Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Об использовании интеграла Римана-Стилтьеса в теории конструктивного интеграла Лебега и его обобщений

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 20 (1979), No. 4, 781--793

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105968`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20, 4 (1979)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНТЕГРАЛА РИМАНА-СТИЛТЬЕСА В ТЕОРИИ КОНСТРУКТИВНОГО ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА И ЕГО ОБОБЩЕНИЙ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH)

Содержание: Заметка посвящена конструктивной теории интеграла. В ней показано, что конструктивные интегралы (Лебега, Данжуа и Перрона) от измеримых объектов некоторого специального типа представимы в виде интеграла Римана-Стилтьеса. На основании этого доказан конструктивный аналог второй теоремы о среднем значении.

Ключевые слова: Конструктивная функция, интеграл Римана-Стилтьеса, теорема о среднем значении.

Classification: Primary 02E99, 26A42
Secondary 26A39

В следующем мы пользуемся без дальнейших ссылок обозначениями и определениями из [3],[6],[7] и [9] (в частности, переменными, перечисленными в [9]), определениями $\mathcal{J}$-интеграла [6], интегралов Данжуа и L-интегрируемости [8].

Буквы ξ и η - с индексами или без них - служат переменными для псевдочисел (ПЧ). Мы заметим, что для всякого КДЧ существует равное ему ПЧ и для любого ПЧ можно построить равное ему АДЧ. Понятие "почти всюду" для ПЧ введено в [5].

Мы напомним, что 1) для любых функции $\mathcal{F}$ и слов P и Q, являющихся или КДЧ или ПЧ,

$D_{кл}(Q,\mathcal{F},P)$ значит: Q является значением псевдопроизводной функции $\mathcal{F}$ в P [10],

$\underline{D}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{F}, P)$ (соотв. $\overline{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{F}, P)$) значит: $-\infty$ (соотв. $+\infty$) является значением нижней (соотв. верхней) псевдопроизводной функции $\mathcal{F}$ в P [10];

2) Д обозначает почти равномерную дифференцируемость (см. [4] и [6] или [10], где вместо Д употребляется $Д^{[0]}$).

Определения. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\{G_n\}_n$ последовательность ступенчатых остовов,

$$\forall n (G_n \equiv a_0^n \gamma a_1^n \dots \gamma a_{m_n}^n \delta y_1^n \gamma y_2^n \dots \gamma y_{m_n}^n),$$

${}^0y$ и ${}^1y$ КДЧ, ξ_0 и η_0 ПЧ, пусть $\Theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$. Тогда мы

1) скажем, что Θ объект типа $\mathcal{Y}_0$, если Θ объект типа $\mathcal{Y}$ слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и выполнено $\{G_n\}_n \in L_1 \,\&\, Red(\{G_n\}_n)$ (ср. замечание 4 из [9]);

2) определим $P(\eta_0, \{G_n\}_n, \xi_0) \rightleftharpoons (0 < \xi_0 < 1 \,\&\, \neg \exists n i (1 \le i \le m_n \,\&\, \xi_0 = a_i^n) \,\&\, \forall p \exists q \forall n i (1 \le i \le m_n \,\&\, a_{i-1}^n < \xi_0 < a_i^n \,\&\, q \le n \supset |y_i^n - \eta_0| < 2^{-p}))$, $Val(\eta_0, \Theta, \xi_0) \rightleftharpoons \neg\neg(\xi_0 = 0 \,\&\, \eta_0 = {}^0y \vee P(\eta_0, \{G_n\}_n, \xi_0) \vee \xi_0 = 1 \,\&\, \eta_0 = {}^1y)$, $Pseudocont(\Theta, \xi_0) \rightleftharpoons \exists \eta (Val(\eta, \Theta, \xi_0) \,\&\, \forall p \neg\neg \exists q \forall \xi_1 \eta_1 (|\xi_1 - \xi_0| < 2^{-q} \,\&\, Val(\eta_1, \Theta, \xi_1) \supset |\eta_1 - \eta| < 2^{-p}))$;

3) будем писать $der^{[1]}(\mathcal{F}, \{G_n\}_n)$, если для почти всех ПЧ ξ из $0 \triangle 1$ выполнено $\exists \eta (P(\eta, \{G_n\}_n, \xi) \,\&\, D_{\text{кл}}(\eta, \mathcal{F}, \xi))$.

<u>Замечание 1</u>. Согласно замечанию 4 из [9], теореме 2.2 из [10] и лемме 1 из [3] для любого объекта Θ типа $\mathcal{Y}_0$

а) для почти всех КДЧ x (соотв. ПЧ ξ) из $0 \triangle 1$ верно $\exists y \, Val(y, \Theta, x)$ (соотв. $\exists \eta \, Val(\eta, \Theta, \xi)$),

б) существует последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ - $\{v_k\}_k$ такая, что для всяких слов P и Q , являющихся или КДЧ или

ПЧ, выполнено $P \in 0 \triangledown 1 \& \neg \exists b\, (P = v_b) \& Val\, (Q, \theta, P) \supset$ $Pseudocont\, (\theta, P)$.

Замечание 2. Чтобы избежать излишней громоздкости, мы будем пользоваться следующими обозначениями. Для данного объекта θ типа $\mathcal{F}_0$ и любых сегмента H, КДЧ x и ПЧ ξ таких, что $H \subseteq 0 \triangle 1 \& \exists y\, Val\, (y, \theta, x) \& \exists \eta\, Val\, (\eta, \theta, \xi)$, мы обозначим посредством $M_{\theta,H}$, $W_{\theta,H}$ и θ_x КДЧ и посредством θ_ξ ПЧ, которые фиксированы в данном контексте и удовлетворяют условиям $\forall v w\, (v \in H \& Val\, (w, \theta, v) \supset |w| \leq M_{\theta,H}) \& \forall x_1 x_2\, (\partial_l (H) \leq$ $\leq x_1 < x_2 \leq \partial_m (H) \& \forall i\, (1 \leq i \leq 2 \supset \exists y\, Val\, (y, \theta, x_i)) \supset$ $\supset BVS\, (W_{\theta,H}, \theta, x_1 \triangle x_2)) \& Val\, (\theta_x, \theta, x) \&$ $\& Val\, (\theta_\xi, \theta, \xi)$.

Замечание 3. Пусть θ, $\theta \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, обьект типа $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция.

1) Согласно лемме 4 и замечанию 3 из [9] для любого θ-допустимого сегмента H существуют КДЧ w и v такие, что $RS\, (w, \mathcal{F}, \theta, H)\ \&\ RS\, (v, \theta, \mathcal{F}, H)$, причем выполнено

$$|w| \leq \langle S, |\mathcal{F}| \rangle \llcorner H \lrcorner \cdot W_{\theta,H},$$

$$\forall x\, (BVS\, (x, \mathcal{F}, H) \supset |v| \leq M_{\theta,H} \cdot x) \quad \text{и}$$

$$v = \mathcal{F}(\partial_m (H)) \cdot \theta_{\partial_m(H)} - \mathcal{F}(\partial_l (H)) \cdot \theta_{\partial_l(H)} - w$$

и, следовательно, $|v| \leq |\Delta(\mathcal{F}, H)| \cdot M_{\theta,H} + \langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner H \lrcorner \cdot W_{\theta,H}$.

2) Ввиду 1) существует равномерно непрерывная функция $\mathcal{SJ}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle$ такая, что $\mathcal{SJ}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle (0) = 0$ и для любого θ-допустимого сегмента H верно

$$RS\, (\Delta(\mathcal{SJ}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle, H), \theta, \mathcal{F}, H).$$

Из 1) далее следует, что для любого сегмента L, $L \subseteq$ $\subseteq 0 \triangle 1$, выполнено

$|\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle, L)| \leq |\Delta(\mathcal{F}, L)| \cdot M_{\theta,L} + \langle\omega,\mathcal{F}\rangle_{\llcorner} L_{\lrcorner} \cdot W_{\theta,L}$

и $\langle\omega, \mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle\rangle_{\llcorner} L_{\lrcorner} \leq \langle\omega,\mathcal{F}\rangle_{\llcorner} L_{\lrcorner} \cdot (M_{\theta,L} + W_{\theta,L})$.

3) Ввиду 2) для любого ПЧ ξ верно

$\neg(\underline{D}_{K\Lambda}(-\infty,\mathcal{F},\xi) \vee \overline{D}_{K\Lambda}(+\infty,\mathcal{F},\xi)) \supset$

$\neg(\underline{D}_{K\Lambda}(-\infty,\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\xi) \vee \overline{D}_{K\Lambda}(+\infty,\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\xi))$

и $D_{K\Lambda}(0,\mathcal{F},\xi) \supset D_{K\Lambda}(0,\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\xi)$.

4) Если $[\{F_m\}_m, {}^0\bar{y}, {}^1\bar{y}]$ объект типа φ_0 такой, что $\{F_m\}_m = \{G_m\}_m$, то согласно определению значения интеграла Римана-Стилтьеса выполнено $\mathcal{SJ}\langle[\{F_m\}_m, {}^0\bar{y}, {}^1\bar{y}], \mathcal{F}\rangle = \mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle$.

На основании замечания 3 мы получаем следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть θ объект типа φ_0, $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ равномерно непрерывные функции и v и z КДЧ. Тогда

1) $\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_1\rangle = \mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle + \mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}_1\rangle$,

$\mathcal{SJ}\langle\theta, v\cdot\mathcal{F}_0\rangle = v\cdot\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle$,

$|\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle| \leq 2\cdot\langle S, |\mathcal{F}_0|\rangle_{\llcorner} 0\Delta 1_{\lrcorner} \cdot (M_{\theta,0\Delta 1} + W_{\theta,0\Delta 1})$,

$BVS(z,\mathcal{F}_0, 0\Delta 1) \supset BVS(z\cdot M_{\theta,0\Delta 1}, \mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle, 0\Delta 1)$,

$\mathcal{Q}(\mathcal{F}_0) \supset \mathcal{Q}(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle)$ и $\mathcal{Q}_{K\Lambda}(\mathcal{F}_0) \supset \mathcal{Q}_{K\Lambda}(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle)$

(определения $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}_{K\Lambda}$ приведены в [7]);

2) для любой последовательности сегментов $\{H_m\}_m$, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_m\}_m)$ (см. [6]), выполнено: если ряд $\sum_m \langle\omega,\mathcal{F}_0\rangle_{\llcorner} H_{m\lrcorner}$ сходится (соотв. псевдосходится), то ряд $\sum_m \langle\omega,\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle\rangle_{\llcorner} H_{m\lrcorner}$ сходится (соотв. псевдосходится).

<u>Лемма 2</u>. Пусть θ, $\theta \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, объект типа φ_0, $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция и для любого i,

$0 \leq i \leq 1$, P_i слово, являющееся или КДЧ или ПЧ. Пусть

$P_0 \in 0 \Delta 1 \,\&\, \mathcal{D}_{кл}(P_1, \mathcal{F}, P_0) \,\&\, \mathit{Pseudocont}\,(\theta, P_0)$.

Тогда $\mathcal{D}_{кл}(P_1 \cdot \theta_{P_0}, \mathcal{SJ}\langle \theta, \mathcal{F}\rangle, P_0)$.

Доказательство. Мы напомним, что согласно [7] h_1 функция такая, что $\forall x\,(h_1(x) = max\,(min\,(x,1), 0))$.

Пусть k НЧ. Тогда не может не существовать НЧ ℓ такое, что

$$\forall xy\,(x \leq P_0 \leq y \,\&\, 0 < y - x < 2^{-\ell} \supset |\Delta(\mathcal{F}, x \Delta y) - P_1 \cdot (y-x)| \leq$$

(1) $$2^{-k-2} \cdot |y - x|) \,\&\, \forall xy\,(|x - P_0| < 2^{-\ell} \,\&\, Val\,(y, \theta, x) \supset$$

$$|y - \theta_{P_0}| < 2^{-k-1}).$$

Пусть ℓ НЧ, для которого выполнено (1). Пусть $v \Delta w$ θ -допустимый сегмент и x_0 и x_1 КДЧ такие, что

$v \leq P_0 \leq w \,\&\, |v \Delta w| < 2^{-\ell} \,\&\, |x_0 - \theta_{P_0}| < 2^{-k-1} \,\&\, |x_1 - P_1| < 2^{-k-1} \,\&$

$|x_1 \cdot x_0 - P_1 \cdot \theta_{P_0}| < 2^{-k}$

и пусть $\overline{\theta} \rightleftharpoons [\{G_m\}_m - \{0 \gamma 1 \delta x_0\}_m, {}^0y - x_0, {}^1y - x_0]$.Тогда $\overline{\theta}$ объект типа φ_0 и

(2) $$M_{\overline{\theta}, v \Delta w} < 2^{-k}.$$

Согласно лемме 1 выполнено $\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle, v \Delta w) - P_1 \cdot \theta_{P_0} \cdot (w - v) =$
$\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta, \mathcal{F} - x_1 \cdot h_1\rangle, v \Delta w) + x_1 \cdot \Delta(\mathcal{SJ}\langle\overline{\theta}, h_1\rangle, v \Delta w) +$
$(x_1 \cdot x_0 - P_1 \cdot \theta_{P_0}) \cdot (w - v)$

и, следовательно, ввиду (1),(2) и замечания 3 верно

$\langle \omega, \mathcal{F} - x_1 \cdot h_1 \rangle_{\llcorner} v \Delta w_{\lrcorner} \leq 2^{-k} \cdot |w - v|$ и

$|\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, v \Delta w) - P_1 \cdot \theta_{P_0} \cdot (w - v)| \leq$

$2^{-k} \cdot (M_{\theta, 0\Delta 1} + W_{\theta, 0 \Delta 1} + |P_1| + 2^{-k-1} + 1) \cdot |w - v|$.

Лемма 3. Пусть θ объект типа φ_0, $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов и φ равномерно непрерывная функция такие, что $\mathcal{K}(\{H_m\}_m) \,\&\, \forall x\,(|\varphi(x)| > 0 \supset \exists m\,(x \in (H_m)^0))$.

Тогда $AC([\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle, \{H_n\}_n])$ и для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$ выполнено

$\neg\exists m(x\in H_m)\supset D(0,[\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle,\{H_n\}_n],x)$.

Доказательство. Мы пользуемся обозначениями из [6]. Ввиду наших предположений выполнено $\langle\omega,\varphi\rangle_L H_{n\lrcorner}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall m(\varphi(\partial_\lambda(H_m))=\varphi(\partial_n(H_n))=0)$ и ряд $\sum_m \varphi^{[H_n]}$ равномерно сходится к φ. Следовательно, согласно замечанию 3 и лемме 1 ряд $\sum_m |\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle,H_m)|$ сходится и ряд $\sum_p \mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi^{[H_p]}\rangle$ равномерно сходится к $\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle$. Итак,

$[\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle,\{H_n\}_n]=\sum_{p=1}^{\infty}[\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi^{[H_p]}\rangle,\{H_m\}_m]$

и для всякого НЧ p верно $AC([\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi^{[H_p]}\rangle,\{H_n\}_n])$ и $BVS(|\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle,H_p)|,[\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi^{[H_p]}\rangle,\{H_n\}_n],0\Delta 1)$. Для завершения доказательства достаточно применить теорему 8 из [8], теоремы 1 и 2 из [3] и теорему 2.5 из [10].

<u>Лемма 4</u>. Пусть θ, $\theta \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{Y}_0$ и $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывная на $0\Delta 1$ функция. Тогда

а) функция $\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle$ абсолютно непрерывна на $0\Delta 1$,

б) существуют $\{F_m\}_m\in L_1$ и $\{\bar{F}_m\}_m\in L_1$ такие, что

(3) $\forall x(0\le x\le 1\supset \mathcal{F}(x)-\mathcal{F}(0)=\int_0^x\{F_n\}_n)$,

(4) $\forall x(0\le x\le 1\supset \mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle(x)=\int_0^x\{\bar{F}_n\}_m)$,

$\{\bar{F}_m\}_n=\{F_m\}_n\cdot\{G_m\}_m \;\&\; \{F_n\}_n\cdot\{G_n\}_m\in S \;\&$

$Д(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{F_m\}_m\cdot\{G_m\}_m)$.

Доказательство. В следующем мы пользуемся обозначениями из [3].

1) Ввиду лемм 1 и 4 из [9] и определения предиката Val видно, что для любой равномерно непрерывной функции $\mathcal{G}$ по-

следовательность $\{\mathcal{SI}\langle[\{G_p\}_m, {}^0y, {}^1y], \mathcal{G}\rangle\}_p$ сходится к функции $\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{G}\rangle$.

2) Пусть F ступенчатый остов. Согласно определению выражения $F\cdot\{G_m\}_m$ и лемме 1 из [3] $[F\cdot\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$ объект типа $\mathcal{Y}_0$. Непосредственно можно убедиться в том, что для любого НЧ p выполнено $\mathcal{SI}\langle[\{G_p\}_m, {}^0y, {}^1y], \tilde{\mathcal{C}}_F\rangle = \tilde{\mathcal{C}}_{F\delta G_p}$.

Ввиду этого, 1) и теоремы 1 из [3]

$$\forall x(0\le x\le 1 \supset \mathcal{SI}\langle\theta, \tilde{\mathcal{C}}_F\rangle(x) = \int_0^x F\cdot\{G_m\}_m) \,\&\, AC(\mathcal{SI}\langle\theta, \tilde{\mathcal{C}}_F\rangle).$$

Мы заметим, что $BVS({}^0\!\int_0^1 |F|_0, \tilde{\mathcal{C}}_F, 0\Delta 1)$ [3].

3) Согласно теореме 2 из [3] существует $\{F_n\}_m \in L_1$ такое, что (3). Следовательно, $\forall n k\, BVS(2^{-n+1}, \tilde{\mathcal{C}}_{F_n} - \tilde{\mathcal{C}}_{F_{n+k}}, 0\Delta 1)$

и мы на основании теоремы 1 из [3] и леммы 1 получаем $\forall n\, BVS(2^{-n+1}, \tilde{\mathcal{C}}_{F_n} - \mathcal{F}, 0\Delta 1)$ и $\forall n\, BVS(2^{-n+1}\cdot M_{\theta,0\Delta 1}$, $\mathcal{SI}\langle\theta, \tilde{\mathcal{C}}_{F_n}\rangle - \mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, 0\Delta 1)$.

Согласно 2), теореме 8 из [8] и следствию теоремы 2 из [4] выполнено $AC(\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle)$ и существует $\{\bar{F}_n\}_n \in L_1$ такое, что (4) и $Д(\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{\bar{F}_n\}_n)$. Для завершения доказательства достаточно использовать лемму 1 из [3], замечание 1 из [4], замечание 1 и лемму 2.

<u>Лемма 5.</u> Пусть θ, $\theta \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{Y}_0$, $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция и $\{F_n\}_m \in S$. Тогда

a) $\{F_n\}_m\cdot\{G_m\}_m \in S$,

$Д(\mathcal{F}, \{F_n\}_m) \supset Д(\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{F_n\}_m\cdot\{G_m\}_m)$,

(5) $Д^{ap}(\mathcal{F}, \{F_m\}_m) \supset Д^{ap}(\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{F_n\}_n\cdot\{G_m\}_m)$,

(6) $dex^{[1]}(\mathcal{F},\{F_m\}_m) \supset dex^{[1]}(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{F_m\}_m\cdot\{G_m\}_m)$,

б) для любой последовательности сегментов $\{H_m\}_m$, $\mathcal{K}(\{H_m\}_m)$, выполнено

(7) $AC([\mathcal{F},\{H_m\}_m]) \supset AC([\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{H_m\}_m])$,

(8) $Д([\mathcal{F},\{H_m\}_m]) \supset Д([\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{H_m\}_m])$,

(9) $\mathcal{a}_{кл}([\mathcal{F},\{H_m\}_m]) \supset \mathcal{a}_{кл}([\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{H_m\}_m])$.

Доказательство. Согласно лемме 1 из [3] верно $\{F_m\}_m\cdot\{G_m\}_m \in S$.

1) Пусть $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов, $\mathcal{K}(\{H_m\}_m)$. Тогда согласно леммам 1 и 3 имеет место $AC([\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{H_m\}_m]-[\mathcal{SJ}\langle\theta,[\mathcal{F},\{H_m\}_m]\rangle,\{H_m\}_m])$ и для почти всех КДЧ x из $0\vartriangle 1$ выполнено $\neg\exists m(x\in H_m)\supset D(0,[\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{H_m\}_m]-[\mathcal{SJ}\langle\theta,[\mathcal{F},\{H_m\}_m]\rangle,\{H_m\}_m],x)$.

Следовательно, мы ввиду замечания 1, леммы 1 и теоремы 6 из [7] и лемм 1 и 4 получаем (7) и (9).

2) Пусть $Д(\mathcal{F},\{F_m\}_m)$. Тогда ввиду теоремы 4 из [6], лемм 1 и 4 и 1) выполнено $Д(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle)$ и, следовательно, существует $\{\bar{F}_m\}_m \in S$ такое, что $Д(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{\bar{F}_m\}_m)$ ([6], стр. 499). Согласно замечанию 1 из [4], замечанию 1 и лемме 2 для почти всех КДЧ x из $0\vartriangle 1$ выполнено $\exists y v z(P(y,\{\bar{F}_m\}_m,x)\&D(y,\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,x)\&$ $\&P(v,\{F_m\}_m,x)\&D(v,\mathcal{F},x)\&P(z,\{G_m\}_m,x)\&y=v\cdot z)$.

Но тогда $\{\bar{F}_m\}_m=\{F_m\}_m\cdot\{G_m\}_m$ и, таким образом, мы получаем $Д(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{F_m\}_m\cdot\{G_m\}_m)$.

3) Ввиду 1) и теорем 1 и 2 из [6] мы на основании 2) получаем (8) и доказательство б) завершено.

4) Из б), 1) и леммы 2 следует (5) (см. определение $Д^{ap}$ в [7]), а (6) является непосредственным следствием замечания 1 и леммы 2.

<u>Замечание 4</u>. Пусть θ , $\theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, объект типа φ_0 и g возрастающая на $0 \triangle 1$ функция, $g(0) = 0\ \&$ $\&\ g(1) = 1$. Тогда g равномерно непрерывна и согласно замечанию 1 существует последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1 - \{v_s\}_s$, для которой верно $\forall x\,(x \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg \exists s (x = v_s) \,\&\, \exists y\, Val\,(y, \theta, x) \supset$ $\supset Pseudocont\,(\theta, x))$. Мы построим плотную в $0 \triangle 1$ последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1 - \{\bar{x}_k\}_k$ и последовательность КДЧ $\{\bar{y}_k\}_k$ такие, что

$$\forall k l\,(\bar{x}_k = \bar{x}_l \supset k = l) \,\&\, \forall k\,(\neg \exists s (\bar{x}_k = v_s) \,\&\, \neg \exists a\,(g(a) = $$
$$= \bar{x}_k) \,\&\, Val\,(\bar{y}_k, \theta, \bar{x}_k)) .$$

Существуют НЧ $\varkappa$ и последовательности НЧ $\{m_n\}_n$, систем НЧ $\{\{p_i^n\}_{i=1}^{2^{m_n}}\}_n$ и ступенчатых остовов $\{F_n\}_n$ такие, что $BVS\,(2^{\varkappa}, \theta, 0 \triangle 1) \,\&\, \forall n\,(m_n = 2n + 3 + 2\varkappa \,\&\, \forall i\,(1 \leq i \leq 2^{m_n} \supset$ $(i-1)\cdot 2^{-m_n} < g^{-1}(\bar{x}_{p_i^n}) < i \cdot 2^{-m_n} \,\&\, \exists j\,(1 \leq j \leq 2^{m_{n+1}}\ \&$ $p_i^n = p_j^{n+1}))) \,\&\, \forall k\, \exists n i\ (1 \leq i \leq 2^{m_n} \,\&\, k = p_i^n)\ \&$ $\forall n\,(F_n \equiv 0 \curlyvee 1 \cdot 2^{-m_n} \curlyvee 2 \cdot 2^{-m_n} \ldots \curlyvee 1 \sigma\, \bar{y}_{p_1^n} \curlyvee \bar{y}_{p_2^n} \ldots \curlyvee \bar{y}_{p^n_{2^{m_n}}}\ )$.

Тогда $\{F_n\}_n \in L_1 \,\&\, Red(\{F_n\}_n) \,\&\, BVS(2^{\varkappa}, [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y], 0 \triangle 1)\ \&$ $\forall k\ Val\,(\bar{y}_k, [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y], g^{-1}(\bar{x}_k))$ и, следовательно, $\bar{\theta}$, $\bar{\theta} \rightleftharpoons [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, объект типа φ_0 и для любой равномерно непрерывной функции $\mathcal{F}$ выполнено $\mathcal{S}\mathcal{I}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle * g =$ $\mathcal{S}\mathcal{I}\langle \bar{\theta}, \mathcal{F} * g \rangle$.

__Замечание 5__. В работе [11] введены конструктивный интеграл Перрона ($\mathcal{P}$ -интеграл) и $w\mathcal{P}$ -интеграл. Нам понадобится следующее обозначение.

Для любых функции $\mathcal{F}$ и возрастающей на $0 \triangle 1$ функции ψ - $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \psi)$ обозначает: $\psi(0) = 0 \,\&\, \psi(1) = 1 \,\&$
$\forall \xi (\neg\neg(\underline{D}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee \overline{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{F}, \xi)) \supset D_{\text{кл}}(0, \mathcal{F} * \psi^{-1}, \sigma_\psi(\xi)))$
(σ_ψ псевдооператор такой, что $\forall x \xi (x = \xi \supset \psi(x) = \sigma_\psi(\xi))$ - см. [7]).

В [11] доказано следующее утверждение.

Пусть $\{F_n\}_n \in S$. Функция $\mathcal{F}$ является неопределенным

а) $\mathcal{P}$ -интегралом от $\{F_n\}_n$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна, выполнено Д$(\mathcal{F}, \{F_n\}_n)$ и существует возрастающая на $0 \triangle 1$ функция ψ такая, что Д$(\psi) \,\&\, \mathcal{W}(\mathcal{F}, \psi)$;

б) $w\mathcal{P}$ -интегралом от $\{F_n\}_n$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если выполнено $der^{[1]}(\mathcal{F}, \{F_n\}_n)$ и существует возрастающая на $0 \triangle 1$ функция ψ такая, что $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \psi)$.

__Лемма 6__. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, ψ возрастающая на $0 \triangle 1$ функция и Θ объект типа $\mathcal{Y}_0$. Тогда выполнено $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \psi) \supset \mathcal{W}(\mathcal{S}\mathcal{I} < \Theta, \mathcal{F} >, \psi)$.

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием замечания 4 и части 3 замечания 3.

__Теорема__. Пусть для K выполнено
$K \rightleftharpoons L \vee K \rightleftharpoons \mathcal{D}_* \vee K \rightleftharpoons \mathcal{D}' \vee K \rightleftharpoons \mathcal{D} \vee K \rightleftharpoons \mathcal{Z} \vee K \rightleftharpoons \mathcal{P}$.
Пусть $\{F_n\}_n \in S$, $\mathcal{F}$ функция и Θ , $\Theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{Y}_0$. Тогда

1) если $\mathcal{F}$ неопределенный K -интеграл от $\{F_n\}_n$ на

$0 \Delta 1$, то $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и $\mathcal{SJ}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle$ неопределенный K-интеграл от $\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n$ на $0 \Delta 1$;

2) если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и является неопределенным $w\mathcal{P}$-интегралом от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$, то $\mathcal{SJ}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle$ неопределенный $w\mathcal{P}$-интеграл от $\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n$ на $0 \Delta 1$.

Доказательство. Согласно определениям, приведенным в [6] - [8], и замечанию 5 утверждение является непосредственным следствием лемм 1, 4 - 6 и замечания 4.

Теорема является конструктивным аналогом теоремы 2.5 из [1], стр. 246. Приведенное там доказательство нельзя в конструктивной математике использовать: существует возрастающая на $0 \Delta 1$ (конструктивная) функция, которая удовлетворяет условию Липшица и вместе с тем не является неопределенным интегралом ни одного из перечисленных в теореме типов; как показано в [11], конструктивный узкий интеграл Данжуа ($\mathcal{D}_*$-интеграл) не совпадает с конструктивным интегралом Перрона ($\mathcal{P}$-интегралом).

<u>Пример</u>. Существуют $\{F_n\}_n \in S$ и $\{G_n\}_n \in L_1$ и интегрируемые по Лебегу функции (см. [10], стр. 93) $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ слабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ такие, что

1) $\mathcal{F}$ является неопределенным $w\mathcal{P}$-интегралом от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$.

2) θ, где $\theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, \mathcal{G}(0), \mathcal{G}(1)]$, объект типа $\mathcal{F}_0$ и $\forall x y\, (Val\,(y, \theta, x) \supset y = \mathcal{G}(x))$,

3) θ (т.е. $\mathcal{G}$) не является RS-интегрируемым по $\mathcal{F}$ на $0 \Delta 1$ и

4) $\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n$ не является $w\mathcal{P}$-интегрируемым на $0 \Delta 1$.

Следует напомнить, что любая функция слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ является псевдоравномерно непрерывной.

С помощью теоремы о среднем значении функции [2], определения значения интеграла Римана-Стилтьеса и замечания 3 легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 7</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, θ неубывающий (см. [9]) объект типа φ_0 и H θ-допустимый сегмент. Тогда не может не существовать КДЧ x из H такое, что $RS(\mathcal{F}(x) \cdot (\theta_{\mathcal{Э}_m(H)} - \theta_{\mathcal{Э}_l(H)}), \mathcal{F}, \theta, H)$ и, следовательно, $\Delta(\mathcal{Y}\mathcal{J}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, H) = \theta_{\mathcal{Э}_l(H)} \cdot (\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(\mathcal{Э}_l(H))) + \theta_{\mathcal{Э}_m(H)} \cdot (\mathcal{F}(\mathcal{Э}_m(H)) - \mathcal{F}(x))$.

Непосредственным следствием теоремы и леммы 7 является вторая теорема о среднем значении для любого из перечисленных в теореме интегралов. (Ср. теорему 3 и пример из [12].)

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ЦЕЙТИН Г.С.: Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова, том 67(1962), 362-384.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 687-711.

[5] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Commment. Math. Univ. Carolinae 16(1975),583-599.

[6] ДЕМУТ О.: Об одном обобщении конструктивного интеграла Лебега, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 499-514.

[7] ДЕМУТ О.: О конструктивных аналогах обобщенно абсолютно непрерывных функций и функций обобщенной ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 19 (1978), 471-487.

[8] ДЕМУТ О.: О конструктивных интегралах Данжуа, Comment. Math. Univ. Carolinae 20(1979), 213-227.

[9] ДЕМУТ О., ПОЛИВКА Й.: О представимости линейных функционалов в пространстве шифров равномерно непрерывных на сегменте $0 \Delta 1$ конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 20(1979), 765-780.

[10] ДЕМУТ О.: Некоторые вопросы теории конструктивных функций действительной переменной, Acta Univ. Carolinae, Mathem. et Physica 19(1978), 61-96.

[11] ДЕМУТ О.: О конструктивном интеграле Перрона (в печати).

[12] ДЕМУТ О.: Теоремы о среднем значении для конструктивного интеграла Лебега, Comment. Math. Univ. Carolinae 11 (1970), 249-269.

Matematicko-fyzikální fakulta
Universita Karlova
Malostranské nám. 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 5.5. 1979)