M. O. Asanov; Nikolay V. Veličko
Компактные множества в $C_p(X)$

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 22 (1981), No. 2, 255--266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106072

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

22,2 (1981)

КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА В $C_p(X)$

М.О. АСАНОВ, Н.В. ВЕЛИЧКО

Резюме: Найдены классы пространства X, для которых относительно компактные множества в $C_p(X)$ определяются как ограниченные или как счетно компактные. Найден также класс пространств X для которого ограниченные множества в $C_p(X)$ относительно счетно компактны.

Ключевые слова: Пространство функций, компактность, счетно компактность, псевдокомпактность, ограниченность.

Классификация: 54C35

---

1. В работе исследуются некоторые аспекты проблемы определения компактности через более слабые свойства, такие как счетная компактность, псевдокомпактность, ограниченность. Проблема эта классическая возникла в функциональном анализе и классическим примером может служить знаменитая теорема Эберлейна-Шмульяна: слабо счетно компактное множество в B-пространстве слабо компактно и слабо секвенциально компактно. Эта теорема была обобщена в различных направлениях Птаком, Гротендиком, Прайсом, Архангельским. Наша работа примыкает к исследованиям Гротендика [1] и Архангельского [2]. Так как B-пространство в слабой топологии изоморфно замкнутому подпространству пространства $C_p(X)$ непрерывных (вещественных) функций на некотором компактном пространстве X в топологии простой сходи-

мости, то естественно исследовать сформулированную в начале проблему в категории $C_p(X)$ (что и делается в [1] и [2]). Мы докажем, что для широкого класса пространств X относительно компактные множества в $C_p(X)$ определяются как ограниченные множества (теорема 1), или как счетно компактные (теорема 2).

2. <u>Определение 1</u> [3]. Множество A в топологическом пространстве X называется ограниченным, если всякая $f \in C(X)$ ограничена на A. X называется μ-пространством, если всякое ограниченное множество в X относительно компактно.

Это понятие возникло из нужд функционального анализа, как известно $C(X)$ бочечно в компактно открытой топологии тогда, и только тогда, когда X - μ-пространство. Класс μ-пространства содержит все полные по Дьедонне, в частности все метризуемые пространства [3].

Если $Y \subseteq X$, то через π_Y будем обозначать проекцию $C_p(X)$ на $C_p(Y)$: $\pi_Y(f) = f|_Y$.

<u>Предложение 1</u>. Если F ограничено в $C_p(X)$, то для любого сепарабельного $Y \subseteq X$ найдется $F_1 \subseteq C_p(X)$ такое, что $F_1 \supseteq F$ и $\pi_Y(F_1) = [\pi_Y(F)]_{C_p(Y)}$ - метризуемый компакт.

Доказательство. Так как Y сепарабельно, то существует уплотнение $\Phi : C_p(Y) \longrightarrow Z$, где Z -сепарабельное метризуемое [4]. Так как Z наследственно функционально замкнуто, то таким же будет и $C_p(Y)$ (см. например [5]). $\pi_Y(F)$ ограничено в $C_p(Y)$, следовательно, относительно компактно. Так как компакт $[\pi_Y(F)]_{C_p(Y)}$ уплотняется в Z, то он метризуем. Для всякой точки $z \in [\pi_Y(F)]_{C_p(Y)}$ выполняется условие: $\pi^{-1}(z) \cap C_p(X) \neq \emptyset$. Действительно, если бы для некоторой z это было бы не так, то нашлась бы непрерывная функция $\varphi: C_p(Y) \to R$ такая, что $\varphi(z) = 0$ и $\varphi(z') > 0$ при $z \neq z'$. Положив $\Psi(x) = x^{-1}$, $\Psi: R \to R$ мы имели бы непрерывную функцию $\Psi \circ \varphi \circ \pi_Y : C_p(X) \to R$ не ограниченую на F.

Выбрав по точке $\tilde{z} \in \pi_Y^{-1}(z) \cap C_p(X)$ и присоединив эти точки к F (ПРИ $z \in [\pi_Y(f)] \setminus \pi_Y(F)$), получим F_1. Доказательство завершено.

Для псевдокомпактных множеств имеет место более сильное

Предложение 2. Если F псевдокомпактно в $C_p(X)$, то $\pi_Y(f)$ компактно и метризуемо для всякого сепарабельного $Y \subseteq X$.

Доказательство. В обозначениях предложения 1 $K = \Phi(\pi_Y(F))$ есть компакт в метризуемом пространстве Z. $\Phi: \pi_Y(F) \to K$ есть уплотнение псевдокомпактного пространства на метризуемое, следовательно, Φ гомеоморфно на $\pi_Y(F)$ [6]. Предложение доказано.

Напомним, что $t(A,B) = min\{\tau : A \subseteq [B'], B' \subseteq B, |B'| \leq \tau\}$.

Определение 2. Пусть $x \in [A] \setminus A$. Если после (произвольного) выбора окрестности V_m точки x можно подобрать множество $S_m \subseteq A$, $S_m = S_m(V_1, \ldots, V_m)$ такое, что $t(S_m, X) \leq \aleph_0$ и $[\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m] \cap (\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m) \neq \emptyset$, то x назовем слабой q-точкой относительно A. Если каждое незамкнутое множество в X имеет слабую q-точку, то X назовем слабым q-пространством.

Совокупность всех слабых q-пространств обозначим через $\mathfrak{Q}$. Понятие слабого q-пространства носит технический характер, но имеет некоторое оправдание в силу ниже излагаемых предложения 3 и теоремы 1.

Предложение 3. Слабыми q-пространствами являются:

a) q-пространства Майкла [7], в частности, счетно компактные пространства,

b) квази-k-пространства Нагата [8], в частности, k-пространства,

c) пространства счетной тесноты, в частности, секвенциальные и пространства Фреше-Урысона,

d) локально сепарабельные пространства.

Не ясно, входят ли в Q σ-компактные и псевдокомпактные пространства.

Теорема 1. Если $X \in Q$, то $C_p(X)$ есть μ-пространство.

Доказательство. Пусть F ограничено в $C_p(X)$, $F_0 = [F]_{R^X}$. Так как F_0 компактно, то необходимо показать, что $F_0 \subseteq C_p(X)$.

Пусть $x = x(t) \in F_0$. Докажем, что $x \in C_p(X)$.

Пусть B замкнуто в R, $A = x^{-1}(B)$. Предположим, что A незамкнуто. Тогда найдется слабая q-точка t_0 относительно A. Пусть $\varepsilon = \rho(x(t_0), B)$. Тогда $\varepsilon > 0$.

Построим по индукции последовательности: 1) точек $x_n \in F$, 2) окрестностей V_n точки t_0, 3) множеств $S_n \subseteq A$ и счетных множеств $P_n = \{t^k_n\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что $[P_n] \supseteq S_n$. Потребуем при этом выполнения условий:

a) $|x_i(t_0) - x(t_0)| < \varepsilon/4$

b) $V_i = \{t : |x_i(t) - x(t_0)| < \varepsilon/4\}$

c) если $T_i = \{t' \in \cup\{P_k : k < i\} : |x(t') - x(t_0)| > 3/4\, \varepsilon$, то $|x_i(t^m_k) - x(t_0)| > 3/4\, \varepsilon$ при всех $m \leq i$ таких, что $t^m_k \in T_i$.

Это очевидно можно сделать, взяв в качестве x_i любую функцию под условием $|x_1(t_0) - x(t_0)| < \varepsilon/4$, и используя определение слабой q-точки.

Пусть $t_\infty \in [\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m] \cap (\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m)$. Тогда $t_\infty \in [\bigcup_{m=1}^{\infty} T_m]$. Действительно, пусть V окрестность t_∞ . Найдем точку t' и номер m так, чтобы $t' \in S_m \cap V$. Так как $Z = P_m \cup \{t'\}$ счетно, то $[\pi_Z(F)]_{C_p(Z)}$ компактно (предложение 1). Это означает, что $\pi_Z x$ непрерывно на Z . Так как $|x(t') - x(t_0)| \geq \varepsilon$, то найдется точка $t'' \in P_m \cap V$ такая, что $|x(t') - x(t_0)| \geq \frac{3}{4}\varepsilon$. Ясно, что $t'' \in T_{m+1}$.

Положим $Y = (\bigcup_{m=1}^{\infty} T_m) \cup \{t_\infty\} \cup \{t_0\}$. Найдется точка $z \in C_p(X)$ такая, что $\pi_Y(z) \in [\pi_Y(\{x_m\}_{m=1}^{\infty}]_{C_p(Y)}$ (предложение 1).

Если $t \in \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m$, то $|x_m(t) - x(t_0)| \geq 3/4\,\varepsilon$ при всех достаточно больших m (условие c). Тогда $|z(t) - x(t_0)| \geq \varepsilon/4\,\varepsilon$. Так как $t_\infty \in [\bigcup_{m=1}^{\infty} T_m]$, то $|z(t_\infty) - x(t_0)| \geq 3/4\,\varepsilon$. Но $t_\infty \in \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$. Следовательно $|x_m(t_\infty) - x(t_0)| < \varepsilon/4$ (условие b) и $|z(t_\infty) - x(t_0)| < \varepsilon/4$. Противоречие. Следовательно, A замкнуто в X и $x \in C(X)$. Теорема доказана.

3. Определение 3. Пространство X назовем (слабо) $\sigma(\tau)$-псевдокомпактным, если $X = \cup\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ($X = [\{\cup A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}]$), где $|\Lambda| \leq \tau$ и A_α псевдокомпактно.

Положим $t_p(A, B) = min\{\tau : A \subseteq [B'], B' \subseteq B, B' - \sigma(\tau)$-псевдокомпактно$\}$.

Определение 4. Пусть $x \in [A] \setminus A$, $\alpha < \tau$. Если после выбора окрестности V_α точки x можно подобрать множество $S_\alpha \subseteq A$ такое, что $t_p(S_\alpha, X) \leq \tau$ и $[\bigcup_{\alpha<\tau} S_\alpha] \cap (\bigcap_{\alpha<\tau}) \neq \emptyset$, то x назовем слабой p_τ-точкой относительно A . Если любое незамкнутое множество в X имеет слабую p_τ-точку, то X

назовем слабо P_τ-пространством.

Класс слабых P_τ-пространств обозначим P_τ. Договоримся всегда опускать индекс τ, если $\tau \le \aleph_0$.

Ясно, что $Q \subseteq P \subseteq P_\tau$ и в P входят σ-компактные или более общо: локально слабо σ-псевдокомпактные пространства.

<u>Определение 5.</u> [2] Пространство X называется монолитным, если при каждом τ выполняется условие: $|A| \le \tau$ влечет, что $nw([A]_X) \le \tau$, где $nw(K)$ - сетевой вес K. Пространство X называется точным, если любое счетно компактное множество в X является монолитным компактом счетной тесноты.

<u>Предложение 4</u> [2]. Если $X = [\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n]$ и S_n компактно, то $C_p(X)$ точно.

Е.Г. Пыткееву принадлежит следующее

<u>Предложение 5.</u> Если X псевдокомпактно, то $C_p(X)$ точно.

Доказательство. Легко проверить, что непрерывное отображение $\pi_X : C_p(\beta X) \longrightarrow C_p(X)$, определяемое по формуле $\pi_X(f) = f|_X$, будет уплотнением, переводящим счетные дискретные множества в дискретные, т.е., счетно компактные множества в $C_p(\beta X)$ и $C_p(X)$ одни и те же, и предложение 5 вытекает из предложения 4.

Следствием предложения 5 и результатов из [2] является

<u>Предложение 6.</u> Если X слабо σ-псевдокомпактно, то $C_p(X)$ точно.

<u>Определение 6.</u> Пространство X назовем τ-изокомпактным, если любое τ-компактное множество в X относительно ком-

пактно.

Под τ-компактным мы понимаем пространство, любое открытое покрытие которого мощности $\leq \tau$ содержит конечное подпокрытие.

Отметим, что определение τ-изокомпактности слегка отличается (при $\tau = \aleph_0$) от понятия изокомпактности, введенного в [9].

Определение 7. Пространство X назовем $[\tau,\infty]$-монолитным, если условие монолитности выполняется лишь для $m \geq \tau$ (т.е. $|A| \leq m$ влечет $nw[A]_X \leq m$). Пространство X назовем $[\tau,\infty]$-точным, если любое τ-компактное множество в X является $[\tau,\infty]$-монолитным компактом тесноты $\leq \tau$.

Предложение 6 обобщается следующим образом.

Предложение 7. Если X слабо $\sigma(m)$-псевдокомпактно, то $C_p(X)$ $[m,\infty]$-точно.

Доказательство будем вести по индукции. Утверждение верно для $m = \aleph_0$ (предложение 6). Допустим, что утверждение верно для всех $\tau < m$ и пусть X слабо $\sigma(m)$-псевдокомпактно.

Пусть $F \subseteq C_p(X)$, m-компактно, $F_0 = [F]_{R^X}$, $x \in F_0$. Пусть $X = [\cup\{X_\alpha : \alpha \in m\}]$ и X_α псевдокомпактны. Положим $Y_\alpha = [\cup\{X_\beta : \beta < \alpha\}]$, $Y = \{Y_\alpha : \alpha < m\}$. Тогда $X = [Y]$. Пусть $\pi_\alpha = \pi_{Y_\alpha}$. Тогда Y_α слабо $\sigma(|\alpha|)$-псевдокомпактно, $\pi_\alpha(F)$ $|\alpha|$-компактно и по предположению индукции $\pi_\alpha(F)$ есть $[|\alpha|,\infty]$-монолитный компакт с теснотой $\leq |\alpha|$. Следовательно, $\pi_\alpha(x) \in \pi_\alpha(F)$ и найдется точка $x_\alpha \in F$ такая, что

(1) $\pi_\alpha(x_\alpha) = \pi_\alpha(x)$.

Точку $x_\alpha \in F$ выберем для каждого $\alpha < m$ под условием (1). Тогда последовательность $\{x_\alpha : \alpha < m\}$ имеет m - предельную точку $z \in F$, т.е. такую точку, для всякой окрестности V которой и для любого α найдется элемент x_β такой, что $\beta > \alpha$ и $x_\beta \in V$. Действительно, если для каждой точки $z \in F$ найдутся $\alpha(z)$ и окрестность V_z такие, что $V_z \not\ni x_\beta$ при $\beta > \alpha(z)$ то положив $\Gamma_\alpha = \cup\{V_z : \alpha(z) \leq \alpha\}$ получим открытое покрытие F мощности $\leq m$, не имеющее конечного подпокрытия. Ясно, что $\pi_Y(z) = \pi_Y(x)$. Таким образом $\pi_Y(F) = \pi_Y(F_0)$ компактно.

Пусть $A \subseteq F$, $|A| = \tau \geq m$ и $\pi_Y(y) \in [\pi_Y(A)]$. Тогда $[\pi_\alpha(A)] \ni \pi_\alpha(y)$, $|\pi_\alpha(A)| \leq \tau$. По предположению $mw([\pi_\alpha(A)]) \leq \tau$ и найдется множество $A_\alpha \subseteq A$ такое, что $|A_\alpha| \leq |\alpha|$ и $[\pi_\alpha(A_\alpha)] \ni \pi_\alpha(y)$. Положим $A' = \cup\{A_\alpha : \alpha < m\}$. Тогда $|A'| \leq m$ и $\pi_Y(y) \in [\pi_Y(A')]$. Таким образом $t(\pi_Y(F)) \leq m$.

Выберем в $[\pi_\alpha(A)]$ базу $\{V_{\alpha t} : t \in T_\alpha\}$ мощности $\leq \tau$. Положим $W_{\alpha t} = \pi_\alpha^{-1}(V_{\alpha t})$. Тогда семейство $\gamma = \{W_{\alpha t} \cap [\pi_Y(A)] : \alpha < m, t \in T_\alpha\}$ - база $[\pi_Y(A)]$, что легко проверяется, и $|\gamma| \leq \tau$. Итак $w[\pi_Y(A)] \leq \tau$ и $\pi_Y(F)$ $[m, \infty]$-монолитно.

Отображение π_Y является уплотнением $C_p(X)$ в $C_p(Y)$ и на F оно гомеоморфно: если A замкнуто в F , то оно m - компактно и $\pi_Y(A)$ компактно. Таким образом, F $[m, \infty]$-монолитный компакт тесноты $\leq m$

Предложение доказано.

Теперь мы в состоянии доказать второй основной результат.

Теорема 2. Если $X \in P_m$, то $C_p(X)$ m -изокомпактно.

Доказательство. Пусть $F \subseteq C_p(X)$ m-компактно, $F_0 = [F]_{R^X}$, $x \in F_0$, B замкнуто в R и $A = x^{-1}(B)$. Снова предполагаем, что A незамкнуто, t_0 -слабая p_m-точка относительно A, $\varepsilon = \rho(x(t_0), B) > 0$.

По индукции строим последовательности $\{x_\alpha : \alpha < m\}$, $\{V_\alpha : \alpha < m\}, \{S_\alpha : \alpha < m\}, \{P_\alpha : \alpha < m\}$ под условиями:

1) $|x_\alpha(t_0) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$

2) $V_\alpha = \{t : |x_\alpha(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$

3) если $T_\alpha = \{t' \in \cup\{P_\beta : \beta < \alpha\} : |x(t') - x(t_0)| \geq \frac{3}{4}\varepsilon$,

то $|x_\alpha(t') - x(t_0)| \geq \frac{3}{4}\varepsilon$ при $t' \in T_\alpha$

4) P_α m-псевдокомпактно и $[P_\alpha] \supseteq S_\alpha$.

Это можно сделать с помощью следующих соображений. Так как $K = [\cup\{P_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{t_0\}]$ слабо $\sigma(|\alpha|)$-псевдокомпактно, то $\pi_K(F)$ компактно (предложение 7), следовательно, найдется точка $x_\alpha \in F$ такая, что $\pi_K(x_\alpha) = \pi_K(x)$. Для x_α условия 1) и 3) выполняются автоматически, V_α определяется согласно 2) и S_α, P_α выбираются в соответствии с определением.

Пусть $t_\infty \in [\bigcup_{\alpha<m} S_\alpha] \cap (\bigcap_{\alpha<m} V_\alpha)$. Тогда $t_\infty \in [\bigcup_{\alpha<m} T_\alpha]$, что доказывается также как и в теореме 1 (с использованием предложения 7 вместо предложения 1).

Так как F m-компактно, то последовательность $\{x_\alpha : \alpha < m\}$ имеет m-предельную точку z (см. доказательство предложения 7). Так как по условию 3) $|x_\alpha(t) - x(t_0) \geq$ $\geq \frac{3}{4}\varepsilon$ при $t \in T_\alpha$, то $|z(t) - x(t_0)| \geq \frac{3}{4}\varepsilon$ при $t \in T_\alpha$ и $|z(t_\infty) - x(t_0)| \geq \frac{3}{4}\varepsilon$ в силу $t_\infty \in [\bigcup_{\alpha<m} T_\alpha]$. Так как $t_\infty \in \bigcap_{\alpha<m} V_\alpha$, то по условию 2) $|x_\alpha(t_\infty) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$

для всех $\alpha < m$, и $|x(t_\infty) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Противоречие, которое завершает доказательство теоремы.

При $\tau = \aleph_0$ получается

Теорема 2". Если $X \in P$, то всякое счетно компактное множество в $C_p(X)$ относительно компактно.

4. Определение 8. Пусть $x \in [A] \setminus A$, если для всякой последовательности окрестностей $\{V_n\}$ точки x можно найти множество $S \subseteq A$, $t(S, X) \leq \aleph_0$ такое, что $[S] \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \neq \emptyset$, то x назовем слабой P-точкой относительно A. Если всякое незамкнутое множество в X имеет слабую P-точку, то X назовем слабо P-пространством.

Совокупность слабых P-пространств обозначим через S. Ясно, что $Q \subseteq S$, и в класс S входят P-пространства.

Теорема 3. Если $X \in S$, то всякое ограниченное множество в $C_p(X)$ относительно счетно компактно.

Доказательство. Пусть F ограничено в $C_p(X)$, $\{x_n : n \in N\} \subseteq F$ и $x \in [\{x_n\}]_{R^X}$. Пусть B замкнуто в R, $A = x^{-1}(B)$. Предположим, что A не замкнуто, и пусть t_0 слабая P-точка относительно A. Пусть $\varepsilon = \rho(x(t_0), B) > 0$.

Можно считать, что при любом $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n(t_0) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Положим $V_n = \{t : |x_n(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$ для всех $n \in N$.

Найдем $S \subseteq A$ и счетное множество $P \subseteq X$ так, чтобы $[P] \supseteq S$, $[S] \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \neq \emptyset$. Пусть $t_\infty \in [S] \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n)$. Положим $Y = [P \cup \{t_\infty\} \cup \{t_0\}]$. Точка $\pi_Y(x)$

является предельной для $\pi_Y(\{x_n\})$ в $C_p(Y)$, следовательно, $\pi_Y(x)$ непрерывно на Y по предложению 1.

Так как $t_\infty \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} V_m$, то $|x(t_\infty) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

С другой стороны, так как $t_\infty \in [S]$ и на $[S]$ $\pi_Y(x)$ непрерывно, то найдется точка $t' \in S$ такая, что $|x(t') - - x(t_\infty)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Кроме того $|x(t') - x(t_0)| \geq \varepsilon$ так как $t' \in A$. Тогда

$$|x(t_\infty) - x(t_0)| \geq |x(t') - x(t_0)| - |x(t_\infty) - x(t')| \geq \frac{3}{4}\varepsilon .$$

Противоречие, которое доказывает теорему.

5. Рассмотрим примеры.

1. Пусть L несчетное пространство с одной неизолированной точкой ω окрестностями которой служат дополнения до счетных множеств. Легко проверить, что $L \in S$ но $L \notin Q$. Значит $Q \neq S$. Более того $L \notin P$, так как $C_p(L)$ изоморфно Σ-произведению прямых, которое не является изокомпактным. Однако $L \setminus \{\omega\}$ дискретно и $L \setminus \{\omega\} \in Q$. Таким образом, замыкание множества класса Q может не входить в P.

2. Усилим топологию в L. Разобьем L на счетное число несчетных множеств L_n и окрестностями ω объявим дополнения до конечных объединений множеств L_n и их конечные пересечения. $C_p(L)$ будет содержать Σ-произведение отрезков, замыкание которого в произведении отрезков не содержится в $C_p(L)$. Множество $P_n = L_n \cup \{\omega\}$ дискретно, потому $P_n \in Q$ но $L \notin Q$. Таким образом Q не замкнуто относительно счетных объединений.

Литература

[1] A. GROTENDIEK: Critères de compacité dans les espaces fonctionnels generaux, Amer. J. Math. 74(1952), 168-186.

[2] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ: О некоторых топологических пространствах встречающихся в функциональном анализе, Успехи Мат. Наук 31, № 5, 1976г., 17-32.

[3] H. BUCHWALTER: Fonctions continues et mesures sur en espace complètement régulier, Springer-Verlag Lecture Notes 331, 1973, 183-202.

[4] J. GUTHRIE: Ascoli theorems and the pseudocharacter of mapping spaces, Bull. Austral. Math. Soc. v. 10, 1974, 403-408.

[5] L. GILMAN, M. JERISON: Rings of continuous functions, Ney York, 1960.

[6] Н.В. ВЕЛИЧКО: Заметка о перистых пространствах, Чехосл. мат. журнал 25(1975), 8-19.

[7] E. MICHAEL: A note on closed maps and compact sets, Israel Journ. of Math. 2(1964), 173-176.

[8] J. NAGATA: A note on M-space and topologically complete space, Proc. Japan Acad. 45(1969), 541-543.

[9] P. BACON: The compactness of countably compact spaces, Pacif. J. Math. 32(1970), 587-592.

Свердловск
ул. Победы 35-40
С С С Р 620012

Тюмень
ул. 30ей Победы 15-113
С С С Р 625045

(Oblatum 9.7. 1980)