Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Об одном обобщении конструктивного интеграла Лебега

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 18 (1977), No. 3, 499--514

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105795

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,3 (1977)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КОНСТРУКТИВНОГО ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: Заметка содержит дескриптивное определение и описание основных свойств конструктивного интеграла, который является обобщением конструктивного интеграла Лебега. Многие свойства этого интеграла являются конструктивными аналогами свойств классического интеграла Перрона.

Ключевые слова: Конструктивная функция, абсолютно непрерывная функция, почти равномерная дифференцируемость.

AMS: Primary 02E99, 26A39 Ref. Ž.: 2.644.2
Secondary 26A24

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [13],[14],[3] и [5], понятиями покрытия, функции, абсолютно непрерывной функции и функции ограниченной вариации из [6] и свойствами $(T_1)^*$ [10] и $(\mathcal{N})^*$ [11].

Для функции $\mathcal{F}$ мы будем писать $Д(\mathcal{F})$, если существует $\{F_n\}_n \in S$ такое, что $Д(\mathcal{F}, \{F_n\}_n)$ (см. [9]).

Покрытие Φ мы назовем: а) регулярным, если $\sum_{i=1}^{n} |\Phi_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, и б) наследно регулярным, если для всякой возрастающей на $0 \vartriangle 1$ функции g выполнено $\sum_{i=1}^{n} \Delta(g, \Phi_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Delta(g, 0 \vartriangle 1)$. Покрытие Φ мы назовем уточнением покрытия Ψ, если $\forall m \exists n (\Phi_m \subseteq \Psi_n)$. Мы заметим, что если наследно регулярное покрытие Φ является уточнением покрытия Ψ , то Ψ наследно регулярно.

Определения. Пусть $\mathcal{F}$ и g функции, $x_0 \Delta x_1$ сегмент, x КДЧ, а P слово, являющееся или КДЧ или ПЧ. Тогда

а) мы посредством $BVS(x, \mathcal{F}, x_0 \Delta x_1)$ обозначим: для всякой возрастающей системы КДЧ $\{y_i\}_{i=0}^{m}$, $x_0 = y_0 < < y_m = x_1$, выполнено $\sum_{i=1}^{m} |\Delta(\mathcal{F}, y_{i-1} \Delta y_i)| \leq x$;

б) мы скажем, что $\mathcal{F}$ функция слабо (соотв. квазислабо) ограниченной вариации на $x_0 \Delta x_1$, если существует (соотв. не может не существовать) НЧ m такое, что $BVS(m, \mathcal{F}, x_0 \Delta x_1)$;

в) мы скажем, что P является особой точкой для $\mathcal{F}$, если $\neg \exists a b (a < P < b \,\&\, \neg\neg \exists m\, (BVS(m, \mathcal{F}, a \Delta b)))$;

г) мы посредством $\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}$ и $\mathcal{F} * g$ обозначим функции такие, что $\forall y\, (\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}(y) = \mathcal{F}(max(min(y, x_1), x_0)) \,\&$ $\mathcal{F} * g(y) = \mathcal{F}(g(y)))$;

д) если $\mathcal{F}$ возрастает на $0 \Delta 1$ и $\mathcal{F}(0) = 0 \,\&\, \mathcal{F}(1) = 1$, то мы посредством $\mathcal{F}^{-1}$ обозначим функцию такую, что $\forall x\, (x \in 0 \Delta 1 \supset \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x)) = x)$.

Обозначения. Пусть $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов, Φ покрытие, а $\mathcal{F}$ функция. Тогда

а) мы будем писать $\overline{\mathcal{H}}(\{H_m\}_m)$, если $\{H_m\}_m$ последовательность неперекрывающихся сегментов и выполнено $(|H_m| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0) \,\&\, \neg \exists m\, (0 \in (H_m)^{\circ} \vee 1 \in (H_m)^{\circ})$,

б) если $\overline{\mathcal{H}}(\{H_m\}_m)$, то мы посредством $[\mathcal{F}, \{H_m\}_m]$ обозначим функцию, которая линейна на всяком сегменте последовательности $\{H_m\}_m$ и обладает свойством $\forall x\, (\neg \exists m\, (x \in (H_m)^{\circ}) \supset [\mathcal{F}, \{H_m\}_m](x) = \mathcal{F}(x))$, в) мы определим $\mathcal{F}/\Phi \rightleftharpoons [\mathcal{F}, \Phi]$.

Замечание 1. 1) Для всякого р.п. множества НЧ C, $\mathcal{K}(C)$ (см. [14]), существует последовательность рациональных сегментов $\{a_m \Delta b_m\}_m$ такая, что

$$\overline{\mathcal{K}}(\{a_m \Delta b_m\}_m) \& \forall a b (a < b \& a \Delta b \subseteq 0 \Delta 1 \supset (\exists m (a \Delta b \,\mathbb{I}\, a_m \Delta b_m) \equiv$$

$$\equiv \exists \ell (\ell \in C \& (a \Delta b \,\mathbb{I}\, \mathcal{L}_{\llcorner} \ell_{\lrcorner}))))$$

и, следовательно, для любой функции $\mathcal{F}$ верно

$[\mathcal{F}, \{a_m \Delta b_m\}_m] = [\mathcal{F}, C]$ (см. [14]).

2) Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов, $\overline{\mathcal{K}}(\{H_m\}_m)$, а $x_0 \Delta x_1$ сегмент. Тогда что касается равномерной непрерывности, абсолютной непрерывности, ограниченности вариации, слабой ограниченности вариации, свойств $(T_1)^*$ и $(N)^*$, то принадлежность функции $\mathcal{F}$ к одному из соответствующих классов функций влечет за собой принадлежность функций $[\mathcal{F}, \{H_m\}_m]$ и $\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}$ к тому же классу.

Определения. 1) Для функции $\mathcal{F}$ мы будем писать

а) $\mathcal{V}(\mathcal{F})$, если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и для любой возрастающей на $0 \Delta 1$ абсолютно непрерывной (на $0 \Delta 1$) функции g, $g(0) = 0 \& g(1) = 1$, выполнено Д$(\mathcal{F} * g)$,

б) $\mathcal{V}_0(\mathcal{F})$, если верно $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ и для всякого наследно регулярного покрытия Φ не может не существовать покрытие Ψ такое, что Φ является уточнением Ψ и $\mathcal{F}/\Psi$ функция квазислабо ограниченной вариации (на $0 \Delta 1$),

в) $\mathcal{Z}(\mathcal{F})$, если выполнено

$\forall x k \exists \ell\, BVS(2^{-k}, \mathcal{F}, (x - 2^{-\ell}) \Delta (x + 2^{-\ell}))$.

2) Пусть $\{F_m\}_m \in S$ (см. [3]).

а) Мы скажем, что функция $\mathcal{F}$ является неопределенным $\mathcal{I}$ -интегралом (соотв. $\mathcal{I}_0$ -интегралом) от $\{F_m\}_m$ если выполнено $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ (соотв. $\mathcal{I}_0(\mathcal{F})$) и Д$(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$.

б) Мы скажем, что объект $\{F_m\}_m$ является $\mathcal{I}$ -интегрируемым (соотв. $\mathcal{I}_0$ -интегрируемым), если существует функция $\mathcal{F}$, являющаяся неопределенным $\mathcal{I}$ -интегралом (соотв. $\mathcal{I}_0$ -интегралом) от $\{F_m\}_m$.

На основании следствия теоремы 2 из [9], следствия теоремы 7 из [11], теоремы 1 из [12] и теоремы 2 из [7] верны следующие утверждения.

<u>Теорема 1</u>. 1) Пусть $x_0 \Delta x_1$ сегмент, $x_0 \Delta x_1 \subseteq 0 \Delta 1$. Функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на сегменте $x_0 \Delta x_1$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ (соотв. $\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}$) функция ограниченной вариации на $x_0 \Delta x_1$, $\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}$ обладает свойством $(N)^*$ и выполнено Д$(\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]})$.

2) Пусть $\mathcal{F}$ функция такая, что Д$(\mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{F}$ представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных (на $0 \Delta 1$) функций тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$.

<u>Следствие</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и g абсолютно непрерывные (на $0 \Delta 1$) функции такие, что g является неубывающей. Тогда $\mathcal{F} * g$ абсолютно непрерывная (на $0 \Delta 1$) функция и, следовательно, верно Д$(\mathcal{F} * g)$. Всякое $\{F_m\}_m \in L_1$ $\mathcal{I}_0$ -интегрируемо.

Исходя от определений, можно с помощью теоремы 1, ее следствия и результатов из [8] и [9] доказать следующие утверждения.

<u>Теорема 2</u>. 1) Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ функции, y КДЧ, $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов, $\overline{\mathcal{K}}(\{H_m\}_m)$, $x_0 \Delta x_1$

сегмент, Φ регулярное покрытие, а $\{F^1_m\}_m \in S$ и $\{F^2_m\}_m \in S$ такие, что $Д(\mathcal{F}_1, \{F^1_m\}_m)$ & $Д(\mathcal{F}_2, \{F^2_m\}_m)$. Тогда $Д(y \cdot \mathcal{F}_1, y \cdot \{F^1_m\}_m)$, $Д(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2, \{F^1_m\}_m + \{F^2_m\}_m)$, $Д(|\mathcal{F}_1|)$, $Д(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)$, $(\exists m (|\mathcal{F}_1| \geq \frac{1}{m}) \supset Д(\frac{1}{\mathcal{F}_1}))$, $Д([\mathcal{F}_1, \{H_m\}_m])$, $Д(\mathcal{F}_1^{[x_0 \Delta x_1]})$ и $Д(\mathcal{F}_3 / \Phi)$.

2) Если $\mathcal{F}$ возрастающая на $0 \Delta 1$ функция, $\mathcal{F}(0) = 0$ & $\mathcal{F}(1) = 1$ & $Д(\mathcal{F})$, то $Д(\mathcal{F}^{-1})$.

3) Если $\mathcal{F}$ функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$, а $\mathcal{G}$ функция такая, что для всякого КДЧ x, $0 < x \leq 1$, $\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(0)$ вариация функции $\mathcal{F}$ на сегменте $0 \Delta x$, то а) $(Д(\mathcal{F}) \equiv Д(\mathcal{G}))$ и б) $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$.

Теорема 3. 1) Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ функции, обладающие свойством $\mathcal{Y}$ (соотв. $\mathcal{Y}_0$, соотв. $\mathcal{Z}$), y КДЧ, $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_m\}_m)$, $x_0 \Delta x_1$ сегмент, а $\mathcal{H}$ и g абсолютно непрерывные на $0 \Delta 1$ функции такие, что $\exists m (|\mathcal{F}_3| \geq \frac{1}{m})$ & $g(0) = 0$ & $g(1) = 1$ и g возрастает на $0 \Delta 1$. Тогда функции $\mathcal{H}$, $y \cdot \mathcal{F}_1$, $|\mathcal{F}_1|$, $(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)$, $(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)$, $\frac{1}{\mathcal{F}_3}$, $[\mathcal{F}_1, \{H_m\}_m]$, $\mathcal{F}_1^{[x_0 \Delta x_1]}$ и $\mathcal{F}_1 * g$ обладают свойством $\mathcal{Y}$ (соотв. $\mathcal{Y}_0$, соотв. $\mathcal{Z}$).

2) Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а Φ наследно регулярное покрытие. Тогда выполнено $\mathcal{Y}(\mathcal{F}/\Phi)$ & $\mathcal{Z}(\mathcal{F}/\Phi)$.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда верно $Д(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если для всякого НЧ m существует S_6-множество $\{H^m_m\}_m$ меры меньшей чем 2^{-m} и такое, что $\{H^m_m\}_m \subseteq 0 \Delta 1$, $[\mathcal{F}, \{H^m_m\}_m]$

абсолютно непрерывная на $0 \vartriangle 1$ функция и ряд $\sum_m \langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner H_m^m \lrcorner$ сходится. (Мы напомним, что $\langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner Q \lrcorner$ – колебание функции $\mathcal{F}$ на сегменте Q.)

Отсюда мы на основании теоремы 1 из [7] и замечания 1 из [4] получаем следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а $\mathcal{G}$ абсолютно непрерывная на $0 \vartriangle 1$ функция, удовлетворяющая условию Липшица. Тогда $(Д(\mathcal{F}) \supset Д(\mathcal{G} * \mathcal{F})) \& (\mathcal{Y}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{Y}(\mathcal{G} * \mathcal{F})) \& (\mathcal{Y}_0(\mathcal{F}) \supset \mathcal{Y}_0(\mathcal{G} * \mathcal{F})) \& (\mathcal{Z}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{G} * \mathcal{F}))$.

Следствие 2. Пусть $\{\mathcal{F}_m\}_m$ последовательность равномерно непрерывных функций, для которой верно $\forall m\, n\; BVS(2^{-m}, \mathcal{F}_m - \mathcal{F}_{m+n}, 0 \vartriangle 1)$. Тогда существует равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$ такая, что
$\forall m\; BVS(2^{-m}, \mathcal{F} - \mathcal{F}_m, 0 \vartriangle 1) \& (\forall m\; Д(\mathcal{F}_m) \supset Д(\mathcal{F})) \&$
$(\forall m\; \mathcal{Y}(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Y}(\mathcal{F})) \& (\forall m\; \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Y}_0(\mathcal{F})) \&$
$(\forall m\; \mathcal{Z}(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{F}))$.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а $\{x_n\}_n$ последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ такая, что $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$. Тогда выполнено
$(\forall n\; Д(\mathcal{F}^{[0 \vartriangle x_n]}) \equiv Д(\mathcal{F})) \& (\forall n\; \mathcal{Y}(\mathcal{F}^{[0 \vartriangle x_n]}) \equiv \mathcal{Y}(\mathcal{F})) \&$
$(\forall n\; \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}^{[0 \vartriangle x_n]}) \equiv \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}))$.

Определение. S_{σ}-множество $\{H_n\}_n$, $\{H_n\}_n \subseteq 0 \vartriangle 1$, мы назовем слабо наследным, если для всяких НЧ p и возрастающей на $0 \vartriangle 1$ абсолютно непрерывной функции g, $g(0) = 0 \& g(1) = 1$, существуют S_{σ}-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем 2^{-p} и НЧ q_p такие, что $\forall m\,(q_p < m \supset$
$\nu \langle \mathcal{G} \rangle \llcorner g^{-1}(\ni_l(H_m)) \vartriangle g^{-1}(\ni_m(H_m)) \lrcorner >$
$> \frac{1}{2} \cdot |g^{-1}(\ni_l(H_m)) \vartriangle g^{-1}(\ni_m(H_m))|)$.

(Следует напомнить, что $\nu\langle\mathcal{G}\rangle\llcorner Q\lrcorner$ - мера $\mathcal{G}\cap Q$ [8].)

Замечание 2. Для любых Π_1-покрытия Φ (см. [13]) и последовательности сегментов $\{H_m\}_m$ такой, что

$\forall m\,(H_m \subseteq \Phi_m)\ \&\ \left(\frac{|H_m|}{|\Phi_m|}\xrightarrow[m\to\infty]{} 0\right)$, $\{H_m\}_m$ является слабо наследным S_σ-множеством.

Теорема 6. Пусть $\{H_m\}_m$ слабо наследное S_σ-множество, содержащееся в $0\vartriangle 1$, а $\{\mathcal{F}_m\}_m$ последовательность равномерно непрерывных функций такая, что $\forall m x\,(|\mathcal{F}_m(x)| > 0 \supset x \in (H_m)^0)$ и ряд $\sum\limits_m \langle\omega,\mathcal{F}_m\rangle\llcorner H_m\lrcorner$ сходится. Тогда существует равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$, для которой выполнено $\mathcal{F} = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\mathcal{F}_m$ и $(\forall m\ \mathcal{Y}(\mathcal{F}_m) \supset$ $\supset \mathcal{Y}(\mathcal{F}))\ \&\ (\forall m\ \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}))$.

На основании замечания 2, теоремы 6 и следствия 2 теоремы 4 легко построить следующий пример.

Пример 1. Существует функция $\mathcal{F}$ слабо ограниченной вариации на $0\vartriangle 1$ такая, что $\mathcal{Y}_0(\mathcal{F})\ \&\ \mathcal{Z}(\mathcal{F})$ и ни для какого сегмента $a\vartriangle b$, $a\vartriangle b \subseteq 0\vartriangle 1$, $\mathcal{F}$ не является функцией ограниченной вариации на $a\vartriangle b$ и, следовательно, $\mathcal{F}$ не является абсолютно непрерывной на $a\vartriangle b$.

На основании теоремы Г.С. Цейтина [2] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, а g возрастающая на $0\vartriangle 1$ абсолютно непрерывная функция, $g(0)=0\ \&\ g(1)=1$. Тогда для всякого НЧ k существуют S_σ-множества $\mathcal{f}$ и $\mathcal{G}$ меры меньшей чем 2^{-k}, равномерно непрерывные функции r и φ, возрастающие последовательности НЧ $\{\omega_t\}_t$, $\{\sigma_t\}_t$ и $\{t_p\}_p$ и последовательность систем неперекрывающихся рациональных сегментов $\{\{Q_i^s\}_{i=1}^{\tau_s}\}_s$ такие, что

а) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G} \,\&\, \forall x\,(x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}) \supset \mathrm{D}(r(x), g, x) \,\&$ $D(\varphi(x), \mathcal{F} * g, x))$ (предикат D определен в [5]),

б) для любых НЧ t и сегмента Q, $Q \subseteq 0\Delta 1 \,\&\, |Q| \leq$ $\leq 2^{-\omega_t}$, верно $(\neg\neg\exists x\,(x \in Q \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}) \,\&\, r(x) < 2^{-\sigma_t+1}) \supset$ $\supset \forall x\,(x \in Q \supset |\varphi(x)| < 2^{-t}))$,

в) для всякого НЧ s

α) $0 \leq \tau_s \,\&\, \forall x\,(x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}) \,\&\, r(x) < 2^{-\sigma_{t_s}} \supset \exists i\,(1 \leq i \leq \tau_s \,\&$ $x \in Q_i^s)) \,\&\, \forall i x\,(1 \leq i \leq \tau_s \,\&\, x \in Q_i^s \supset |Q_i^s| \leq 2^{-\omega_{t_s}} \,\&\, r(x) <$ $2^{-\sigma_{t_s}+1})$ и

β) если $\{i_j\}_{j=1}^{q}$ возрастающая система НЧ такая, что $\forall j\,(1 \leq j \leq q \supset 1 \leq i_j \leq \tau_s \,\&\, \nu\langle\mathcal{G}\rangle_{\llcorner} Q_{i_j}^s {}_{\lrcorner} < |Q_{i_j}^s| \,\&$ $\neg BVS(2^{-s-1} \cdot |Q_{i_j}^s|, \mathcal{F} * g, Q_{i_j}^s))$,

то $\sum_{j=1}^{q} |Q_{i_j}^s| < 2^{-s}$.

<u>Следствие 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ (см. [4]), $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) > 0$, а $\{L_k\}_k$ последовательность дизъюнктных сегментов, содержащихся в $0\Delta 1$, такая, что ряд $\sum_k |L_k|$ сходится. Тогда не могут не существовать КДЧ x_0 и y_0 , которые не являются особыми точками для $\mathcal{F}$ и для которых верно $x_0 \in 0 \triangledown 1 \,\&\, x_0 \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \,\&\, y_0 \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg\exists k\,(y_0 \in L_k)$.

На основании теоремы 7, следствия 3 теоремы 5 из [13] и теоремы 3 и леммы 2 из [14] мы получаем следующее утверждение.

<u>Следствие 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, а ξ Π_1Ч из $0\Delta 1$. Тогда если существуют возрастающая на $0\Delta 1$ абсолютно непрерывная функция g, $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1$, и Π_2Ч η такие, что $\eta \in 0\Delta 1 \,\&\, \mathcal{O}_g(\eta) = \xi$. и, следовательно, $D_{K\Lambda}(0, g, \eta) \,\&\, D_{K\Lambda}(0, \mathcal{F} * g, \eta)$, то $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_1$ и ξ не является особой точкой для $\mathcal{F}$.

Пример 2. Существует функция $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}_0(\mathcal{F})$, для которой не существует алгорифм, применимый к всякому рациональному сегменту $a \vartriangle b$, $a \vartriangle b \subseteq 0 \vartriangle 1$, и выдающий по нему КДЧ из $a \triangledown b$, которое не является особой точкой для $\mathcal{F}$.

Пример 3. (Ср. теорему (3.11) [1], стр. 251.) Можно построить функцию $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}_0(\mathcal{F})$, такую, что не существует последовательность последовательностей сегментов $\{\{H_n^p\}_n\}_p$, для которой верно

$$\forall p\, \overline{\mathcal{H}}(\{H_n^p\}_n) \,\&\, \forall x\,(x \in 0 \vartriangle 1 \supset \neg\neg \exists p \neg \exists n\, (x \in (H_n^p)^\circ))$$

и для всякого НЧ p – $[\mathcal{F}, \{H_n^p\}_n]$ функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$.

Теорема 8. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{V}(\mathcal{F})$. Тогда выполнено $\mathcal{Z}(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если для всякой неубывающей абсолютно непрерывной на $0 \vartriangle 1$ функции g, $g(0) = 0 \,\&$ $\& \, g(1) = 1$, выполнено Д$(\mathcal{F} * g)$.

Пример 4. Существует функция слабо ограниченной на $0 \vartriangle 1$ вариации $\mathcal{F}$ такая, что $\mathcal{V}_0(\mathcal{F}) \,\&\, \neg \mathcal{Z}(\mathcal{F})$.

На основании теоремы 11 из [13] и следствия 2 теоремы 7 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 9. 1) Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция такая, что Д$(\mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ в том и только том случае, если не существует регулярное покрытие Φ такое, что

$$\forall \xi\,(\xi \in \Pi \,\&\, \xi \in 0 \vartriangle 1 \,\&\, \neg \exists k\,(\xi \in \Phi_k) \supset \xi \in \Pi_1 \,\& \tag{1}$$
$$\& \, \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) = \sigma_{\mathcal{F}/\Phi}(\xi) \,\&\, \sigma_{\mathcal{F}/\Phi}(\xi) \in \Pi_2)$$

(соотв. такое, что (1) и $\neg \exists k (\mathcal{F}(Э_л(\Phi_k)) = \mathcal{F}(Э_п(\Phi_k)))$).

2) Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{V}(\mathcal{F})$, а Φ регулярное покрытие такое, что (1). Тогда Φ наследю регулярно.

Пример 5. Существуют наследно регулярное покрытие Φ, равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$ и абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция $\mathcal{G}$ такие, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}/\Phi \;\&\; \mathcal{G} = \mathcal{G}/\Phi$ (и, следовательно, верно $\mathcal{V}(\mathcal{F}) \;\&\; \mathcal{V}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$), $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$, а $(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ не обладает свойством $(N)^*$.

Теорема 10. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{V}(\mathcal{F})$, а $\mathcal{H}$ равномерно непрерывная функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ такая, что Д$(\mathcal{H})$. Тогда если функция $(\mathcal{F} + \mathcal{H})$ обладает свойством $(N)^*$, то $\mathcal{H}$ обладает свойством $(N)^*$.

Доказательство. Пусть функция $(\mathcal{F} + \mathcal{H})$ обладает свойством $(N)^*$.

Пусть $\xi \in \Pi_1$. Тогда $\sigma_{(\mathcal{F}+\mathcal{H})}(\xi) \in \Pi_1$ (теорема 11 из [13]). Мы допустим, что $\sigma_{\mathcal{H}}(\xi) \in \Pi_2$. Тогда $0 < \xi < 1$ и согласно теореме 13 из [13] и теореме 3 из [15] верно $\neg\neg(D_{кл}(+\infty, \mathcal{H}, \xi) \vee D_{кл}(-\infty, \mathcal{H}, \xi))$.

Мы можем без ограничения общности предположить, что $D_{кл}(+\infty, \mathcal{H}, \xi)$. Тогда не может не существовать рациональный сегмент $a \Delta b$ такой, что

$$(2)\; 0 < a < \xi < b < 1 \;\&\; \forall cd\,(a \leq c < \xi < d \leq b \supset |c \Delta d| < \Delta(\mathcal{H}, c \Delta d)).$$

Пусть $a \Delta b$ сегмент, а $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{H}_1$ функции, для которых верно (2), $\mathcal{F}_1 = \dfrac{1}{\Delta(\mathcal{H}, a \Delta b)} \cdot \mathcal{F}^{[a \Delta b]}$ и

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{\Delta(\mathcal{H}, a \Delta b)} \cdot (\mathcal{H}^{[a \Delta b]} - \mathcal{H}(a)).$$

Тогда, очевидно, верно

$$(3)\quad \begin{aligned} &\mathcal{V}(\mathcal{F}_1) \;\&\; Д(\mathcal{H}_1) \;\&\; \mathcal{H}_1(0) = 0 \;\&\; \mathcal{H}_1(1) = 1 \;\&\; \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi) \in \Pi_2 \;\&\\ &\&\; \sigma_{(\mathcal{F}_1 + \mathcal{H}_1)}(\xi) \in \Pi_1 \end{aligned}$$

и ввиду (2) и леммы 4 из [14] существуют КДЧ $\varkappa$, р.п. множество НЧ C и функция g такие, что

$$0<x \,\&\, \forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset x\cdot(y-x) \le \Delta([\mathcal{H}_1, C], x \,\Delta\, y))\,\&$$
$$\&\,\neg\,\exists \ell\,(\ell \in C \,\&\, \xi \in \mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})\,\&\, \mathcal{H}(C) \,\&\, g = ([\mathcal{H}_1, C])^{-1}$$

и, следовательно, ввиду теорем 2 и 1 и [11] g возрастающая на $0 \,\Delta\, 1$ абсолютно непрерывная функция, $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1 \,\&\, \sigma_g(\sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi)) = \xi \in \Pi_1$ и $\mathcal{H}_1 * g$ функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \,\Delta\, 1$. Согласно [14] выполнено

$$D_{\text{кл}}(\mathcal{H}_1 * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi)) \,\&\, \neg D_{\text{кл}}(0, \mathcal{H}_1 * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi)) \,\&\, D_{\text{кл}}(0, g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi))$$

и, следовательно, ввиду следствия 2 теоремы 7 верно

$D_{\text{кл}}(0, \mathcal{F}_1 * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi))$. Таким образом,

$$D_{\text{кл}}((\mathcal{F}_1 + \mathcal{H}_1) * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi)) \,\&\, \neg D_{\text{кл}}(0, (\mathcal{F}_1 + \mathcal{H}_1) * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi))$$

и, следовательно, $\sigma_{(\mathcal{F}_1+\mathcal{H}_1)}(\xi) = \sigma_{(\mathcal{F}_1+\mathcal{H}_1)}(\sigma_g(\sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi))) \in \Pi_2$ (см. лемму 2 из [14]), что противоречит (3).

Итак, мы доказали $\forall \xi\,(\xi \in \Pi_1 \supset \sigma_{\mathcal{H}}(\xi) \in \Pi_1)$ и согласно теореме 11 из [13] $\mathcal{H}$ обладает свойством $(N)^*$.

<u>Следствие 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, а $x_0 \,\Delta\, x_1$ сегмент, $x_0 \,\Delta\, x_1 \subseteq 0 \,\Delta\, 1$. Тогда если $\mathcal{F}$ функция квазислабо ограниченной вариации на $x_0 \,\Delta\, x_1$, то функция $\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}$ обладает свойством $(N)^*$ и, следовательно, $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $x_0 \,\Delta\, x_1$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ функция ограниченной вариации на $x_0 \,\Delta\, x_1$.

На основании этого, теоремы 1, теоремы 3 из [10] и теоремы 9 мы сразу получаем следующие утверждения.

<u>Следствие 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, которая обладает свойством $(T_1)^*$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$.

<u>Теорема 11</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}_0(\mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ и, следовательно, представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных (на $0 \,\Delta\, 1$) функций.

Теорема 12. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ функции такие, что $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ & & Д$(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ обладает свойством $(N)^*$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\exists u\,(0 \leq u \,\&\, D(u, \mathcal{F}-\mathcal{G}, x))$. Тогда $\mathcal{F}-\mathcal{G}$ является неубывающей.

Доказательство. Мы можем предположить, что $\mathcal{F}(0) = \mathcal{G}(0)$. Достаточно доказать $0 \leq \mathcal{F}(1)-\mathcal{G}(1)$.

Мы допустим, что $\mathcal{F}(1)-\mathcal{G}(1) < 0$, и определим $\mathcal{H} \rightleftharpoons \mathcal{G}-\mathcal{F}$. Согласно лемме 4 из [14] существуют КДЧ x и w и р.п. множество НЧ C такие, что

$$
(4)\quad 0 < x < w < \mathcal{H}(1) \,\&\, \mathcal{H}(C) \,\&\, \forall \ell\,(\ell \in C \supset w \cdot |\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner| > \Delta(\mathcal{H}, \mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner)) \,\&\, \forall x y\,(0 \leq x < y \leq 1 \supset \Delta([\mathcal{H}, C], x \Delta y) > x \cdot |x \Delta y|).
$$

Ввиду наших предположений сегменты $\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner$, $\ell \in C$, образуют S_σ-множество меры 1, которое содержится в $0 \Delta 1$, выполнено $\mathcal{I}([\mathcal{F}, C]) \,\&\,$ Д$([\mathcal{H}, C]) \,\&\, [\mathcal{G}, C] = [\mathcal{F}, C] + [\mathcal{H}, C]$, $[\mathcal{G}, C]$ обладает свойством $(N)^*$ (см. замечание 1). Следовательно, ввиду (4) и теоремы 10 функция $[\mathcal{H}, C]$ обладает свойством $(N)^*$ и тогда ввиду леммы 3 из [11] и отмеченных нами свойств множества C выполнено $\mathcal{H}(1) = [\mathcal{H}, C](1) < w$, что противоречит (4).

Следствие 1. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{I}(\mathcal{F})$, $x_0 \Delta x_1$ сегмент, $x_0 \Delta x_1 \subseteq 0 \Delta 1$, и пусть для почти всех КДЧ y из $x_0 \Delta x_1$ верно $\exists u\,(0 \leq u \,\&\, D(u, \mathcal{F}, y))$. Тогда $\mathcal{F}$ является неубывающей на $x_0 \Delta x_1$.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{I}(\mathcal{F})$, а $\{F_m\}_m \in S$ такое, что Д$(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$. Тогда 1) $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ в том и только том случае, если существует функция $\mathcal{G}$, обладающая свойством $(N)^*$, для которой выполнено Д$(\mathcal{G}, \{F_m\}_m)$, и 2) $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$

тогда и только тогда, когда существует $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что $\{F_n\}_n = \{G_n\}_n$ (см. теорему 9 из [11] и теорему 1).

Теорема 13. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, и $\mathcal{H}$ функция ограниченной вариации (на $0 \vartriangle 1$) такая, что $Д(\mathcal{H})$ и функция $\mathcal{H} - \mathcal{F}$ является неубывающей. Тогда $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна (на $0 \vartriangle 1$).

Доказательство. Согласно теореме 1 и следствию 1 теоремы 10 нам достаточно доказать, что $\mathcal{F}$ функция ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$. На основании теоремы 2 мы можем без ограничения общности предположить, что $\forall x y\, (0 \le x < y \le 1 \supset |x \vartriangle y| \le \le \Delta(\mathcal{H}, x \vartriangle y))$. Тогда ввиду теоремы 2 и теоремы 3 из [5] функция g, где $g^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(\mathcal{H}, 0 \vartriangle 1)} \cdot (\mathcal{H} - \mathcal{H}(0))$, абсолютно непрерывна на $0 \vartriangle 1$ и $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1$. Но тогда верно $Д(\mathcal{F} * g) \,\&\, \forall x y\, (0 \le x < y \le 1 \supset \Delta(\mathcal{F} * g, x \vartriangle y) \le$
$\le \Delta(\mathcal{H}, 0 \vartriangle 1) \cdot |x \vartriangle y|)$

и, следовательно, согласно теореме 3 из [5] $\mathcal{F} * g$ абсолютно непрерывна (на $0 \vartriangle 1$) и, таким образом, $\mathcal{F} * g$ и $\mathcal{F}$ функции ограниченной вариации (на $0 \vartriangle 1$).

Изучая свойства функций, обладающих свойством $\mathcal{Y}$ (соотв. $\mathcal{Y}_0$), мы тем самым получили ряд результатов о $\mathcal{Y}$ - (соотв. $\mathcal{Y}_0$ -) интегрируемости и соответствующем ей интеграле - в частности - однозначность значения интеграла, линейность и монотонность интегрирования, возможность интегрирования по частям, теоремы о подстановке и т.д. . Полученные результаты свидетельствуют о том, что эти интегралы обладают многими свойствами аналогичными свойствам интеграла Перрона (ср.[1]).

Замечание 3. Пусть $\{F_n\}_n \in S$ и пусть $\{F_n^1\}_n \in S$,

$\{F_m^2\}_m \in S$ и $|\{F_m\}_m|$ $\mathcal{Z}$ -интегрируемые объекты, $\{F_m^1\}_m \leq \{F_m^2\}_m$. Тогда согласно следствиям теорем 10 и 12 и лемме 3 из [3] существует $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что $\{G_m\}_m = \{F_m\}_m$, и для всякого $\{H_m\}_m \in S$, $\{F_m^1\}_m \leq \{H_m\}_m \leq$ $\leq \{F_m^2\}_m$, можно построить $\{K_m\}_m \in L_1, \{K_m\}_m = \{H_m\}_m - \{F_m^1\}_m$, и, следовательно, $\{H_m\}_m$ $\mathcal{Z}$ -интегрируемый объект, причем из $\mathcal{Z}_0$ -интегрируемости $\{F_m^1\}_m$ (соотв. $\{F_m^2\}_m$) следует $\mathcal{Z}_0$ -интегрируемость $\{H_m\}_m$.

На заключение мы заметим, что верно следующее утверждение.

Теорема 14. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, Д$(\mathcal{F})$, и пусть для всякой возрастающей на $0 \Delta 1$ абсолютно непрерывной (на $0 \Delta 1$) функции g, удовлетворяющей условию Липшица, $g(0) = 0 \& g(1) = 1$, существует $\{G_m\}_m \in S$ такое, что лля почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\exists u\, (P(u, \{G_m\}_m, x)\ \&\ D_{КЛ}(u, \mathcal{F} * g, x))$. Тогда верно $\mathcal{Z}(\mathcal{F})$.

Л и т е р а т у р а

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова, т. 67(1962), 295-361.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства $L_{\mathcal{R}}$ и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 463-492.

[5] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструк-

тивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 667-691.

[6] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 705-726.

[7] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 423-451.

[8] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 587-610.

[9] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 687-711.

[10] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивном аналоге свойства (T_1), Comment. Math. Univ. Carolinae 14(1973), 421-439.

[11] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивных аналогах свойств (N) и (S), Comment. Math. Univ. Carolinae 14 (1973), 565-582.

[12] ДЕМУТ О.: О связи представимости конструктивной функции в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций и дифференцируемости этой функции, Comment. Math. Univ. Carolinae 15(1974), 195-210.

[13] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975),315-331.

[14] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[15] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 111-126.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Malostranské nám. 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 1.6. 1977)