Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

V. I. Širokov

Принцип выбора для одного класса разрывных функций

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 1, 13--25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105151

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9,1 (1968)

ПРИНЦИП ВЫБОРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В.И. ШИРОКОВ (V. I. ŠIROKOV), Арзамас

В классическом анализе принцип выбора доказывается для множества функций, определенных на некотором сегменте и равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на этом сегменте. Ниже доказывается принцип выбора для одного класса разрывных функций.

Теорема. Для того чтобы из любого бесконечного подмножества семейства равномерно ограниченных функций $\{f(x)\}$, определенных на $[a, b]$ (которые не предполагаются непрерывными) можно было выделить последовательность функций, равномерно сходящуюся к непрерывной предельной функции на $[a, b]$ необходимо и достаточно чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого бесконечного подмножества $A \subseteq \{f(x)\}$ существовали такие $\delta > 0$ и бесконечное подмножество $A'_\varepsilon \subseteq A$ чтобы для любых $f_i(x), f_j(x) \in A'_\varepsilon$ и любых $x_1, x_2 \in [a, b]$, для которых

$$|x_1 - x_2| \leq \delta$$

выполнялось неравенство

$$|f_i(x_1) - f_j(x_2)| \leq \varepsilon .$$

Доказательство. Условие достаточно. Из произвольного бесконечного подмножества A семейства равноограниченных функций $\{f(x)\}$ выделим последовательность $(f_n(x))$, сходящуюся к некоторой функции $f(x)$ в рациональных точках $[a, b]$. Пуст, далее $0 < \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_m > \ldots$ и

$\varepsilon_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. В силу условия теоремы для $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$ и последовательность $(f_n^{(1)}(x))$, выделенная из $(f_n(x))$, что для любых $f_i^{(1)}(x), f_j^{(1)}(x) \in (f_n^{(1)}(x))$

$$|f_i^{(1)}(x_1) - f_j^{(1)}(x_2)| \leq \varepsilon \text{, при } |x_1 - x_2| \leq \delta_1 \quad x_1, x_2 \in [a, b].$$

Точно также для $\varepsilon_2 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$ и последовательность $\{f_n^{(2)}(x)\}$, выделенная из $\{f_n^{(1)}(x)\}$, что для любых $f_i^{(2)}(x),\ f_j^{(2)}(x) \in \{f_n^{(2)}(x)\}$

$$|f_i^{(2)}(x_1) - f_j^{(2)}(x_2)| \leq \varepsilon_2 \quad \text{при } |x_1 - x_2| \leq \delta_2, x_1, x_2 \in [a, b].$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим счетное множество последовательностей $\{f_n^{(k)}(x)\}, k = 1, 2, \dots$, таких, что $\{f_n^{(k)}(x)\}$ является подпоследовательностью $\{f_n^{(k-1)}(x)\}$ и

$$|f_i^{(k)}(x_1) - f_j^{(k)}(x_2)| \leq \varepsilon_k$$

для всех $f_i^{(k)}(x), f_j^{(k)}(x) \in \{f_n^{(k)}(x)\}$ и всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ для которых $|x_1 - x_2| \leq \delta_k$. Построим бесконечную матрицу

(A)
$$\begin{array}{|l}
f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x), \dots,\ f_n^{(1)}(x), \dots \\
f_1^{(2)}(x),\ f_2^{(2)}(x), \dots,\ f_n^{(2)}(x), \dots \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\
f_1^{(k)}(x),\ f_2^{(k)}(x), \dots,\ f_n^{(k)}(x), \dots \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots ,
\end{array}$$

расположим функции этой матрицы ввиде некоторой простой последовательности $(f_n^*(x))$ $(*)$ и покажем, что из последовательности $(*)$, сходящейся на множестве рациональных точек сегмента $[a, b]$, можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность. Действительно, для любого

$\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $M(\varepsilon)$, что при $m > M(\varepsilon)$ будет $\varepsilon_m < \varepsilon$. Более того в силу самого построения матрицы (А) при $k \geq m$

$$|f_i^{(k)}(x_1) - f_j^{(k)}(x_2)| \leq \varepsilon$$

для всех рациональных точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, для которых $|x_1 - x_2| \leq \delta_k$ и всех $f_i^{(k)}(x), f_j^{(k)}(x) \in \{f_n^{(k)}(x)\}$.

В частности при $x_1 = x_2 = x$ последнее неравенство принимает вид

$$|f_i^{(k)}(x) - f_j^{(k)}(x)| \leq \varepsilon \quad .$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при закрепленных k и i и $j \to \infty$, получим

$$|f_i^{(k)}(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad (**)$$

Неравенство $(**)$ справедливо во всех рациональных точках сегмента $[a, b]$ для $k \geq m$ и всех i. Выберем из множества функций $\{f_i^{(k)}(x)\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ по одной прикаждом k причем так, чтобы большему k отвечало большее i, что всегда возможно. Пусть это будет, например: последовательность

$$f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(2)}(x), \dots,\ f_n^{(n)}(x), \dots$$

Эта последовательность, как видно из неравенства $(**)$ и будет равномерно сходящейся во всех рациональных точках $[a, b]$. Покажем, наконец, что последовательность $\{f_n^{(n)}(x)\}$ сходится равномерно всюду на $[a, b]$ к некоторой конечной функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$. Действительно, по определению равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что

(1) $$|f_n^{(n)}(x) - f_m^{(m)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для любых $n, m > \mathcal{N}(\varepsilon)$ и всех $x \in \Sigma$, где Σ обозначает множество рациональных точек сегмента $[a, b]$. Пусть теперь x' - произвольно фиксированная точка сегмента $[a, b]$. В силу условия теоремы и самого построения последовательности $(f_n^{(n)}(x))$ для того же $\varepsilon > 0$ существует такое $\mathcal{N}^*(\varepsilon)$, что для любого $n > \mathcal{N}^*(\varepsilon)$ существует такое $\delta^{(n)} > 0$, что

(2) $\quad |f_n^{(n)}(x) - f_n^{(n)}(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad$ при $|x - x'| \leq \delta^{(n)}$

Тогда для любых $n, m > \mathcal{M}(\varepsilon) = \max\{\mathcal{N}(\varepsilon), \mathcal{N}^*(\varepsilon)\}$

(3) $\quad |f_n^{(n)}(x') - f_n^{(n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

(4) $\quad |f_m^{(m)}(x') - f_m^{(m)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

при $|x' - x| \leq \delta^{(n,m)} = \min\{\delta^{(n)}, \delta^{(m)}\}$. В силу плотности множества рациональных точек на $[a, b]$ существует точка $x_\Sigma^{(n,m)} \in \Sigma$ такая, что $|x_\Sigma^{(n,m)} - x'| < \delta^{(n,m)}$ (5).

Ввиду(1),(3),(4),(5) имеем

$$|f_n^{(n)}(x') - f_m^{(m)}(x')| \leq |f_n^{(n)}(x') - f_n^{(n)}(x_\Sigma^{(n,m)})| +$$
$$+ |f_n^{(n)}(x_\Sigma^{(n,m)}) - f_m^{(m)}(x_\Sigma^{(n,m)})| + |f_m^{(m)}(x_\Sigma^{(n,m)}) - f_m^{(m)}(x')| < \varepsilon$$

для любых $n, m > \mathcal{M}(\varepsilon)$, а это и значит, что числовая последовательность $(f_n^{(n)}(x'))$ сходится к конечному пределу. Т.к. x' выбрано произвольно из $[a, b]$ и $\mathcal{M}(\varepsilon)$ не зависит от x, то последовательность $(f_n^{(n)}(x))$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой предельной функции $f(x)$. Теперь уже нетрудно доказать, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Условие необходимо. Пусть последовательность $(f_n(x))$, выделенная из произвольного подмножества $A \subset \{f(x)\}$, сходится равномерно на $[a,b]$ к непрерывной на $[a,b]$ предельной функции $f(x)$. Можно доказать, что для того чтобы сходящаяся на ограниченном (не обязательно замкнутом) множестве $\mathcal{X} \subset R^n$ последовательность функций $(f_n(x))$ сходилась равномерно на $\mathcal{X}$ к равномерно непрерывной на $\mathcal{X}$ предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы

$$(1') \qquad \lim_{\substack{\sigma \to 0 \\ n \to \infty}} \omega(f_n; \mathcal{X}; \sigma) = 0 ,$$

где $\omega(f_n; \mathcal{X}; \sigma) = \sup\limits_{|x'-x''| \le \sigma,\ x', x'' \in \mathcal{X}} \{ |f_n(x') - f_n(x'')| \}$.

Из (1') следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\mathcal{N}(\varepsilon)$ и $\sigma(\varepsilon) > 0$, что при $n > \mathcal{N}(\varepsilon)$ и $t \le \sigma(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$(2') \qquad |f_n(x') - f_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } |x' - x''| \le t ,$$

а из определения равномерной сходимости для того же $\varepsilon > 0$ существует такое $\mathcal{M}(\varepsilon)$, что при $n, m > \mathcal{M}(\varepsilon)$

$$(3') \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех } x \in [a, b] .$$

Тогда ввиду (2') и (3') для $|x' - x''| \le t$ и $n, m >$ $> \mathcal{P}(\varepsilon) = \max\{\mathcal{N}(\varepsilon), \mathcal{M}(\varepsilon)\}$ имеем

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \le |f_n(x') - f_m(x')| + |f_m(x') - f_m(x'')| < \varepsilon .$$

Т.о. для произвольного $\varepsilon > 0$ и любого бесконечного подмножества $\mathcal{A} \subseteq \{f(x)\}$ существуют такие $\sigma > 0$ и бесконечное подмножество $\{f_n(x)\}_{n > \mathcal{P}(\varepsilon)} \subset \mathcal{A}$, что для любых $f_i(x), f_j(x) \in \{f_n(x)\}_{n > \mathcal{P}(\varepsilon)}$ и любых $x_1, x_2 \in [a, b]$, для которых $|x_1 - x_2| < \sigma$, выполняется неравенство

$$|f_i(x_1) - f_j(x_2)| < \varepsilon .$$

Этим доказана необходимость условий. Для того чтобы показать, что сформулированная теорема действительно обобщает принцип выбора, рассматриваемый в классическом анализе, следует еще привести пример семейства (разрывных) функций, удовлетворяющих всем условиям этой теоремы. Построим пример такого семейства.

Пусть $\{f(x)\}$ - семейство равномерных на $[a, b]$ [1] функций и $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \to \infty$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f_\beta(x) + \varepsilon_n & \text{для рациональных точек } [a, b], \\ f_\beta(x) - \varepsilon_n & \text{для рациональных точек } [a, b], \end{cases}$$

где $f_\beta(x)$ - любая функция из семейства $\{f(x)\}$ и рассмотрим семейство функций $\{f_n(x)\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x', x'' \in [a, b]$ для которых $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ $|f_\beta(x') - f_\beta(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через x_r - рационаллные торки сегмента $[a, b]$ и через x_* - иррациональные точки $[a, b]$, тогда

$$|f_n(x_r) - f_n(x_*)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon_n \quad \text{для } |x_r - x_*| < \delta(\varepsilon) \quad (1).$$

Возьмем $N(\varepsilon)$, такое, чтобы при $n > N(\varepsilon)$ выполнялось неравенство: $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{4}$ $(*)$. Ввиду (1)

$$|f_n(x_r) - f_n(x_*)| < \varepsilon \quad \text{для } |x_r - x_*| < \delta(\varepsilon) \text{ и } n > N(\varepsilon).$$

Т.о. если $A = \{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$, то

$$A'_\varepsilon = \{f_n(x)\}_{n \geq N(\varepsilon)} .$$

Для функций $f_i(x)$ и $f_j(x)$ при $i \neq j$ вопрос исчерпывается аналогично. Пусть теперь $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$. Для этого $\bar{\varepsilon} > 0$ существует такое $\delta(\bar{\varepsilon}) > 0$, что

$$|f_\alpha(x') - f_\beta(x'')| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \quad \text{при } |x' - x''| < \delta(\bar{\varepsilon}) .$$

Тогда

$$|f_n(x_k) - f_n(x_*)| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + 2\varepsilon_n \quad \text{при } |x_k - x_*| < \delta(\bar{\varepsilon}) .$$

Существует такое $\mathcal{N}(\varepsilon)$, что при $n > \mathcal{N}(\bar{\varepsilon})$ $\varepsilon_n < \frac{\bar{\varepsilon}}{4}$ $(**)$; для этих $n > \mathcal{N}(\bar{\varepsilon})$

$f_n(x_k) - f_n(x_*)| < \bar{\varepsilon}$ при $|x_k - x_*| < \delta(\bar{\varepsilon})$ и $n > \mathcal{N}(\bar{\varepsilon})$, и т.к. $\bar{\varepsilon} < \varepsilon$ и $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \to \infty$, то беря наименьшие из возможных номеров $\mathcal{N}(\varepsilon)$ и $\mathcal{N}(\bar{\varepsilon})$ для осуществления неравенств $(*)$ и $(**)$, будем иметь : $\mathcal{N}(\bar{\varepsilon}) > \mathcal{N}(\varepsilon)$. Следовательно

$$A'_{\bar{\varepsilon}} \subset A'_{\varepsilon} .$$

Для $f_j(x)$ и $f_i(x)$ при $i \neq j$ вопрос исчерпывается аналогично. Этим все доказано. Заметим, что вторая часть теоремы - необходимость условия имеет место и без предположения равномерной ограниченности семейства.

Доказаннаы теорема дает признак компактности в пространстве $M[a,b]$.

Т.к. рассматриваемое в теореме множество $\{f(x)\}$ содержит в себе в качестве подмножества любое конечное число классов $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, 2, \dots, s)$ равнонепрерывных на $[a,b]$ функций [1] и функции каждого из этих классов равномерно ограничены на $[a,b]$ то доказанная теорема имеет место для множества $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{K}_i$.

Доказанная теорема обобщается на случай отображений компактных множеств в компакты.

Пусть $\{f(x)\}$ - семейство отображений компактного множества $\mathcal{X}$ (компакта $\mathcal{X}^*$), лежащего в произвольном метрическом пространстве $\mathcal{X}^*$, с метрикой $d_{\mathcal{X}}$, в компактное пространство $\mathcal{Y}$ с метрикой $d_{\mathcal{Y}}$. Имеет место

<u>Теорема</u>. Для того чтобы из любого бесконечного подмножества семейства отображений $\{f(x)\}$ компактного множества $\mathcal{X}$ (компакта $\mathcal{X}^*$), лежащего в метрическом пространстве $\mathcal{X}^*$, в компакт $\mathcal{Y}$ (которые не предполагаются непрерывными), можно было выделить последовательность отображений, равномерно сходящуюся к непрерывному отображению на $\mathcal{X}$, необходимо и достаточно чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого бесконечного подмножества $\mathcal{A} \subseteq \{f(x)\}$ существовали такие $\delta > 0$ и бесконечное подмножество $\mathcal{A}'_\varepsilon \subseteq \mathcal{A}$, чтобы для любых $f_i(x)$, $f_j(x) \in \mathcal{A}'_\varepsilon$ и любых $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, для которых

$$d_{\mathcal{X}}(x_1, x_2) \leq \delta$$

выполнялось неравенство

$$d_{\mathcal{Y}}(f_i(x_1), f_j(x_2)) \leq \varepsilon .$$

<u>Доказательство</u>. Достаточность. Пусть сформулированное в теореме условие выполнено. Возьмем $\varepsilon_k \searrow 0\ (k \to \infty)$ и произвольное бесконечное подмножество $\mathcal{A} \subseteq \{f(x)\}$. В силу условия теоремы для $\varepsilon_1 > 0$ существуют такие $\delta_1 > 0$ и бесконечное подмножество $\mathcal{A}'_{\varepsilon_1} \subseteq \mathcal{A}$, что для любых $f_i^{(1)}(x)$, $f_j^{(1)}(x) \in \mathcal{A}'_\varepsilon$,

$$d_{\mathcal{Y}}(f_i^{(1)}(x), f_j^{(1)}(x_2)) \leq \varepsilon_1 \quad \text{при } d_{\mathcal{X}}(x_1, x_2) \leq \delta_1 \text{ и } x_1, x_2 \in \mathcal{X}.$$

Точно также для $\varepsilon_2 > 0$ существуют такие $\delta_2 > 0$ и бесконечное подмножество $\mathcal{A}'_{\varepsilon_2} \subset \mathcal{A}'_{\varepsilon_1}$, что для любых

$f_i^{(2)}(x), f_j^{(2)}(x) \in \mathcal{A}'_{\varepsilon_2}$

$$d_y(f_i^{(2)}(x_1), f_j^{(2)}(x_2)) \leq \varepsilon_2 \quad \text{при } d_x(x_1, x_2) \leq \delta_2 \text{ и } x_1, x_2 \in X .$$

Продолжая этот процесс не ограничено, получим счетное множество подмножеств

(1) $\qquad \mathcal{A}'_{\varepsilon_1} \supseteq \mathcal{A}'_{\varepsilon_2} \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{A}'_{\varepsilon_k} \supseteq \ldots$

таких, что для любых $f_i^{(k)}(x), f_j^{(k)}(x) \in \mathcal{A}'_{\varepsilon_k}$

$$d_y(f_i^{(k)}(x_1), f_j^{(k)}(x_2)) \leq \varepsilon_k \quad \text{при } d_x(x_1, x_2) \leq \delta_k ,\ x_1, x_2 \in X ,$$

где $\delta_k > 0$. Возьмем, далее, произвольно $\varepsilon > 0$. Существует такое $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ $\varepsilon_n < \varepsilon$. Выберем теперь по одному отображению в каждом $\mathcal{A}'_{\varepsilon_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, причем так, чтобы эти отображения были попарно различны, что всегда возможно в силу бесконечности подмножеств (1), и рассмотрим последовательность

$$\{ f_k(x) \} \ (k = 1, 2, \ldots), \text{где } f_k(x) \in \mathcal{A}'_{\varepsilon_k} .$$

При этом, если k_0 фиксировать, то в силу (1) и самого выбора $f_k(x)$ имеем

$$f_{n_{k_0}}(x) \in \mathcal{A}'_{\varepsilon_{k_0}},\ f_{n_{k_0}}(x) \in \mathcal{A}'_{\varepsilon_{k_0-1}}, \ldots, f_{n_{k_0}}(x) \in \mathcal{A}'_{\varepsilon_1} ,$$

так что для любых $i, j > N(\varepsilon)$

$$d_y(f_i(x_1), f_j(x_2)) < \varepsilon \quad \text{при } d_x(x_1, x_2) \leq \delta^{(i,j)} = \min(\delta_i, \delta_j) > 0 .$$

В частности для всех $i, j > N(\varepsilon)$ и любого $x \in X$

(*) $\qquad d_y(f_i(x), f_j(x)) \leq \varepsilon$

т.к. $d_x(x, x) = 0 < \delta^{(i,j)}$ (для любого $i = 1, 2, \ldots, \delta_i > 0$).
Т.о. последовательность $\{ f_k(x) \}$ – фундаментальная и в силу

полоноты пространства $\mathcal{Y}$ имеет предел $f(x) \in \mathcal{Y}$. Переходя в (ж) к пределу при $j \to \infty$ и фиксированном i, получим

$$d_y(f_i(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{при } i > \mathcal{N}(\varepsilon) .$$

Т.к. $\mathcal{N}(\varepsilon)$ не зависит от x, то сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ - равномерная. Теперь уже нетрудно доказать, что $f(x)$ - непрерывна на $\mathcal{X}$. Этим достаточность условия доказана.

Условие необходимо. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$, выведенная из произвольного подмножества $\mathcal{A} \subset \{f(x)\}$ семейства отображений $\{f(x)\}$ компактного множества X в компакт Y, сходится равномерно на X к непрерывному на X отображению $f(x)$. Можно доказать, что для того чтобы сходящаяся последовательность отображений $\{f_n(x)\}$, не обязательно непрерывных, относительно компактного множества $\mathcal{M}$, лежащего в метрическом пространстве X, в метрическое пространство Y, сходилась равномерно на $\mathcal{M}$ к равномерно непрерывному на $\mathcal{M}$ отображению $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\ast\ast) \qquad \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ n \to \infty}} \omega(f_n; \mathcal{M}; \delta) = 0 \quad ,$$

где

$$\omega(f_n; \mathcal{M}; \delta) = \sup_{\substack{d_X(x_1, x_2) \leq \delta \\ x_1, x_2 \in \mathcal{M}}} \{d_Y(f_n(x_1), f_n(x_2))\} .$$

Из (ж ж) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\mathcal{N}(\varepsilon)$ и такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $n > \mathcal{N}(\varepsilon)$ и $t \leq \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство:

$$(***)\quad d_Y(f_n(x_1), f_n(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для } d_X(x_1, x_2) \leq t \quad ,$$

а из определения равномерной сходимости следует, что для того же $\varepsilon > 0$ существует такое $\mathcal{M}(\varepsilon)$, что при $n, m > \mathcal{M}(\varepsilon)$

$$(****)\quad d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех } x \in X \quad .$$

Тогда ввиду $(***)$, $(****)$ для $d_X(x_1, x_2) \leq t$ и $n, m >$ $> \mathcal{P}(\varepsilon) = \max\{\mathcal{N}(\varepsilon), \mathcal{M}(\varepsilon)\}$ имеем

$$d_Y(f_n(x_1), f_m(x_2)) \leq d_Y(f_n(x_1), f_m(x_1)) + d_Y(f_m(x_1), f_m(x_2)) < \varepsilon .$$

Т.о. для любого $\varepsilon > 0$ и любого бесконечного подмножества $\mathcal{A} \subseteq \{f(x)\}$ существует такое $\delta > 0$ и бесконечное подмножество $\{f_n(x)\}_{n > \mathcal{P}(\varepsilon)} \subset \mathcal{A}$, что для любых $f_i(x), f_j(x) \in \{f_n(x)\}_{n > \mathcal{P}(\varepsilon)}$ и любых x_1, x_2, для которых $d_{\mathcal{X}}(x_1, x_2) < \delta$, выполняется неравенство

$$d_{\mathcal{Y}}(f_i(x_1), f_j(x_2)) < \varepsilon .$$

Этим доказана необходимость условия.

Построим пример семейства отображений, удовлетворяющих всем условиям последней теоремы.

Пусть $\{f(x)\}$ - семейство равномепрерывных [1] отображений компактного множества $\mathcal{X}$ (компакта $\mathcal{X}^*$), лежащего в метрическом пространстве $\mathcal{X}^*$, в компакт $\mathcal{Y}$ и $\varepsilon_m \searrow 0$ при $n \to \infty$. Пусть, кроме того, $\mathcal{X}$ содержит в себе всюду плотное множество Σ а $\mathcal{Y}$ - линейное нормированное пространство. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f_\beta(x) + y_0\, \varepsilon_n & \text{для } x \in \Sigma \\ f_\beta(x) - y_0\, \varepsilon_n & \text{для } x \in \mathcal{X} \setminus \Sigma \end{cases} ,$$

где $f_\beta(x)$ - любая функция из семейства $\{f(x)\}$ и y_0 -некоторый элемент из $\mathcal{Y}$, отличный от 0.

Рассмотрим семейство отображений

$$\{ f_n(x) \} .$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, для которых $d_{\mathcal{X}}(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon)$

$$\| f_\beta(x_1) - f_\beta(x_2) \| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Обозначим через x точки, принадлежащие $\mathcal{X} \setminus \Sigma$, а через $x^{(\Sigma)}$ - точки, принадлежащие Σ. Пусть n фиксировано и $x_m^{(\Sigma)} \longrightarrow x$, тогда

$$\| f_n(x_m^{(\Sigma)}) - f_n(x) \| \geq | 2 \varepsilon_n \| y_0 \| - \| f_\beta(x_m^{(\Sigma)}) - f_\beta(x) \| | \quad (*) .$$

Для $\varepsilon = \varepsilon_n \| y_0 \|$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для $d_X(x_m^{(\Sigma)}, x) < \delta(\varepsilon)$

$$\| f_\beta(x_m^{(\Sigma)}) - f_\beta(x) \| < \varepsilon_n \| y_0 \|$$

и в силу $(*)$ $\| f_n(x_m^{(\Sigma)}) - f_n(x) \| > \varepsilon_n \| y_0 \|$ для всех $x_m^{(\Sigma)}$, для которых $d_X(x_m^{(\Sigma)}, x) < \delta(\varepsilon)$. Этим доказано, что при любом n и любом x отображение семейства $\{ f_n(x) \}$ не является непрерывным. Пусть теперь $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно. Для этого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, для которых $d_X(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon)$

$$\| f_\beta(x_1) - f_\beta(x_2) \| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Имеем

(1) $\| f_n(x^{(\Sigma)}) - f_n(x) \| \leq \| f_\beta(x^{(\Sigma)}) - f_\beta(x) \| + 2 \varepsilon_n \| y_0 \|$

для $d_X(x^{(\Sigma)}, x) < \delta(\varepsilon)$. Возьмем $\mathcal{N}(\varepsilon)$, такое, чтобы при $n > \mathcal{N}(\varepsilon)$ выполнялось неравенство: $\varepsilon_n < \dfrac{\varepsilon}{4 \| y_0 \|}$ $(**)$.

Ввиду (1)

$$\| f_n(x^{(\Sigma)}) - f_n(x) \| < \varepsilon \text{ для } d_x(x^{(\Sigma)}, x) < \delta(\varepsilon) \text{ и } n > \mathcal{N}(\varepsilon).$$

Т.о. если $\mathcal{A} = \{f_n(x)\}(n=1,2,\dots)$, то

$$\mathcal{A}'_{\bar{\varepsilon}} = \{f_n(x)\}_{n \geq \mathcal{N}(\bar{\varepsilon})} .$$

Для отображений $f_i(x)$ и $f_j(x)$ при $i \neq j$ вопрос исчерпывается аналогично. Пусть теперь $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$. Для этого $\bar{\varepsilon} > 0$ существует такое $\delta(\bar{\varepsilon})$, что

$$\| f_\beta(x_1) - f_\beta(x_2) \| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \quad \text{при} \quad d_X(x_1, x_2) < \delta(\bar{\varepsilon}) .$$

Тогда

$$\| f_n(x^{(\varepsilon)}) - f_n(x) \| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + 2\varepsilon_n \|y_0\| \quad \text{при} \quad d_X(x^{(\varepsilon)}, x) < \delta(\bar{\varepsilon}) .$$

Существует $\mathcal{N}(\bar{\varepsilon})$, такое, что при $n > \mathcal{N}(\bar{\varepsilon})$ будет

$\varepsilon_n < \dfrac{\bar{\varepsilon}}{4\|y_0\|}$ (ж ж ж). Для этих $n > \mathcal{N}(\bar{\varepsilon})$

$$\| f_n(x^{(\varepsilon)}) - f_n(x) \| < \bar{\varepsilon} \quad \text{при} \quad d_X(x^{(\varepsilon)}, x) < \delta(\bar{\varepsilon}) .$$

Т.к. $\bar{\varepsilon} < \varepsilon$ и $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \to \infty$, то беря наименьшие ис возможных номеров $\mathcal{N}(\varepsilon)$ и $\mathcal{N}(\bar{\varepsilon})$ для осуществления неравенств (ж ж) и (ж ж ж), будем иметь: $\mathcal{N}(\bar{\varepsilon}) > \mathcal{N}(\varepsilon)$, следовательно $\mathcal{A}'_{\bar{\varepsilon}} \subset \mathcal{A}_\varepsilon$. Для $f_i(x)$, $f_j(x)$ при $i \neq j$ вопрос исчерпывается аналогично.

Литература

[1] РЖМат, 1964, 9В82, Москва.

(Received April 25, 1967)