Tokhtar Kemelbaevich Nurekenov

Теоремы существования неотрицательных периодических решений конечных и счетных систем дифференциальных уравнений и теорема существования решений счетных систем дифференциальных уравнений

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 15 (1974), No. 3, 429--449

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105569`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

15,3 (1974)

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КОНЕЧНЫХ И СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.К. НУРЕКЕНОВ, Алма-Ата

Абстракт: В данной работе, продолжающей исследования А.Н. Тихонова, Ю.С. Колесова, М.А. Красносельского, К.П. Персидского и автора, рассматривается задача о существовании решений счетных систем нелинейных дифференциальных уравнений и неотрицательных периодических решений конечных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Существование доказывается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Ключевые слова: Система нелинейных дифференциальных уравнений, счетная система нелинейных дифференциальных уравнений, неотрицательное периодическое решение, теоремы существования, теорема Шаудера о неподвижной точке.

AMS: Primary 34C25 Ref. Ž. 7.925.3?
Secondary 34G05 7.937

---

§ 1. Теоремы существования периодических решений конечных систем дифференциальных уравнений

1.1. Введение. В этой работе рассматривается задача о существовании неотрицательных периодических решений конечных и счетных систем дифференциальных уравнений.

Рассматривается также задача о существовании решений счетных систем дифференциальных уравнений. Первая теорема существования решений у счетных систем дифференциальных уравнений принадлежит А. Тихонову [10]. В работах К.П. Персидского и других математиков идея А. Тихонова получила дальнейшее развитие [9].

В работе Ю.С. Колесова и М.А. Красносельского доказано существование неотрицательных ω-периодических решений конечных систем дифференциальных уравнений в предположении, что матрица монодромии лежит внутри круга радиуса $\rho < 1$ [1]. В данной работе не требуется задание всего спектра, лежащего внутри круга радиуса $\rho < 1$, а требуется только существования не более двух собственных значений $0 < \lambda \leq 1$.

1.2. <u>Постановка задачи</u>. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) . \tag{1.1}$$

Эту систему будем записывать в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) . \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что правая часть $f(t, x)$ периодична по t с периодом $\omega : f(t, x) = f(t + \omega, x)$.

Предположим также, что правые части системы (1.1) определены при $0 \leq t \leq \omega$, $-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty$ и непрерывны по совокупности переменных. Кроме того будем считать, что задача Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

имеет единственное решение

$$x(t) = x(t, t_0, x_0)$$

в промежутке $0 \le t \le \omega$.

В этом случае равенством

$$U(t, t_0)x_0 = x(t, t_0, x_0) \tag{1.4}$$

определяется двупараметрическое семейство операторов $U(t, t_0)$, которое преобразует пространство E^n в себя.

Из единственности решения Коши (1.3) следует, что оператор $U(t, t_0)$ непрерывен .

Оператор $U(t, t_0)$ обычно называется оператором сдвига по траекториям системы (1.1) за время от t_0 до t или просто оператором сдвига.

Для того, чтобы решение $x(t)$ уравнения (1.2) было ω -периодическим, необходимо и достаточно, чтобы точка $x(0)$ была неподвижной точкой оператора $U(\omega, 0)x(0) = x(0)$.

Это известное свойство оператора сдвига позволяет применять для доказательства существования периодических решений различные новые принципы неподвижной точки.

Допустим, что оператор $U(\omega, 0)$ оставляет инвариантным некоторый конус K в пространстве E^n .

Тогда для доказательства существования периодических решений у системы (1.1) может быть применена теория нелинейных положительных операторов.

Напомним, что оператор Q (не обязательно линейный) называется положительным, если $QK \subset K$, монотонным, если из $x \le y$ следует $Qx \le Qy$ [2].

Лемма 1. [3] Пусть правые части системы (1.2) удовлетворяют неравенствам

(1.5) $f_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_m) \geq 0 \quad (x_j \geq 0;\ j \neq i;\ i = 1, 2, \dots, m).$

Тогда оператор $U(t, 0)$ при каждом $t \geq 0$ оставляет инвариантным конус K векторов с неотрицательными координатами, то есть

$$U(t, 0)x \in K \text{ при } t \geq 0,\ x \in K \ .$$

1.3. О линейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему

(1.6) $$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) x_j + g_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

которая в векторной форме имеет вид

(1.7) $$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t) \ .$$

Функции $a_{ij}(t)$ и $g_i(t)$ предполагаются непрерывными.

Как известно ряд

(1.8) $$V(t, t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(t_1) dt_1 + \int_{t_0}^{t} A(t_2) \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 dt_2 + \dots$$

сходится по норме операторов равномерно относительно t и t_0 из конечного промежутка, причем решение линейного однородного уравнения

(1.9) $$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

удовлетворяющее начальному условию

$$(1.10) \qquad x(t_0) = x_0$$

можно записать в виде

$$(1.11) \qquad x(t) = V(t, t_0)x_0$$

а решение неоднородного уравнения (1.6), удовлетворяющее начальному условию (1.10) в виде

$$(1.12) \qquad x(t) = V(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} V(t,\tau)g(\tau)d\tau \quad .$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(t)$ периодичны по t с периодом ω. В этом случае матрицу

$$(1.13) \qquad V = V(\omega, 0)$$

называют матрицей монодромии.

1.4. Теоремы существования периодических решений

Теорема 1.1. Пусть правые части системы (1.1) удовлетворяют неравенствам (1.5) и

$$(1.14) \qquad f_i(t, x_1, \dots, x_n) \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + g_i(t) \ ,$$

где $a_{ij}(t) \ge 0$ при $i \ne j$. Пусть матрица монодромии $V(\omega, 0)$ линейного уравнения (1.9) имеет в конусе K собственный вектор x_0 с собственным значением λ_0 $(0 < \lambda_0 < 1)$. Пусть $\int_0^{\omega} V(\omega,\tau)g(\tau)d\tau \le \lambda_1 x_0$ где λ_1 - некоторое положительное число.

Тогда система (1.1) имеет по крайней мере одно неотрицательное ω-периодическое решение.

Доказательство. Из неравенства (1.5) вытекает, что для оператора сдвига $U(t, 0)x \ge 0$, при $x \in K$, а из неравенства (1.14) следует

$$(1.15)\qquad U(t,0)x \le U_1(t,0)x\,,\ x\in K\ ,$$

где $U_1(t,0)x = V(t,0)x + \int_0^t V(t,\tau)g(\tau)d\tau$ - оператор сдвига системы (1.6), в частности имеет место неравенство

$$(1.16)\qquad U(\omega,0)x \le V(\omega,0)x + \int_0^{\omega} V(\omega,\tau)\,g(\tau)\,d\tau\ .$$

Пусть $x_1 = \lambda_1 x_0$. Тогда для элемента

$$x^* = \frac{x_1}{1-\lambda_0}$$

имеем

$$(1.17)\qquad U_1(\omega,0)\,x^* \le x^*$$

В самом деле

$$(1.18)\quad U_1(\omega,0)\left(\frac{x_1}{1-\lambda_0}\right) = V(\omega,0)\,\frac{x_1}{1-\lambda_0} + \int_0^{\omega} V(\omega,\tau)g(\tau)d\tau \le$$
$$\le \frac{\lambda_0 x_1}{1-\lambda_0} + x_1 = \frac{x_1}{1-\lambda_0}\ .$$

Из неравенств (1.15) и (1.16) вытекает, что оператор сдвига оставляет инвариантным конусный отрезок $0 \le x \le x^*$. Поэтому [2] оператор сдвига $U(\omega,0)$ имеет неподвижную точку y_0 в конусном отрезке $0 \le x \le x^*$

$$(1.19)\qquad U(\omega,0)\,y_0 = y_0\ .$$

Эта неподвижная точка является начальным условием неотрицательного ω -периодического решения. Теорема доказана.

<u>Теорема 1.2</u>. Пусть правые части системы (1.1) удовлетворяют неравенствам (1.5), (1.14) и неравенству

$$(1.14') \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)x_j \ge f_i(t, x_1, \dots, x_m)$$

$$\text{при } x_j \ge 0 \ (j=1,\dots,m), \ \sqrt{\sum_{j=1} x_j^2} \le \varkappa_0 > 0 \ .$$

Пусть матрица монодромии $V(\omega)$ линейного уравнения (1.9) имеет в конусе K собственный вектор x_0 и x_1 с соответствующими собственными значениями $\lambda_0 = 1$, λ_1 $(0 < \lambda_1 < 1)$. Пусть

$$\int_0^\omega V(\omega)V^{-1}(s)g(s)ds \le \lambda_2 x_1 \ (0 < \lambda_2) \ .$$

Тогда система (1.1) имеет по крайней мере одно неотрицательное ненулевое ω -периодическое решение.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\overline{x} = \lambda_2 x_1 = \lambda_1 x^*$, $y_0 = x_0 + \frac{\lambda_1 x^*}{1-\lambda_1}$.

Тогда $U_1(\omega, 0)y_0 \le y_0$. В самом деле

$$U_1(\omega,0)y_0 = V(\omega)\left(x_0 + \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}x^*\right) + \int_0^\omega V(\omega)V^{-1}(s)g(s)ds \le x_0 +$$

$$+ \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1}x^* + \lambda x^* = x_0 + \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}x^* = y_0 \ .$$

Поэтому из неравенства (1.14) и (1.14') вытекает, что оператор сдвига $U(\omega, 0)$ оставляет инвариантным конусный отрезок $x_0 \le x \le y_0$. Следовательно имеет неподвижную точку z_0 $(x_0 \le z_0 \le y_0)$: $U(\omega,0)z_0 = z_0$. Теорема доказана.

<u>Теорема 1.3</u>. Пусть система (1.1) имеет нулевое решение и удовлетворяет условиям теоремы 1.1 (условиям теоремы 1.2). Пусть правые части системы (1.1) удовлетворяют неравенствам

$$(1.20) \qquad f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \ge \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)x_j \ (i=1,\dots,m) \ \|x\| \le r \ ,$$

где функции $b_{ij}(t)$ непрерывны и $b_{ij}(t) \ge 0$ при $j \ne i$. Пусть $V_1(\omega, 0)$ - матрица монодромии линейной системы

(1.21) $$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, \dots, m)$$

имеет в конусе K собственный вектор x_0 с собственным значением $\lambda \geq 1$, причем $x_0 \leq \lambda x_0$, $(x_0 \leq \lambda (x_0 + \frac{\lambda_1 x^*}{1-\lambda_1}))$.

Тогда система (1.1) имеет по крайней мере одно ненулевое ω-периодическое решение.

Доказательство. В силу неравенства (1.20) имеем

$$x_0 \leq \lambda x_0 \leq U(\omega, 0)x_0 \leq U_1(\omega, 0)x_0 \leq y_0 .$$

Это значит, что оператор сдвига $U(\omega, 0)$ оставляет инвариантным конусный отрезок $x_0 \leq x \leq y_0$. Поэтому оператор сдвига имеет неподвижную точку x^* $(x_0 \leq x^* \leq y_0)$. Эта неподвижная точка является начальным условием ненулевого неотрицательного ω-периодического решения.

Теорема доказана.

§ 2. Периодические решения счетных систем дифференциальных уравнений

2.1. Теоремы существования и единственности решения

Пусть l_∞ - банахово пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

(2.1) $$\|x\|_{l_\infty} = \sup_i \{|x_i|\} \quad (i = 1, 2, \dots) .$$

Точно также можно рассмотреть банахово пространство l_p всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, для которых норма

(2.2) $$\|x\|_{l_p} = \{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\}^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

конечна.

Рассмотрим в этих пространствах счетную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots), \quad (i = 1, 2, \dots), \tag{2.3}$$

где t - вещественное независимое переменное, $x_1, x_2, \dots$ - счетное множество вещественных искомых функций от t, а $f_1, f_2, \dots$ - заданные вещественные функции переменных $t, x_1, x_2, \dots$ области $\mathcal{D}$, которая определяется неравенствами

$$0 \le t \le T, \quad \|x\| \le R, \tag{2.4}$$

где

$$0 < T, R \le \infty.$$

Приведем общеизвестные две теоремы.

<u>Теорема 2.1</u>. Пусть оператор

$$f(t, x) = \{f_1(t, x_1, x_2, \dots), \; f_2(t, x_1, x_2, \dots), \dots\} \tag{2.5}$$

отображает топологическое произведение $[0, T] \times \ell_p$ $(1 \le p \le \infty)$ в ℓ_p. Если оператор $f(t, x)$

1) при фиксированном

$$\|f(t + \Delta t, x) - f(t, x)\|_{\ell_p} \longrightarrow 0 \text{ при } \Delta t \longrightarrow 0, \tag{2.6}$$

то есть оператор $f(t, x)$ непрерывен по t (в сильном смысле);

2) удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{\ell_p} \le L \|x - y\|_{\ell_p}, \tag{2.7}$$

то задача Коши

$$(2.8)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

имеет для $x_0 \in \ell_p$ единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$(2.9)\qquad x(0) = x_0 \quad .$$

Мы в этом параграфе будем пользоваться также следующими условиями, которые являются более слабыми, чем условия теоремы 2.1.

1) Функция f_i непрерывна по t при фиксированном $x \in \ell_p$, т.е.

$$(2.10)\qquad |f_i(t+\Delta t, x_1, x_2, \dots) - f_i(t, x_1, x_2, \dots)| \to 0$$

при $\Delta t \to 0$.

2) При любом $t \in [0, T]$ и при $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, \dots$ имеет место неравенств

$$(2.11)\qquad |f_i(t, 0, 0, \dots)| \le \gamma(t) \quad (i = 1, 2, \dots) ,$$

где $\gamma(t)$ - некоторая непрерывная на $[0, T]$ функция

3) Функции f_i удовлетворяют условию Коши-Липшица относительно переменных, $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_\infty$

$$|f_i(t, x_1, x_2, \dots) - f_i(t, y_1, y_2, \dots)| \le \alpha(t) \|x - y\|_{\ell_\infty} ,$$

где $\alpha(t)$ - некоторая положительная непрерывная функция на $[0,T]$.

Из этих условий вытекают следующие свойства функции f_i

а)

$$(2.12)\qquad |f_i(t,x_1,x_2,\dots)| \le \alpha(t)\|x\|_{\ell_\infty} + \gamma(t)$$

б) В любой точке области $\mathcal{D}$ имеет место

$$(2.13)\quad |f_i(t+\Delta t, x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2,\dots) - f(t,x_1,x_2,\dots)| \to 0$$

при $|\Delta t| + \|\Delta x\|_{\ell_\infty} \to 0$.

в) Если на отрезке $[0,T]$ семейство функции $x_1(t), x_2(t),\dots$ равностепенно непрерывно, то функции

$$f_i(t,x_1(t),x_2(t),\dots) \quad (i=1,2,\dots)$$

непрерывны по t на $[0,T]$.

<u>Теорема 2.2</u>. [9] Пусть выполнены все вышеуказанные условия. Тогда через каждую заданную точку $(t_0, x_1^0, x_2^0,\dots)$ области $\mathcal{D}$ проходит только одно ограниченное решение задачи Коши

$$(2.14)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i(t,x_1,x_2,\dots) \\ x_i(t_0) = x_i^0 \quad (i=1,2,\dots) \end{cases}$$

равностепенно непрерывное по t на $[0,T]$ и непрерывно зависящее от начального условия

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0,\dots) \in \ell_\infty \ .$$

Функция $f(x_1,x_2,\dots)$ определенная в пространстве ℓ_p $(1 \le p \le \infty)$ называется непрерывной в точке $x=(x_1,x_2,\dots)$, если для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из

$$(2.15)\qquad \|x-y\|_{\ell_p} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \delta$$

$$\Big(\|x-y\|_{\ell_\infty} = \sup_i |x_i - y_i| < \delta\Big)$$

следует

$$(2.16) \qquad |f(x_1,x_2,\dots)-f(y_1,y_2,\dots)|<\varepsilon \quad .$$

Функция $f(x_1,x_2,\dots)$ непрерывная в каждой точке $x = (x_1,x_2\dots)\in \ell_p$ называется просто непрерывной в пространстве ℓ_p. Отметим, что определение непрерывности действительной функции от счетного аргумента, данное А.Н. Тихоновым характерное для непрерывности действительной функции, определенной в пространстве ℓ_∞. В нашем случае это определение непрерывности не совпадает с определением непрерывности, данным А.Н. Тихоновым.

Теорема 2.3. Пусть правые части системы дифференциальных уравнений удовлетворяют условиям; что они

а) определены в области $\mathcal{D}$;

б) непрерывны в пространстве ℓ_p, при фиксированных t;

в) удовлетворяют неравенствам

$$(2.17) \qquad |f_i(t,x_1,x_2,\dots)|\le m_i(t) \quad ,$$

где $m_i(t)$ - функции, суммируемые в интервале $[0,T]$, причем

$$(2.18) \qquad \begin{gathered}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_0^T m_i(\tau)\,d\tau\right)^p<\infty \\ \left(\int_0^T m_i(\tau)\,d\tau \longrightarrow 0 \text{ при } i\to\infty \text{ для } \ell_\infty\right) .\end{gathered}$$

Тогда при перечисленных условиях через каждую точку $x^0 = (x_1^0,x_2^0,\dots)\in\ell_p$ проходит хотя бы одно решение $x(t) = (x_1(t),x_2(t),\dots)$ системы дифференциальных уравнений (2.3) удовлетворяющее начальному условию

(2.19) $$x(0)=x^0 \Longleftrightarrow x_i(0)=x_i^0 \quad (i=1,2,\ldots).$$

Доказательство. Заменим счетные системы дифференциальных уравнений (2.3) системой интегральных уравнений

(2.20) $$x_i(t)=x_i^0+\int_0^t f_i(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)\,d\tau$$

и рассмотрим соответствующее им отображение

(2.21) $$y_i(t)=x_i^0+\int_0^t f_i(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)\,d\tau$$

ставящее в соответствие всякой счетной системе непрерывных функций $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots)$, $\|x\|\le r$ другую такую же систему $y(t)=(y_1(t),y_2(t),\ldots)$.

Если существует система, инвариантная при этом отображении, то она является решением системы уравнений (2.20), а поэтому и (2.3).

Множество систем непрерывных функций $x(t) = (x_1(t),x_2(t),\ldots)$ для которых

(2.22) $$\|x\|_{\bar{\ell}_p}=\sup_t\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i(t)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

является банаховым пространством $\bar{\ell}_p$ с нормой (2.22). Каждая система $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots)\in\bar{\ell}_p$ называется точкой этого пространства.

Рассмотрим множество K состоящее из тех точек $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots)$ для которых x_j удовлетворяет условиям:

(2.23) $$|x_j(t)-x_j^0|\le\int_0^t m_j(\tau)\,d\tau$$

$$(2.24) \qquad |x_j(t_1)-x_j(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} m_j(\tau)d\tau \quad .$$

Заметим, что множество K компактно.

В самом деле, пусть $x_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots)$ - счетная последовательность из K. j - компоненты этих точек по (2.23) равномерно ограничены и по (2.24) равностепенно непрерывны.

По теореме Арцела из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $x_1^{n_1^i}(t)$ равномерно сходящуюся к некоторой функции $x_1(t)$.

Аналогично из $x_2^{n_1^i}(t)$ можно выбрать подпоследовательность $x_2^{n_2^i}(t)$ равномерно сходящуюся к $x_2(t)$ и так далее. Последовательность точек

$$x_{n_k^k} = (x_1^{n_k^k}, x_2^{n_k^k}, \dots)$$

сходится к точке $x=(x_1, x_2, \dots)$, так как

$$\|x_{n_k^k}(t)-x(t)\|_{\bar{\ell}_p} = \sup_t \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{n_k^k}(t)-x_i(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0$$

при $k \longrightarrow \infty$.

Действительно, всилу неравенства (2.18) для каждого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует $N(\varepsilon)$, что $2\left(\sum_{i=N(\varepsilon)}^{\infty}\left(\int_0^T m_i(\tau)d\tau\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Из равномерной сходимости функций $x_i^{n_k^k}$ к функции $x_i(t)$ $(i=1,\dots,N(\varepsilon))$ для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует натуральное число $m(\varepsilon)$, что при

$$\sup_t \left[\sum_{i=1}^{m(\varepsilon)} |x_i^{n_k^k}(t)-x_i(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Отсюда при $k \ge m(\varepsilon)$

$$\|x_{n_k}(t)-x(t)\|_{\bar{\ell}_p} \le \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} |x_i^{n_k}(t)-x_i(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + 2\left(\sum_{i=N(\varepsilon)}^{\infty}\left(\int_0^T m_i(\tau)d\tau\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Ясно, что $x(t) \in K$.

В силу неравенства (2.17) отображение (2.21) преобразует множество K в себя. Докажем, что это отображение непрерывно.

Пусть последовательность элементов $x_k = (x_1, x_2, \ldots)$ из K сходится к элементу $x^0(t) = (x_1^0(t), x_2^0(t), \ldots)$:

$$\|x_k(t) - x^0(t)\|_{\bar{\ell}_p} = \sup_t \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k(t) - x_i^0(t)|^p)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

при $k \to \infty$.

Тогда по условию теоремы при каждом фиксированном t каждая последовательность функций $f_i(t, x_1^k(t), x_2^k(t), \ldots)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сходится к соответствующей функции $f_i(t, x_1^0(t), x_2^0(t), \ldots)$ при $k \to \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное фиксированное число. Для $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу неравенства (2.18) найдется число $i_0(\varepsilon)$, что имеет место неравенство

$$2\left(\sum_{i=i_0(\varepsilon)}^{\infty}\left(\int_0^T m_i(\tau)d\tau\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

С другой стороны в силу теоремы Лебега о предельном под знаком интеграла для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует число $k_0(\varepsilon)$, что при $k \ge k_0(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{i_0(\varepsilon)} \left|\int_0^t [f_i(\tau, x_1^k(\tau), x_2^k(\tau), \ldots) - f_i(\tau, x_1^0(\tau), x_2^0(\tau), \ldots)]d\tau\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{i_0(\varepsilon)}\left(\int_0^T |f_i(\tau, x_1^k(\tau), x_2^k(\tau), \ldots) - f_i(\tau, x_1^0(\tau), x_2(\tau), \ldots)|d\tau\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Отсюда следует, что при $k \ge k_0(\varepsilon)$

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\Big|\int_0^t [f_i(\tau, x_1^k(\tau), x_2^k(\tau),\dots) -$$

$$- f_i(\tau, x_1^0(\tau), x_2^0(\tau),\dots)]d\tau\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{i=1}^{i_0(\varepsilon)}\Big(\int_0^T |f_i(\tau, x_1^k(\tau), x_2^k(\tau),\dots) -$$

$$- f_i(\tau, x_1^0(\tau), x_2^0(\tau),\dots)|d\tau\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \Big(\sum_{i=i_0(\varepsilon)}^{\infty}\Big(\int_0^T m_i(\tau)d\tau\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon .$$

Это означает непрерывность отображения (2.21).

По теореме Шаудера [12] у отображения (2.21) существует хотя бы одна неподвижная точка $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t),\dots)$. Тогда система функций $(x_1^*(t), x_2^*(t),\dots)$ соответствующая этой точке $x^*(t)$ является решением системы интегральных уравнений (2.20) или дифференциальных уравнений (2.3).

Теорема доказана.

<u>Теорема 2.4</u>. Пусть выполнены все условия теоремы 2.3. Пусть системы дифференциальных уравнений (2.3) имеет единственное решение, проходящее через каждую точку $(t_0, x_1^0, x_2^0,\dots)$ области $\mathcal{D}$. Тогда решение

$$x(t) = (x_1(t, t_0, x_1^0, x_2^0,\dots), x_2(t, t_0, x_1^0, x_2^0,\dots),\dots)$$

системы уравнений (2.3), проходящее через точку $(t_0, x_1^0, x_2^0,\dots)$ области $\mathcal{D}$ есть непрерывная функция их начальных значений $(x_1^0, x_2^0,\dots)$.

<u>Доказательство</u>. Предположим противное.

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, и последовательность точек $x_m^0 = (x_1^{0m}, x_2^{0m},\dots)$, что имеет место соотношение:

$$\|x_m^0 - x^0\|_{\ell_p} \longrightarrow 0, \quad \|x^m(t) - x(t)\|_{\bar{\ell}_p} \ge \varepsilon_0 \text{ при } m \to \upsilon ,$$

где $x_m(t)$ и $x(t)$ решения системы уравнений (2.3) проходящее соответственно через точки x_m^0 и x^0. С другой стороны (как в доказательстве теоремы 2.3) существует подпоследовательность $x_{n_k}(t)$, что $x_{n_k}(t) \longrightarrow \bar{x}(t)$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу в равенстве

$$(2.25)\quad x_i^{n_k}(t) = x_i^{0n_k} + \int_0^t f_i(\tau, x_1^{n_k}(\tau), x_2^{n_k}(\tau), \dots)\, d\tau ,$$

получим

$$\bar{x}_i(t) = x_i^0 + \int_0^t f_i(\tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{x}_2(\tau), \dots)\, d\tau .$$

Это противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

Следует указать, что задача Коши (2.14) имеет единственное решение, если правые части $f_i(t, x_1, x_2, \dots)$ удовлетворяют условиям Липшица: [10]

$$|f_i(t, x_1', x_2', \dots) - f_i(t, x_1'' x_2'', \dots)| \le \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} |x_j' - x_j''| ,$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} K_{ij}$ сходящиеся и равномерно ограничены, т.е. $\sum_{i=1} K_{ij} = A_j < A$.

2.2. О линейной счетной системе дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейные счетные системы дифференциальных уравнений

$$(2.26)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t) x_j$$

и

$$(2.27)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t) x_j + g_i(t) ,$$

где t - действительное независимое переменное, $a_{ij}(t)$,

$g_i(t)$ - заданные непрерывные функции на интервале $(-\infty, \infty)$, причем

$$a_{ij}(t) = a_{ij}(t+\omega),\ g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots) \in l_p\ (1 \le p \le \infty),$$

x_i -искомые вещественные функции переменного t.

Будем считать, что на отрезке $[0, \omega]$ выполнены следующие условия функции

$$a_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(t)| \le \alpha, \tag{2.28}$$

где α - некоторое положительное число, если рассмотреть системы уравнений (2.26) и (2.27) в пространстве l_∞.

В случае, когда система уравнений (2.26), (2.27) рассматривается в пространстве l_p $(1 \le p < \infty)$ дополнительно будем предполагать выполнение следующих условий:

а) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(t+h) - a_{ij}(t)|^{p} \right)^{\frac{p}{q}} \to$ при $h \to 0$

б) $$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(t)|^q < \alpha ,$$

где α - положительное число, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Легко заметить, что в силу теоремы 2.2 через каждую точку $(t_0, x_0) = (t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$ области $\mathcal{D} = [0, \omega] \times l_\infty$ проходит единственное решение

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots) \tag{2.29}$$

системы уравнений (2.26) и (2.27) непрерывно зависящее от начального условия $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots)$.

Приведем еще одну необходимую общеизвестную теорему [11].

Пусть конус K - множество элементов с неотрицательными компонентами в пространстве $l_p \ (1 \le p < \infty)$.

Введем в l_p естественный порядок

$$x \le y \Longleftrightarrow y - x \in K \Longleftrightarrow x_i \le y_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

Говорят, что функция $f(t, x) = (f_1(t, x_1, x_2, \ldots),$ $f_2(t, x_1, x_2, \ldots), \ldots)$ на $D = [0, T] \times l_p \ (1 \le p \le \infty)$ со значениями в l_p квазимонотонно возрастает по x_j , если каждая f_i возрастает по x_j при $i \ne j$ т.е.

(2.30) $\quad x \le y, \ x_i = y_i \Longrightarrow f_i(t, x) \le f_i(t, y)$.

<u>Теорема 2.5</u>. Пусть $f(t, x)$ удовлетворяет либо условиям теоремы 2.1 либо условиям теоремы 2.2 и квазимонотонно возрастает по x . Если $u(t)$ - решение задачи Коши (2.14) и дифференцируемая функция $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots)$ удовлетворяет неравенствам

(2.31) $\quad z_i'(t) \le f_i(t, z_1(t), z_2(t), \ldots)$ в $[0, T]$, $z_i(0) \le u_i(0)$

то $z(t) \le u(t)$ в $[0, T]$.

Отметим наконец, что результаты первого параграфа обобщаются на дифференциальные уравнения в банаховых пространствах.

Приведем еще одну теорему для счетных систем дифференциальных уравнений аналогично теореме 1.1.

<u>Теорема 2.6</u>. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\quad f_i(t, 0, 0, \ldots) \ge 0 \quad (x_j = 0, \ j = 1, 2, \ldots)$,

2) функция $f(t, x)$ - квазимонотонна и $f(t, x) =$ $= f(t + \omega, x)$,

3) выполнены все условия либо теоремы 2.1 либо теоремы 2.2.

4) $f_i(t, x_1, x_2, \ldots) \le \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t) x_j + q_i,(t)$,

где

$a_{ij}(t) = a_{ij}(t+\omega)$, $a_{ij}(t) \ge 0$ при $i \neq j$ и $q = (q_1, q_2, \ldots) \in K$,

5) оператор монодромии $V(\omega, 0)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t) x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

имеет в конусе K собственный вектор x_0 с собственным значением λ_0 $(0 < \lambda_0 < 1)$, причем $\int_0^{\omega} V(\omega, \tau) q(\tau) d\tau \le \lambda_1 x_0$, где λ_1 - некоторое положительное число.

6) Каждое решение задачи Коши (2.14) определено в промежутке $[0 \le t \le \omega]$.

Тогда система дифференциальных уравнений (2.14) имеет по крайней мере одно ω -периодическое решение.

Литература

[1] КОЛЕСОВ Ю.С. и КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А.: Устойчивость по Ляпунову и уравнения с вогнутыми операторами, Доклады Акад.Наук СССР 145(1962),1217-1220.

[2] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А.: Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз,1962 г.

[3] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А.: Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М.,1966 г.

[4] НУРЕКЕМОВ Т.К.: О свойствах оператора сдвига по траекториям систем интегро-дифференциальных уравнений, Известия Акад.Наук Каз ССР,сер.физ.-мат.(1966), вып. 1, 43-47.

[5] НУРЕКЕНОВ Т.К.: О неотрицательных периодических решениях интегро-дифференциальных уравнений, автореферат диссертации, Воронеж, 1966 г., 1-7.

[6] НУРЕКЕНОВ Т.К.: О существовании неотрицательных ω-периодических решений у систем интегро-дифференциальных уравнений, Известия Акад.Наук Каз ССР, сер.физ.-мат. (1968), вып.5, 80-81.

[7] НУРЕКЕНОВ Т.К., ХАМИТОВ М.: О существовании ω-периодических решений дифференциальных уравнений, Вестник Акад.Наук Каз ССР (1971), вып.3, 70-71.

[8] НУРЕКЕНОВ Т.К., ХАМИТОВ М.: О существовании ω-периодических решений счетных систем дифференциальных уравнений, Труды Инст.мат.мех.Акад.Наук Каз ССР, том 2(1971), 39-43.

[9] ПЕРСИДСКИЙ К.П.: Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений, Известия Акад. Наук Каз ССР, сер.мат.и мех.(11)(1958), вып.7, 52-71.

[10] ТИХОНОВ А.: О бесконечных системах дифференциальных уравнениях, Мат.сборник, 41(1934), 551-560.

[11] WALTER W.: Existence and convergence theorems for the boundary lower equations based on the line method, Arch.Rational Mech.Anal.39(1970), 169-188.

[12] ДАНФОРД Н. и ШВАРЦ Дж.Т.: Линейные операторы(общая теория), М., 1963 ;

480064 Алма-Ата-64

Ул. Тулебаева 187, кв.18

СССР

(Oblatum 3.5.1974)