.

а) Выполнено (28). Тогда согласно (26) и замечанию 1 и лемме 1 из [8] верно

(30) $\neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) = -\infty$ & $\overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) = +\infty \vee$
$\underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) = \overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v)$ & $\neg(\underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) = 0))$.

б) Выполнено (29).

Мы допустим, что $\neg(\underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) = -\infty$ & $\overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](v) = +\infty)$.

Тогда согласно (26),(27), лемме 1 из [8] и лемме 1 имеет место $\neg\neg\exists t i(0 \le i \le 1 \,\&\, \neg D_{\text{кл}}(+\infty, \hat{\psi}_{t,i}, \mathcal{O}p[(-1)^i \cdot \mathcal{F}](v))\,\&$
$a_t < v < b_t \,\&\, \forall X(X \in a_t \Delta b_t \supset -\ell_t \le \theta((-1)^i \cdot \mathcal{F}, \mathcal{G}, v, X))\,\&$
$\underline{D}[\mathcal{G}, (-1)^i \cdot \mathcal{F}](v) = -\infty \,\&\, \overline{D}[\mathcal{G}, (-1)^i \cdot \mathcal{F}](v) = +\infty \,\&\, \neg D_{\text{кл}}(0, (-1)^i \cdot \mathcal{F} | \mathcal{G}, v))$,
что ввиду свойств [0]-КФДП $\hat{\psi}_{t,i}$, где t и i НЧ, $0 \le i \le$ ≤ 1, исключено. Итак, опять верно (30).

Ввиду а),б) и того, что формула (30) начинается двойным отрицанием, мы доказали верность (30).

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [0]-равномерно непрерывные [0]-функции. Если существуют НЧ m и возрастающая всюду определенная $[m]$-КФДП $\mathcal{H}$ такая, что $\forall y^{[m]}(y^{[m]} \in \langle \mathcal{O}, \mathcal{F}\rangle(0 \Delta 1)\,\&$
$\neg D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{H}, y^{[m]}) \supset \neg\neg\exists X(\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) = y^{[m]} \,\&\, \mathrm{Reg}(\mathcal{G}, X)\,\&$
$\neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = 0 \vee \overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = 0)))$,
то $\mathcal{F}$ является постоянной.

Доказательство. Мы используем теорему 1 и построим, исходя от пары $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, [0]-КФДП типа А $\mathcal{J}$, обладающую описанными там свойствами.

Пусть m НЧ и $\mathcal{H}$ всюду определенная $[m]$-КФДП, т.е. $[m]$-оператор типа $(D^{[m]} \longrightarrow D^{[m]})$, обладающие требуемыми свойствами. Тогда существует возрастающая всюду определенная $[m]$-КФДП ψ такая, что $\forall x^{[0]}(\psi(x^{[0]}) = \mathcal{H}(x^{[0]}) + \mathcal{J}(x^{[0]}))$.

Мы допустим, что $\langle I, \mathcal{F}\rangle(0 \Delta 1) < \langle S, \mathcal{F}\rangle(0 \Delta 1)$. Тогда легко построить $[m]$-КДЧ $y^{[m]}$, для которого выполнено

$$y^{[m]} \in \langle \mathcal{O}, \mathcal{F}\rangle(0 \Delta 1) \,\&\, \neg D_{\text{кл}}(+\infty, \psi, y^{[m]})$$

и, следовательно, $\neg D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{H}, y^{[m]}) \,\&\, \neg D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{J}, y^{[m]})$ и не может не существовать АДЧ X, для которого верно

(31) $\mathcal{O}p[\mathcal{F}](X) = y^{[m]} \,\&\, \mathrm{Reg}(\mathcal{G}, X)\,\&\, \neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = 0 \vee$
$\overline{D}[\mathcal{F}, \mathcal{G}](X) = 0)$.

Пусть X АДЧ такое, что (31). Тогда ввиду свойств [0]-КФДП $\mathcal{J}$ имеет место $D_{кл}(+\infty, \mathcal{J}, y^{[m]})$.

Итак, $\langle I, \mathcal{F} \rangle (0 \Delta 1) = \langle S, \mathcal{F} \rangle (0 \Delta 1)$ и $\mathcal{F}$ является постоянной.

На основании рассуждений, использованных в замечании 3, и леммы 3 из [6] можно доказать следующее утверждение (ср. замечание 5 из [7]). Определение $П_1$-чисел и $П_2$-чисел содержится в [3].

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [0]-равномерно непрерывные [0]-функции, X АДЧ, ξ $П_1$Ч и η $П_2$Ч такие, что $Op[\mathcal{F}](X) = \eta \,\&\, Op[\mathcal{G}](X) = \xi$. Тогда $0 < X < 1 \,\&\, Reg_0(\mathcal{F}, X)$ и

1) $\underline{D}^-[\mathcal{G},\mathcal{F}](X) \le 0 \le \overline{D}^-[\mathcal{G},\mathcal{F}](X)$ &
$\underline{D}^+[\mathcal{G},\mathcal{F}](X) \le 0 \le \overline{D}^+[\mathcal{G},\mathcal{F}](X)$

и, следовательно, согласно теореме 1 из [8] и лемме 2 из [4] выполнено $\neg\neg(\underline{D}[\mathcal{G},\mathcal{F}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}[\mathcal{G},\mathcal{F}](X) = +\infty \vee$ $D_{кл}(0, \mathcal{G} \mid \mathcal{F}, X))$;

2) если $Reg(\mathcal{G}, X)$, то имеет место
$max(|\underline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)|, |\overline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)|) =$
$max(|\underline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)|, |\overline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)|) = +\infty$
и, следовательно, согласно лемме 2 из [4] и теореме 1 верно
$\neg\neg(\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = -\infty \,\&\, \overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = +\infty \vee$
$\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) = \overline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X) \,\&\, |\underline{D}[\mathcal{F},\mathcal{G}](X)| = +\infty)$.

Пример 3. Существуют [0]-равномерно непрерывные [0]-функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$,[1]-КДЧ v , $П_1$Ч ξ и $П_2$Ч η такие, что

$Op[\mathcal{F}](v) = \eta \,\&\, Op[\mathcal{G}](v) = \xi \,\&\, Reg(\mathcal{G}, v)$ &
$\underline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](v) = 1 \,\&\, \overline{D}^-[\mathcal{F},\mathcal{G}](v) = +\infty$ &
$\underline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](v) = -\infty \,\&\, \overline{D}^+[\mathcal{F},\mathcal{G}](v) = 1$

и, следовательно, $\mathrm{Reg}_0(\mathcal{F},v)$ &

$\underline{D}^-[\mathcal{G},\mathcal{F}](v)=0$ & $\overline{D}^-[\mathcal{G},\mathcal{F}](v)=1$ &

$\underline{D}^+[\mathcal{G},\mathcal{F}](v)=-\infty$ & $\overline{D}^+[\mathcal{G},\mathcal{F}](v)=+\infty$ (см. теорему 3).

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частично-рекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19(1978), 15-60.

[3] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[4] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[5] ДЕМУТ О.: Об одном обобщении конструктивного интеграла Лебега, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 499-514.

[6] ДЕМУТ О.: О конструктивных интегралах Данжуа, Comment. Math. Univ. Carolinae 20(1979), 213-227,

[7] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы К.М. Гарга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 21(1980), 457-472.

[8] ДЕМУТ О.: О псевдодифференцируемости равномерно непрерывных конструктивных функций по функциям того же типа, Comment. Math. Univ. Carolinae 22(1981), 497-512.

Matematicko-fyzikální fakulta, Universita Karlova, Malostranské náměstí 25, Praha 1, Československo

(Oblatum 18.3. 1981)