A. V. Čakmazjan

О двумерной двойственно нормализованной гиперполосе в четырёхмерном аффинном пространстве A_4

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 3, 289--295

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105062

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
7,3(1966)

О ДВУМЕРНОЙ ДВОЙСТВЕННО НОРМАЛИЗОВАННОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ A_4

А.В. ЧАКМАЗЯН, Ереван

1. Нормализация поверхности X_m, заданной в аффинном пространстве, называется аффинной [1], если нормали второго рода лежат в несобственной гиперплоскости Ω этого пространства. Аффинная нормализация поверхности подчинена той нормализации пространства, которая относит всякой его точке плоскость Ω и, следовательно, внутренняя связность X_m, нормализованной аффинно, индуцируется направлением ее нормами первого рода [1].

Двумерная гиперполоса в аффинном пространстве A_4 есть совокупность двумерной (опорной) поверхности $x = x(u^1, u^2)$ и двупараметрического семейства ее главных касательных гиперплоскостей $\xi = \xi(u^1, u^2)$, т.е. гиперплоскостей, содержащих ее касательную плоскость. Координаты гиперполосы x и ξ связаны условиями:

$$x\xi = 0, \quad x_i \xi = 0, \quad \text{отсюда} \quad x\xi_i = 0 .$$

Введем в рассмотрение симметричный тензор

$$h_{ij} = -x_i \xi_j = -x_j \xi_i = x_{ij}\xi \quad (x_{ij} = \partial^2_{ij} x)$$

и назовем его <u>главным тензором гиперполосы</u>.

Гиперполоса называется регулярной [2], если характеристика ее главной касательной гиперплоскости имеет с касательной плоскостью опорной поверхности только одну общую точку.

Для того, чтобы гиперполоса была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы тензор h_{ij} не вырождался [2] или $\mathrm{Det}\,\| h_{ij} \| \neq 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только регулярные гиперполосы.

2. Допустим, что гиперполоса допускает двойственную нормализацию [3], которая является такой нормализацией ее опорной поверхности в смысле А.П. Нордена [1], при которой нормаль первого рода содержит характеристику главной касательной гиперплоскости.

Характеристика главной гиперплоскости прямая линия - определяется точкой x и y, удовлетворяющим условиям

$$y \xi = 0 , \quad y \xi_i = 0 .$$

Нормаль первого рода, 2-мерная плоскость, по условию должна содержать точки x, y, и для ее определения достаторно задать еще одну точку $\mathfrak{x}$, независимую от предыдущих, т.е. такую, что

$$\mathfrak{x} \xi \neq 0 , \quad \mathfrak{x} \xi_i \neq 0 .$$

Нормаль второго рода, прямая касательной плоскости опорной поверхности, задается двумя опорными точками

$$y_i = x_i - \ell_i x ,$$

где ℓ_i - нормализатор первого рода.

Так как нормализация аффинная, то нормаль 2-го рода лежит в несобственной гиперплоскости этого пространства.

Пусть вектор точки поверхности x находится в декартовом нормировании, так что

(1) $$x \Omega = 1 ,$$

где Ω - ковектор несобственной гиперплоскости.

Дифференцируя, находим $\partial_i x\,\Omega = 0$, откуда следует, что точки $\partial_i x$ определяют нормаль 2-го рода, которая по условию лежит в гиперплоскости Ω, а следовательно, нормирование (1) каноническое.

Таким образом, мы можем сказать, что нормали 2-го рода гармоничны поверхности X_2.

Двойственным в полученной конфигурации является точка x и гиперплоскость ξ. Точка $\mathcal{X}$ будет двойственная гиперплоскости Ξ, проходящей через точки x, $\mathcal{Y}$, y_1, y_2, а точка $\mathcal{Y}$ будет двойственна гиперплоскости Ω, проходящей через точки $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, y_1, y_2. Точкам y_i двойственны гиперплоскости

$$\eta_i = \xi_i - \lambda_i \xi .$$

Таким образом, с каждой точки двойственно нормализованной гиперполосы связывается два аффинных репера, вершинами первого и гранями второго

$$x,\ y_i,\ \mathcal{X},\ \mathcal{Y}, \qquad \xi,\ \eta_i,\ \Xi,\ \Omega .$$

Взаимные следы векторов и ковекторов, определяющих эти реперы, записаны в следующей раблице:

(2)

	ξ	η_j	Ξ	Ω
x	0	0	0	1
y_i	0	$-h_{ij}$	0	0
$\mathcal{X}$	1	0	0	0
$\mathcal{Y}$	0	0	1	0

Разлагая производные векторов, определяющих реперы, по этим же векторам, мы получим системы основных дифференциальных уравнений.

$$\partial_i x = y_i + l_i x, \ (A) \qquad \partial_i \xi = \eta_i + \lambda_i \xi \quad (A')$$

$$(3) \quad \begin{aligned} &\nabla_j y_i = l_j y_i + p_{ij} x + \tilde{a}_{ji} \mathcal{X} + a_{ji} \mathcal{Y}, \ (B) \quad \nabla_j \eta_{(i)} = \lambda_j \eta_i + \pi_{ij} \xi + \tilde{b}_{ij} \Omega + \\ &\qquad + b_{ij} \Xi \ (B') \\ &\mathcal{X}_i = m_i^l y_l + m_i x + n_i \mathcal{X} + c_i \mathcal{Y}, \ (C) \quad \partial_i \Xi = \mu_i^l \eta_l + \mu_i \xi + \\ &\qquad + \nu_i \Xi + d_i \Omega \ (C') \\ &\mathcal{Y}_i = \bar{m}_i^l y_l + \bar{m}_i x + \bar{n}_i \mathcal{X} + \bar{c}_i \mathcal{Y}, \ (\mathcal{D}) . \end{aligned}$$

Выпишем теперь все скалярные произведения таблицы (2) и будем дифференцировать каждое из них, употребляя, если это нужно, ковариантное дифференцирование и принимая во внимание основные уравнения, получим

$$\tilde{a}_{ij} - h_{ij} = 0, \ l_i = 0, \ n_i + \lambda_i = 0, \ \bar{n}_i = 0, \ \tilde{b}_{ij} - h_{ij} = 0,$$

$$\nabla_k h_{i(j)} = \lambda_k h_{ij}, \ \pi_{ij} - m_j^l h_{li} = 0, \ b_{ij} - \bar{m}_j^l h_{li} = 0, \ p_{ij} = 0, \ m_i = 0,$$

$$\bar{m}_i = 0, \ d_i = 0, \ a_{ij} - \mu_i^l h_{lj} = 0, \ c_i + \mu_i = 0, \ \bar{c}_i + \nu_i = 0.$$

В силу этих равенств основные уравнения могут быть переписаны в следующем виде

$$\begin{aligned} &\nabla_j x_i = h_{ij} \mathcal{X} + a_{ij} \mathcal{Y}, && \partial_i \xi = \eta_i + \lambda_i \xi \ , \\ &\mathcal{X}_i = m_i^l x_l - \lambda_i \mathcal{X} + c_i \mathcal{Y}, && \nabla_j \eta_{(i)} = \lambda_j \eta_i + \pi_{ji} \xi + b_{ji} \Xi + h_{ji} \Omega, \\ &\mathcal{Y}_i = \bar{m}_i^l x_l + \bar{c}_i \mathcal{Y}, && \partial \Xi = \mu_i^l \eta_l - c_i \xi - \bar{c}_i \Xi \end{aligned}$$

и дополнены следующими соотношениями

$$\mathrm{I} \quad \nabla_k h_{i(j)} = \lambda_k h_{ij}, \qquad \mathrm{II} \quad \pi_{ij} - m_j^l h_{li} = 0,$$

$$\mathrm{III} \quad a_{ij} - \mu_i^l h_{lj} = 0, \qquad \mathrm{IV} \quad b_{ij} - \bar{m}_j^l h_{li} = 0 .$$

Условия (1) показывают, что связности первого и второго рода сопряжены относительно главного тензора h_{ij} .

Условия интегрируемости основных дифференциальных уравнений гиперполосы следующие:

$$
\begin{aligned}
&R^{l}_{kji} = 2h_{i[k} m^{l}_{j]} + 2a_{i[k}\bar{m}^{l}_{j]}, \quad \pi_{[ki]} + \nabla_{[k}\lambda_{(i)]} = 0, \quad b_{[ki]} = 0, \quad h_{[ki]} = 0, \\
&\nabla_{[k} h_{j]i} - h_{i[j}\lambda_{k]} = 0, \quad P^{l}_{kji} = 2\delta^{l}_{[j}\pi_{k]i} + 2\mu^{l}_{[j} b_{k]i} - 2\nabla_{[k}\lambda_{(j)]}\delta^{l}_{i}, \\
&\nabla_{[k} a_{(i)j]} + h_{i[j} c_{k]} + a_{i[j}\bar{c}_{k]} = 0, \quad \nabla_{[k}\pi_{(j)](i)} - c_{[k} b_{j]i} = 0, \\
(4)\quad &\nabla_{[k} m^{l}_{i]} - \lambda_{[i} m^{l}_{k]} + c_{[i}\bar{m}^{l}_{k]} = 0, \quad \nabla_{[k} b_{(j)](i)} + \lambda_{[j} b_{k]i} - c_{[k} b_{j]i} = 0, \\
&m^{l}_{[i} h_{k]l} - \nabla_{[k}\lambda_{i]} = 0, \quad \nabla_{[k} h_{(j)](i)} + \lambda_{[j} h_{k]i} = 0, \\
&m^{l}_{[i} a_{k]l} - \lambda_{[i} c_{k]} + \nabla_{[k} c_{i]} + c_{[i}\bar{c}_{k]} = 0, \quad \nabla_{[k}\mu^{(l)}_{(i)]} + \mu^{l}_{[i}\lambda_{k]} - \\
&- c_{[i}\delta^{l}_{k]} - \bar{c}_{[i}\mu^{l}_{k]} = 0, \\
&\nabla_{[k}\bar{m}^{l}_{i]} + \bar{c}_{[i}\bar{m}^{l}_{k]} = 0, \quad \mu^{l}_{[i}\pi_{k]l} + \nabla_{[k} c_{(i)]} - c_{[i}\lambda_{k]} - \bar{c}_{[i} c_{k]} = 0, \\
&\qquad \bar{m}^{l}_{[i} h_{k]l} = 0, \qquad \mu^{l}_{[i} b_{k]l} - \nabla_{[k}\bar{c}_{(i)]} = 0, \\
&\bar{m}^{l}_{[i} a_{k]l} + \nabla_{[k}\bar{c}_{i]} = 0, \qquad \mu^{l}_{[i}\lambda_{k]l} = 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы можем формулировать следующую теорему.

<u>Двойственная нормализованная гиперполоса определяется с точностью до аффинного преобразования заданием аффинной связности 1го или 2го рода без кручения и тензоров</u> $h_{ij}, \pi_{ij}, a_{ij}, b_{ij}, c_i, \bar{c}_i$, <u>удовлетворяющих условиям</u> (4).

Теперь свернем сначала обе части равенства (3. B) с ξ_k, а (3.В') с x_k и вводим тензор $\tilde{h}^{ij}$, взаимный тензору h_{ij}. Получим для коэффициентов связности первого и второго рода выражения

$$
(5)\qquad \left.
\begin{aligned}
\Gamma^{m}_{ij} &= \tilde{h}^{km}\xi_k \partial_{ij} x - \tilde{h}^{km} h_{ij}\lambda_k, \\
G^{m}_{ij} &= -\tilde{h}^{km} x_k \partial_{ij}\xi - \lambda_i \delta^{m}_{j} - \lambda_j \delta^{m}_{i},
\end{aligned}
\right\}
$$

Если заменим нормали первого рода, т.е. перейдем от точки x к точке $\check{x} = x + cy + c^k y_k$, то нормализатор второго рода λ_i заменяется на $\check{\lambda}_i = \xi_i \check{x} = \lambda_i - q_i$ $(q_i = h_{ik} c^k)$.

Согласно (5), связности 1го и 2го преобразуются так:

$$\check{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \tilde{h}^{km} h_{ij} q_m, \quad \check{G}_{ij}^k = G_{ij}^k + \delta_i^k q_j + \delta_j^k q_i .$$

Таким образом, замена нормали первого рода гиперполосы сопровождается составным преобразованием $(0, q)$ ее внутренних связностей, сопряженных относительно основного тензора h_{ij}. Как известно [1], при таком преобразовании чебышевский вектор главного тензора в геометрии второго рода преобразуется так $\check{t}_i = t_i - q_i$.

Требуем чтобы $\check{t}_i = 0$. Отсюда $q_i = t_i$. В этом случае нормаль первого рода определяется единственным образом, и мы назовем ее аффинной нормалью гиперполосы по аналогии с аффинными нормалями гиперповерхности. Отсюда следует теорема.

<u>Если двумерная гиперполоса двойственно нормализована аффинной нормлаью, то пары его внутренних связностей - эквиаффинны и чебышевские.</u>

Как известно

$\nabla_{[k} h_{j]i} = 2 \gamma_{[k} h_{j]i}$, где $\gamma_k = \frac{1}{4} \partial_k \ln N - t_k$, а N - норма тензора h_{ij}. Так как в нашем случае $t_k = 0$, то последнее принимает вид $\nabla_{[k} h_{j]i} = 2 \gamma_{[k} h_{j]i}$, где $\gamma_k = \partial_k \gamma$ - градиент. Так как λ_k - градиент, то мы можем ξ пронормировать гак, чтобы $\lambda_k = 0$. Тогда мы получаем, что наша нормализация вполне гармоническая.

Эти результаты были доложены на Прибалтийской ПЙ геометрической конференции в г. Тарту в 1965 году.

Автор выражает глубокую благодарность А.П. Нордену за постановку задачи и ценные советы при ее решении,

Литература

[1] А.П. НОРДЕН: Пространства аффинной связности. ГИТЛ, М., 1950.

[2] В.В. ВАГНЕР: Тр. семинара по тензорному и векторному анализу, вып. УШ, 1950.

[3] А.В. ЧАКМАЗЯН: ДАН Арм. ССР, т.28, №4, 1959.

(Received April 28,1966)