M. B. Kapilevič

О решении сингулярных задач Коши в операторных и базисных рядах

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 1, 27--40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105152

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9,1 (1968)

О РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ КОШИ В ОПЕРАТОРНЫХ И БАЗИСНЫХ РЯДАХ

М.В. КАПИЛЕВИЧ (M. V. KAPILEVIČ), Москва

§ 1. Формули перехода от операторных рядов к базисным

Рассмотрим в $(n+1)$ - мерной области $\Omega\,[-\infty < x < \infty,\ 0 \le s < \infty]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, уравнение

(1.1) $$X[\Phi] = L_s^{(\alpha)}[\Phi] + b^2\Phi, \quad (b = const),$$

где X и $L_s^{(\alpha)}$ - линейные дифференциальные операторы, действующие по переменным x и s соответственно, а $\alpha = 1, 2$ - порядок оператора $L_s^{(\alpha)}$.

1. Обозначим через $\Phi^{(\alpha)}(x, s; b)$ решение задачи Коши $K[X, L_s^{(\alpha)}, b; \Phi]$ для (1.1) с начальными данными

(1.2) $$\Phi^{(1)}(x,0) = \tau(x); \quad \Phi^{(2)}(x,0) = \tau(x), \quad \Phi_s^{(2)}(x,0) = 0.$$

Пусть $\tau(x) \in C^\infty$ на всей гиперплоскости $\mathcal{H}_n(-\infty < x < \infty)$, а X и $L_s^{(\alpha)}$ допускают разложение функции $\Phi(x, s; b)$ в операторный ряд Ли-Тейлора-Дельсарта (ЛТД) [1]-[4] :

(1.3) $$\Phi(x, s; b) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)\, s^{\alpha n}(X - b^2)^n \tau(x),$$

где $B_0(s) \equiv 1$, а $B_n(s)$ определяются однозначно из (1.1) и (1.2). Особого внимания заслуживают те $L_s^{(\alpha)}$, для которых (1.3) может быть эффективно обращен относительно $\tau(x)$. Например, при $\alpha = 1$ для $L_s^{(1)} = D_s = \dfrac{\partial}{\partial s}$ получаем $(\Phi = w)$:

(1.4a) $\tau(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}s^m(X-b^2)^m w(x,s;b)$,

а если $\alpha=2$, $L_s^{(2)}=D_s^2$, то находим $(\Phi=z)$:

(1.4b) $\tau(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}E_{2m}s^{2m}(X-b^2)^m z(x,s;b)$,

где E_m - числа Эйлера.

В случае $\alpha=2$ простые обращения дает также оператор Бесселя $L_s^{(2)}=D_s^{(2)}+\frac{a}{s}D_s$:

(1.5a) $\tau(x)=\sum_{m=0}^{\infty}q_m(\nu)s^{2m}(X-b^2)^m z(x,s;a+2m,b)$,

(1.5b) $\tau(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\bar{q}_m(\nu)s^{2m}(X-b^2)^m z(x,s;a+4m,b)$.

Здесь $\nu=\beta-\frac{1}{2}$, $a=2\beta\geq 0$, а $q_m(\nu)$ и $\bar{q}_m(\nu)$ указаны в [5]. В этом случае можно обратить (1.3) и в рядах ЛТД вида (1.4) [6],[7]. Опираясь на (1.4a) и (1.5), приходим к следующим результатам:

1. Пусть $\alpha=2$, $A_0=\bar{A}_0=1$, а A_m и $\bar{A}_m$ $(m=1,2,\dots)$ связаны с B_n равенствами:

(1.6a) $A_m(s)=q_m(\nu)\sum_{n=0}^{m}(-m)_n(\nu+1)_n\,2^{2n}B_n(s)$,

(1.6b) $\bar{A}_m(s)=\bar{q}_m(\nu)\sum_{n=0}^{m}(-m)_n(\nu+m)_n\,2^{2n}B_n(s)$.

Тогда имеют место разложения:

(1.7a) $\Phi(x,s;b)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m(s)s^{2m}(X-b^2)^m z(x,s;a+2m,b)$,

(1.7b) $\Phi(x,s;b)=\sum_{m=0}^{\infty}\bar{A}_m(s)s^{2m}(X-b^2)^m z(x,s;a+4m,b)$.

Наоборот, решив (1.6) относительно $B_n(s)$, придем к сходным формулам, необходимым для обратного перехода от (1.7) к (1.3).

2. С помощью рекуррентного соотношения

$$(1.8)\quad s^{2m}(X-b^2)^m z(x,s;a+4m,b)=\sum_{n=0}^{m}\gamma_{m,n}\, z(x,s;a+2n,b),$$

где $n!(\nu+1)_n\gamma_{m,n}=2^{2m}(-m)_n(\nu+1)_{2m}(\nu+m)_n$, можно трансформировать (1.7) в базисный ряд другого типа

$$(1.9)\quad \Phi(x,s;b)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n(s)z(x,s;a+2n,b),\quad \mathcal{D}_n(s)=\sum_{m=n}^{\infty}\gamma_{m,n}\bar{A}_m(s),$$

который в отличие от (1.7а) не требует бесконечной дифференцируемости базиса, поскольку на этот раз $z(a+2n)$ не подвергается воздействию оператора $(X-b^2)^n$. Обратив (1.8), придем к еще одной конечной сумме, связывающей базисы рядов (1.9) и (1.7б):

$$(1.10)\quad z(x,s;a+2n,b)=\sum_{m=0}^{n}\delta_{m,n}s^{2m}(X-b^2)^m z(x,s;a+4m,b),$$

где $(\nu+n+1)_m\delta_{m,n}=(-1)^m(-n)_m\bar{q}_m(\nu)$. Эта формула дает возможность возвратиться от (1.9) к (1.7) [при подстановке (1.10) в (1.9) возникает (1.7) с коэффициентами $\bar{A}_m(s)=$ $=\sum_{n=m}^{\infty}\delta_{m,n}\mathcal{D}_n(s)$].

3. Заслуживает внимания также базис $\{\zeta(a+\alpha n)\}$, порожденный начальной проблемой с итерированным оператором $X^2[\zeta]=X[X\zeta]$:

$$(1.11)\quad X^2\zeta=\zeta_{ss}+\frac{a}{s}\zeta_s,\quad \zeta(x,0)=\tau(x),\quad \zeta_s(x,0)=0.$$

Пусть $F(x,s)=\Phi(x,\sqrt{s};0)$, $\bar{B}_n=B_n(\sqrt{s})$, а $A_k(s)$ и $\bar{A}_k(s)$ имеют вид:

Таким образом в (1.12), сопоставляя $K[X; F]$ с задачей $K[X^2; \zeta]$, мы "возводим оператор X в квадрат", а в (1.13), (1.14), наоборот, совершается переход от $K[X^2; \Psi]$ к проблеме $K[X; \varkappa]$, и тем самым "извлекается квадратный корень из X^2".

4. Заменим в $\varkappa(x, s; a, b)$ и $\zeta(x, s; a)$ из (1.11) s, a на $2\sqrt{\varepsilon s}$, $2\varepsilon - 1$, ($\varepsilon = const > 1/2$), и перейдем к пределу при $\varepsilon \to \infty$, что дает

(1.16) $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \varkappa(x, 2\sqrt{\varepsilon s}; 2\varepsilon-1, b) = w(x, s; b)$;

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \zeta(x, 2\sqrt{\varepsilon s}; 2\varepsilon - 1) = \varphi(x, s),$$

где $\varphi(x, s)$ - решение проблемы Коши $X^2\varphi = \varphi_s$, $\varphi(x, 0) = \tau(x)$. Построим соответствующие (1.16) конфлюэнтные случаи формул (1.7), (1.12), (1.14). С этой целью перейдем с помощью (1.4а) от рядов ЛТД (1.3), (1.13) к разложениям по базисам $\{(X-b^2)^m w\}$ и $\{X^m \varphi\}$. Тогда получим

(1.17 a) $\Phi(x, s; b) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n(s) s^n (X - b^2)^n \tau(x) =$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{A}_m(s) s^m (X - b^2)^m w(x, s; b),$$

(1.17b) $\widetilde{A}_0 = B_0 \equiv 1, m!\, \widetilde{A}_m(s) = (-1)^m \sum\limits_{n=0}^{m} (-m)_n B_n(s)$, $(m = 1, 2, \dots)$,

а также два равенства, преобразующие X в X^2 и наоборот X^2 в X:

(1.18a) $F(x, s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n(s) s^n X^n \tau(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \widetilde{A}_k(s) s^k X^k \varphi(x, s^2)$,

(1.18b) $\Psi(x, s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n(s) s^{2n} X^{2n} \tau(x) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{A}}_k(s) s^k X^k w(x, s; 0),$$

(1.18c) $\widetilde{A}_k = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m}{m!} B_{k-2m}, \quad \overset{\approx}{A}_k = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=0}^{[k/2]} (-k)_{2n} B_n$.

Здесь в основу (1.17) и (1.18) положены решения $w(x,s;b)$, $\varphi(x,s)$ проблем Коши с оператором первого порядка $L_s^{(1)} = D_s$, которые зависят от значений $\tau(x)$ на всей гиперплоскости $s = 0$.

5. Если ограничиться в (1.3) конечным числом членов и записать $\Phi(x,s;b)$ в виде

(1.19a) $\Phi(x,s;b) = \sum_{n=0}^{m-1} B_n(s) s^{2n} (X-b^2)^n \tau(x) + R_m$,

то по формулам (1.6a),(1.7a) можно преобразовать R_m в базисный ряд:

(1.19b) $R_m = \sum_{k=m}^{\infty} A_k(s) s^{2k} (X-b^2)^k z(x,s;a+2k,b)$

$$A_k = 2^{2m}(-k)_m(\nu+1)_m g_k(\nu) \sum_{n=0}^{k-m} (m-k)_n (\nu+m+1)_n 2^{2n} B_{m+n}.$$

Наоборот, остаток $\overline{R}_m$ базисных рядов (1.7),(1.9),(1.12) (1.14),(1.18) можно перевести в операторный ряд ЛТД вида (1.3). В случае (1.9) полученные таким путем смешанные операторно-базисные представления типа (1.19) содержат $(X-b^2)^k$ только при $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, и поэтому в отличие от (1.3) не требуют бесконечной дифференцируемости функции $\tau(x)$.

§ 2. Примеры применения формул перехода § 1.

Перечислим кратко некоторые применения результатов § 1.

1. Для сингулярной неоднородной задачи Коши

(2.1) $Xu = u_{ss} + \frac{a}{s} u_s + (b^2 + \frac{c}{s^2}) u - \frac{c}{s^2} \tau(x)$;

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_s(x,0) = 0$$

разрешающий оператор (1.3) имеет вид

(2.2) $u(x,s;a,b,c) = {}_1F_2\left[1, p+1, q+1; \frac{s^2}{4}(X-b^2)\right]\tau(x)$,

где p и q – корни уравнения $\rho^2-\nu\rho+\frac{c}{4}=0$. В однородном случае $c=0$:

(2.3) $\varkappa(x,s,a,b) = {}_0F_1\left[\nu+1; \frac{s^2}{4}(X-b^2)\right]\tau(x)$.

Заменив в (2.1) s, a, c на $2\sqrt{\varepsilon s}, 2\varepsilon-1, 4c\varepsilon$, получим при $\varepsilon \to \infty$:

(2.4a) $Xv = v_s + \left(b^2+\frac{c}{s}\right)v - \frac{c}{s}\tau(x), \quad v(x,0)=\tau(x)$,

(2.4b) $v(x,s;b,c)=\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} u(x,2\sqrt{\varepsilon s}; 2\varepsilon-1, b, 4c\varepsilon)$,

а конфлюируя (2.2) по правилу (2.4b) найдем

(2.5) $v(x,s,b,c) = {}_1F_1\left[1, c+1; s(X-b^2)\right]\tau(x)$.

Если положить далее $b=\sqrt{b_1^2-b_2^2}$ и воспользоваться формулой

(2.6a) $\Phi(x,s;\sqrt{b_1^2-b_2^2}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n(s)\, s^{\alpha n}(X-b_1^2)^n\tau(x)$,

(2.6b) $\bar{B}_n(s) = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!}(b_2 s)^{\alpha k} B_{n+k}(s)$,

то можно перейти от (1.3) к более общему ряду ЛТД (2.6a) по степеням оператора $X-b_1^2$. Например, из (2.2) и (2.6) следует

(2.7a) $u(x,s;a,\sqrt{b_1^2-b_2^2},c) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n(s)\, s^{2n}(X-b_1^2)^n \tau(x)$

(2.7b) $2^{2n}(p+1)_n(q+1)_n \tilde{B}_n = {}_1F_2\left(n+1; p+n+1, q+n+1; \frac{1}{4} b_2^2 s^2\right)$,

В функциях Гумберта выражаются и коэффициенты ряда:

$$(2.12a)\quad v(x,\lambda s;\sqrt{b_1^2-b_2^2},c)=\sum_{m=0}^{\infty} A_m s^m (X-b_1^2)^m w(x,s;b_1),$$

$$(2.12b)\quad m!\,A_m=(-1)^m \Phi_1(1,-m;c+1;\lambda,b_2^2\lambda s),$$

возникающего из (1.17) и (2.8b). Стоит отметить также разложение типа (1.12b)

$$(2.13a)\quad \varkappa(x,2\sqrt{\lambda s};a_2,0)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{A}_k s^k X^k \zeta(x,s;a_1+2k),$$

$$(2.13b)\quad k!\,(\nu_2+1)_k \bar{A}_k=\lambda^k\,{}_4F_1\left(-\frac{k}{2},\frac{1-k}{2},-\frac{\nu_2+k}{2},\frac{1-\nu_2-k}{2};1-\nu_1-k;\frac{4}{\lambda^2}\right)$$

и его обращение вида (1.14a) $[\,|\lambda|<1/8\,]$:

$$(2.14a)\quad \zeta(x,\lambda s;a_2,0)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k s^k X^k \varkappa(x,\sqrt{s};a_1+2k,0),$$

$$(2.14b)\quad A_k=q_k(\nu_1)\,{}_4F_1\left(-\frac{k}{2},\frac{1-k}{2},\frac{1+a_1}{4},\frac{3+a_1}{4};\nu_2+1;2^6\lambda^2\right).$$

При $X=D_X$ пара взаимно-обратных разложений (2.13),(2.14) связывает решение $\zeta(x,s)$ корректной (в смысле Адамара) задачи Коши (1.11), с некорректно поставленной параболической начальной проблемой для $\varkappa(x,s)$ [8],[9]. Подобные связи с некорректной задачей Коши для уравнения эллиптического типа можно получить, положив $s=i\sigma$ $(i=\sqrt{-1})$ в формулах (1.4),(1.5)-(1.9),(2.1)-(2.3),(2.7) и (2.8).

2. Выделяя те из упомянутых 25-ти разложений, которые содержат гипергеометрические полиномы ${}_2F_0, {}_2F_1, {}_2F_2, {}_3F_1, {}_3F_2, {}_4F_0, {}_4F_1, \ldots$, следует особо остановиться на случаях, когда их коэффициенты A_m, $\bar{A}_m$, $\tilde{A}_m$, $\tilde{\tilde{A}}_m$ образуют ортогональное семейство функций от λ на некотором интервале $[\,\lambda_1,\lambda_2\,]$. Следуя [10],

можно строго определить число всех таких возможных ортогональных базисных разложений, связанных с $u, v, z, \zeta, w, \varphi$. Например, полиномы Якоби $G_m(p, q; \lambda)$ и Гегенбауэра $C_m^{\nu}(\lambda)$, у которых отрезок $[\lambda_1, \lambda_2]$ конечен, содержат равенства

(2.15a) $z(x, \lambda s; a_2, b) =$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{q}_m(\nu_1) G_m(\nu_1, \nu_2+1; \lambda^2) s^{2m} (X-b^2)^m z(x, s; a_1+4m, b),$$

(2.15b) $$w(x, \lambda s; 0) = \sum_{m=0}^{\infty} [2^m (\nu)_m]^{-1} s^m C_m^{\nu}(\lambda) X^m \zeta(x, s; a+2m),$$

а многочлены Лагерра $L_n^{(\nu)}(\lambda)$ и Эрмита $H_n(\lambda)$ с бесконечным интегралом $[\lambda_1, \lambda_2]$ встречаются в формулах:

(2.16a) $$z(x, 2\sqrt{\lambda s}; a, b) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-s)^m}{(\nu+1)_m} L_m^{(\nu)}(\lambda) (X-b^2)^m w(x, s; b),$$

(2.16b) $$w(x, 2\lambda s; 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} H_m(\lambda) X^m \varphi(x, s^2).$$

Наконец, существенно иными свойствами обладает разложение по многочленам Бесселя $y_m(p; z) = {}_2F_0(-m, p+m-1; -z)$ ортогональным на единичной окружности $|z| = 1$ в комплексной области z:

(2.17) $$w(x, \lambda^2 s^2; b) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{q}_m(\nu) y_m(\nu+1; -4\lambda^2) s^{2m} (X-b^2)^m z(x, s; a+ + 4m, b).$$

Следует заметить, что в (2.15) претерпевают изменения оба оператора X и L_s, в то время как в (2.16) и (2.17) меняется только один из них.

3. Выписав интегральные выражения Фурье для коэффициентов рядов (2.15), (2.16), (2.17), мы представим в форме квадратур базисы разложений (1.7), (1.9), (1.12), (1.14), (1.18), (1.19), а

затем трансформируем эти разложения в интегральные операторы преобразования, переводящие x, ζ, w в Φ, F и Ψ. Таким путем, например, при $a_2 > a_1 \geq 0$, $\beta_0 = \beta_2 - \beta_1$, $b_0 = \sqrt{b_1^2 - b_2^2}$, $4\sigma = b_0^2 s^2$, $\Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\beta_0)\mu = 2\Gamma(p_2+1)\Gamma(q_2+1)$, находим:

(2.18a) $$u(x,s;a_2,b_2,c) = \int_0^1 \lambda^{a_1}(1-\lambda^2)^{\beta_0-1} Q(\lambda,s) x(x,\lambda s;a_1,b_1)\,d\lambda,$$

где $Q = \mu\,\Xi_2[p_2, q_2, \beta_0; 1-\lambda^2, \sigma(1-\lambda^2)]$ а в случае (2.4)

(2.18b) $$v(x,s;b_2,c) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty \lambda^{\nu/2} R(\lambda,s) x(x, 2\sqrt{\lambda s}; a, b_1)\,d\lambda,$$

$$R(\lambda,s) = \int_0^\infty \xi^{\nu/2} e^{-\xi} J_\nu(2\sqrt{\lambda\xi})\,\Phi_2(1,c,c+1;b_0^2 s,\xi)\,d\xi .$$

Указанные интегральные представления Фурье базиса рядов (1.7), (1.9), (1.12), (1.14), (1.18), (1.19) позволяют одновременно свести к квадратурам их остаточный член, а также остаток R_m операторных разложений (1.3), (1.19), (2.6). Например, на этом пути получаем при $\beta_0 + m > 0$:

(2.19a) $$u(x,s;a_2,b,c) = \sum_{n=0}^{m-1} B_n s^{2n}(X-b^2)^n \tau(x) + R_m,$$

$$R_m = \int_0^1 \lambda^{a_1+2m}(1-\lambda^2)^{\beta_0+m-1} F(p_2+m, q_2+m, \beta_0+m; 1-\lambda^2) Q_m(\lambda,s)\,d\lambda,$$

(2.19b) $$2^{2m}(\beta_0)_m(\nu_1+1)_m Q_m = \mu s^{2m}(X-b^2)^m x(x,\lambda s; a_1+2m, b),$$

где β_0 и μ те же, что в (2.18a), $B_n = [2^{2n}(p_2+1)_n(q_2+1)_n]^{-1}$, а Q_m можно также писать в виде $(\beta_0)_m Q_m = \mu D^m_{\lambda^2} x(x,\lambda s; a_1, b)$.

С помощью (1.9) и (2.2) находим далее:

(2.20a) $$u(x,s;a_2,b,c) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{p_2 q_2 \Gamma(p_2+n)\Gamma(q_2+n)}{n!\,\Gamma(\nu_2+n+1)} x(x,s;a_2+2n,b) + R_m,$$

(2.20b) $$R_m = \int_0^1 \lambda^{a_1}(1-\lambda^2)^{\beta_0+m-1}\bar{Q}_m(\lambda) x(x,\lambda s; a_1, b)\,d\lambda,$$

$$(\beta_0)_m m!\,\overline{Q}_m = \mu(n_2)_m(q_2)_m\,{}_3F_2(1, n_2+m, q_2+m; \beta_0+m, m+1; 1-\lambda^2).$$

Если $|x(x,s;a_1,b)| \le M$ при $(x,s) \in G$, то из (2.20) вытекает оценка

(2.21) $$|R_m| \le M\,|\mathcal{D}_m|\,{}_3F_2(1, n_2+m, q_2+m; m+1, \nu_2+m+1; 1),$$

где ${}_3F_2$ – ряд вида Заальшютца. В силу (2.21) $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$ и таким образом $u(x,s;a,b,c)$ можно с любой степенью точности аппроксимировать конечным отрезком ряда (1.9).

4. Особый интерес представляют найденные равенства в тех случаях, когда в них решение одной из двух сопоставляемых задач Коши является известной функцией от $\tau(x)$. Например, если $X = \Lambda = \sum\limits_{k=1}^{n} D_{x_k}$, то

(2.22) $$w(x,s;b) = e^{-b^2 s}\,\tau(x_1+s,\dots,x_n+s),$$

и здесь (2.11), (2.12) и (2.16а) дают разрешающие операторы для x и v, а (2.15), (2.16) и (2.17) обращают эти операторы относительно начальной функции. Так из (2.16) следует

$$x(x, 2\sqrt{\lambda s}; a, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-s)^m}{(\nu+1)_m} L_m^{(\nu)}(\lambda)\Lambda^m \tau(x_1+\lambda s,\dots,x_n+\lambda s),$$

$$\tau(x_1+2\lambda s,\dots,x_n+2\lambda s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} H_m(\lambda)\Lambda^m \varphi(x_1,\dots,x_n; s^2),$$

и по формулам Фурье для коэффицентов этих ортогональных рядов находим:

$$s^m\Lambda^m\tau(x+\lambda s) = \frac{(-1)^m m!}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^{\infty}\lambda^{\nu} e^{-\lambda} L_m^{(\nu)}(\lambda)\,x(x, 2\sqrt{\lambda s}; a, 0)\,d\lambda,$$

$$\sqrt{\pi}(2\sqrt{s})^m\Lambda^m\varphi(x,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\tau(x_1+2\lambda\sqrt{s},\dots,x_n+2\lambda\sqrt{s})H_m(\lambda)e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

где $x+\lambda s = (x_1+\lambda s,\dots,x_n+\lambda s)$. Если X – лапласиан $X = \Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} D_{x_k}^2$, а $a = n-1$, $b = 0$, то решение

$z(x,s;n-1,0)$ эквивалентно среднему значению $M[x,s;\tau(x)]$ функции $\tau(x)$ на сфере радиуса s с центром в точке $x(x_1,\dots,x_n)$, поэтому при таком выборе X и параметров a_k, b_k $(k=1,2)$, в левой или правой части равенств (2.10a), (2.11a), (2.14a), (2.15a), (2.16a), (2.18a), (2.19) вместо z появятся средние M. Например, полагая в (2.10a) $b_2=b_1=b$, $a_2=n-1$, $a_1=a$, $X=\Delta$, получим:

$$M[x,\lambda s;\tau(x)]=\sum_{m=0}^{\infty}A_m(s)s^{2m}(\Delta-b^2)^m z(x,s;a+2m,b);$$

$$A_m(s)=q_m(\nu)\,\Xi_2(-m,\nu+1,\tfrac{n}{2};\lambda^2,-\tfrac{1}{4}b^2\lambda^2 s^2),$$

а из (2.11a), когда $a=n-1$, $b_1=b_2=b$, $X=\Delta$, следует

$$M[x,2\sqrt{\lambda s};\tau(x)]=\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{A}_m s^m(\Delta-b^2)^m w(x,s;b),$$

где $m!\,\tilde{A}_m=(-1)^m\,\Phi_3(-m,\tfrac{n}{2};\lambda,b^2\lambda s)$. Наконец (2.14a) при $a_1=n-1$, $a_2=a$, $X=\Delta$ дает решение итерированной задачи Коши (1.11):

$$\xi(x,\lambda s;a,0)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(\lambda)s^k D_s^k M[x,\sqrt{s};\tau(x)],$$

$$k!\,A_k(\lambda)=(-1)^k\,{}_4F_1(-\tfrac{k}{2},\tfrac{1-k}{2},\tfrac{n}{4},\tfrac{n+2}{4};\nu+1,2^6\lambda^2).$$

Следует назвать также более общий случай, когда X является n-мерной суммой операторов Бесселя $X=\sum_{k=1}^{n}(D^2_{x_k}+\frac{a_k}{x_k}D_{x_k})$.

Здесь, подставляя в (2.20a) значение $z(x,s;a,b)$ мы придем к эксплицитному решению соответствующей неоднородной проблемы Коши (2.1).

Л и т е р а т у р а

[1] М.Н. ОЛЕВСКИЙ: ДАН СССР, 86(1952), № 4, 657-660.

[2] W. GRÖBNER: Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. Berlin, 1960.

[3] А.Н. ФИЛАТОВ: Обобщенные ряды Ли и их приложения. Ташкент, 1963.

[4] W. GRÖBNER und W. WATZLAWEK: Monatshefte für Mathematik, 69(1965),No 2,136-145.
[5] М.В. КАПИЛЕВИЧ: ДАН СССР,175(1967),№ 2,28-31.
[6] E. BRIXY: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,19(1939),No 6,372.
[7] L. CARLITZ: Proceedings of the American Mathematical Society,15(1964),No 2,318-320.
[8] М.М. ЛАВРЕНТЬЕВ: О решении некоторых некорректно поставленных задач.Новосибирск,1963.
[9] F. GINSBERG: Mathematics of Computation,17,1963,No 83, 257-269.
[10] A.Al-Salam NADHLA: Duke Mathematical Journal,33(1966), No 1,109-121.

(Received September 21,1967)