Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

K. K. Mokrishchev

О бесконечно малых изгибаниях тора

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 3, 279--288

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105061

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

7,3 (1966)

О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ ТОРА

К.К. МОКРИЩЕВ, Ростов на Дону

В этой заметке доказывается существование поясов тора, допускающих бесконечно малые скользящие изгибания [1].

1. Зададим тор параметрическими уравнениями

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \left(a + \dfrac{\varepsilon}{ch\,u}\right)\cos v, \\ y = \left(a + \dfrac{\varepsilon}{ch\,u}\right)\sin v, \\ z = th\,u, \end{cases} \qquad \begin{array}{c} -\infty \le u \le +\infty, \\ 0 \le v < 2\pi, \end{array}$$

где a - расстояние центра образующей окружности единичного радиуса от оси вращения $0z$, $\varepsilon = +1$ для области тора положительной кривизны и $\varepsilon = -1$ для области отрицательной кривизны, значению $u = 0$ соответствуют окружности - экваторы, а $u = \pm\infty$ - параболические параллели, отделяющие область положительной кривизны от области отрицательной кривизны; линии $v = const$ - меридианы.

2. Если поверхность заданауравнением

$$\bar{x} = \bar{x}(u, v),$$

то поле $\bar{z} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ ее бесконечно малого изгибания определяется системою уравнений [2]:

$$(2)\qquad \bar{x}_u \bar{z}_u = 0, \quad \bar{x}_u \bar{z}_v + \bar{x}_v \bar{z}_u = 0, \quad \bar{x}_v \bar{z}_v = 0.$$

Для тора (1) уравнения (2) принимают вид:

$$
(3)\quad \begin{cases} \operatorname{sh} u \cos v \cdot \xi_u + \operatorname{sh} u \sin v \cdot \eta_u - \varepsilon \zeta_u = 0, \\ \operatorname{sh} u \cos v \cdot \xi_v + \operatorname{sh} u \cos v \cdot \eta_v - \varepsilon \zeta_v - \\ - \operatorname{ch} u (\varepsilon a \operatorname{ch} u + 1) \sin v \cdot \xi_u + \operatorname{ch} u (\varepsilon a \operatorname{ch} u + 1) \cos v \cdot \eta_u = 0, \\ \sin v \cdot \xi_v - \cos v \cdot \eta_v = 0. \end{cases}
$$

Вводя вспомогательную функцию $\lambda(u, v)$ с помощью уравнений

$$
(4)\qquad \xi_v = \lambda \cos v, \qquad \eta_v = \lambda \sin v
$$

и исключая отсюда и из (3) ξ, η, λ получим уравнение для определения функции $\zeta(u, v)$:

$$
(5)\qquad \begin{aligned} &(a \operatorname{ch} u + \varepsilon) \operatorname{sh} 2u \cdot \zeta_{uu} + \varepsilon \operatorname{sh} 2u \cdot \zeta_{vv} - \\ &- 4 (a \operatorname{ch} u + \varepsilon) \cdot \zeta_u = 0. \end{aligned}
$$

Так как

$$
\zeta(u, v + 2\pi) = \zeta(u, v),
$$

то решение уравнения (5) можно отыскивать в виде

$$
(6)\qquad \zeta(u, v) = \varphi(u) \sin n v,
$$

где n – натуральное число. Таким образом уравнение (5) приводит к уравнению для определения функции $\varphi(u)$

$$
(7)\qquad \begin{aligned} &(a \operatorname{ch} u + \varepsilon) \operatorname{sh} 2u \cdot \varphi''(u) - 4 (a \operatorname{ch} u + \varepsilon) \varphi'(u) - \\ &- \varepsilon n^2 \operatorname{sh} 2u \cdot \varphi(u) = 0. \end{aligned}
$$

Если найдем какое-нибудь регулярное решение уравнения (7), то по формуле (6) получим регулярное решение уравнения (5), а затем используя функцию $\lambda(u, v)$ можно найти при помощи системы (4) регулярные в соответствующей области функции $\xi(u, v)$ и $\eta(u, v)$ и, таким образом, получим регулярное решение ξ, η, ζ системы (3).

3. Во всех точках интервала $(-\infty, +\infty)$ кроме точки $u = 0$, функции

$$\frac{4}{sh\,2u}, \quad \frac{\varepsilon n^2}{a\,ch\,u+\varepsilon}$$

регулярны, а в точке $u=0$ только первая из них имеет полюс первого порядка, а вторая регулярна, поэтому, согласно теории Фукса [3], уравнение (7) имеет регулярное решение в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Будем отыскивать это решение в виде ряда

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^{p+k},$$

тогда

$$\varphi'(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (p+k) u^{p+k-1},$$

$$\varphi''(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (p+k)(p+k-1) u^{p+k-2}.$$

Учитывая, что

$$ch\,u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} u^{2k},$$

$$a\,ch\,u + \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-2} u^{2k-2}, \quad a_0 = a+\varepsilon, \quad a_{2k-2} = \frac{a}{(2k-2)!},$$

$$sh\,2u = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{2k-1} u^{2k-1}, \quad \sigma_{2k-1} = \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

находим:

$$a\,ch\,u + \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{2k-1} u^{2k-1},$$

где

$$\nu_{2k-1} = \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}(a+\varepsilon) + \frac{2^{2k-3}}{(2k-3)!\,2!}a + \dots +$$

$$+ \frac{2^3}{3!\,(2k-4)!}a + \frac{2}{(2k-2)!}a,$$

затем

$$(a\,ch\,u+\varepsilon)\,sh\,2u = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k u^{p+2k-3} + \mu_k u^{p+2k-2}),$$

при этом положено

$$\lambda_k = \nu_1 c_{2k-2}(p+2k-2)(p+2k-3) + \nu_3 c_{2k-4}(p+2k-4)(p+2k-5)+$$
$$+\ldots+\nu_{2k-1} c_0 p(p-1);$$
$$\mu_k = \nu_1 c_{2k-1}(p+2k-1)(p+2k-2) + \nu_3 c_{2k-3}(p+2k-3)(p+2k-4)+$$
$$+\ldots+\nu_{2k-1} c_1 (p+1)\cdot p\ ,$$

далее

$$(a\,\mathrm{ch}\,u+\varepsilon)\varphi'(u) = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k u^{p+2k-3} + \beta_k u^{p+2k-2})\ ,$$

где

$$\alpha_k = a_0 c_{2k-2}(p+2k-2) + a_2 c_{2k-4}(p+2k-4)+\ldots+a_{2k-2} c_0 p\ ,$$

$$\beta_k = a_0 c_{2k-1}(p+2k-1) + a_2 c_{2k-3}(p+2k-3)+\ldots+a_{2k-2} c_1 (p+1)$$

и наконец

$$\mathrm{sh}\,2u\cdot\varphi(u) = \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k u^{p+2k-1} + \delta_k u^{p+2k})\ ,$$

причем

$$\gamma_k = \sigma_1 c_{2k-2} + \sigma_3 c_{2k-4} + \ldots + \sigma_{2k-1} c_0\ ,$$
$$\delta_k = \sigma_1 c_{2k-1} + \sigma_3 c_{2k-3} + \ldots + \sigma_{2k-1} c_1\ .$$

Таким образом, уравнению (7) можно придать вид

$$(\lambda_1 - 4\alpha_1)u^{p-1} + (\mu_1 - 4\beta_1)u^p +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{k+1} - 4\alpha_{k+1} - \varepsilon n^2\gamma_k)u^{p+2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(\mu_{k+1} - 4\beta_{k+1} - \varepsilon n^2\delta_k)u^{p+2k} = 0.$$

Отсюда получаем бесконечную систему уравнений для вычисления коэффициентов c_k $(k=0,1,2,\ldots)$ ряда, представляющего искомое решение уравнения (7):

$$\lambda_1 - 4\alpha_1 = 0\ ,$$
$$\mu_1 - 4\beta_1 = 0\ ,$$
$$\lambda_{k+1} - 4\alpha_{k+1} - \varepsilon n^2\gamma_k = 0\ ,$$
$$\mu_{k+1} - 4\beta_{k+1} - \varepsilon n^2\delta_k = 0\ ,$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots)\ .$$

Первое из уравнений этой системы есть определяющее уравнение [3]

$$2(a+\varepsilon)c_0 p(p-3) = 0$$

следовательно корни определяющего уравнения

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 3,$$

как для $\varepsilon = +1$, так и для $\varepsilon = -1$. Второе уравнение системы приводит к выводу, что $c_1 = 0$. Третье - при $p = 0$ и $k = 1$ дает выражение c_2 через c_0, а четвертое - при $p = 0$ и $k = 1$ принимает вид $0 \cdot c_3 + 0 = 0$, т.е. c_3 является неопределенным, таким образом мы имеем здесь тот случай [4], когда общее решение уравнения (7) представляется в виде

(8) $$\varphi(u) = A\cdot\varphi_1(u) + B\varphi_2(u),$$

где A, B - произвольные постоянные, а

(9) $$\begin{cases} \varphi_1(u) = c_3 u^3 + c_5 u^5 + \ldots + c_{2k+1} u^{2k+1} + \ldots \\ \varphi_2(u) = c_0 + c_2 u^2 + \ldots + c_{2k} u^{2k} + \ldots \end{cases}$$

4. Рассмотрим область положительной кривизны тора: на ней $\varepsilon = +1$. Уравнение (7) здесь принимает вид

$$(a\,ch\,u + 1)\,sh\,2u\cdot\varphi''(u) - 4(a\,ch\,u + 1)\varphi'(u) - \\ - n^2 sh\,2u\cdot\varphi(u) = 0,$$

или в самосопряженной форме в интервале $(0, \infty)$

(10) $$\frac{d}{du}\left[cth^2 u\,\frac{d\varphi(u)}{du}\right] - \frac{n^2 cth^2 u}{a\,ch\,u + 1}\,\varphi(u) = 0.$$

Возьмем еще уравнение

$$\frac{d}{du}\left[\operatorname{cth}^2 u \frac{d\psi(u)}{du}\right] - n^2 \operatorname{cth}^2 u \cdot \psi(u) = 0 . \tag{11}$$

Легко проверить, что уравнение (10) удовлетворяет условиям теоремы сравнения Штурма относительно уравнения (11) на любом отрезке, принадлежащем интервалу $(0,+\infty)$ [5].

Фундаментальными решениями уравнения (11) являются функции

$$\frac{e^{nu}}{\operatorname{ch} u}(n \operatorname{sh} u - \operatorname{ch} u), \quad \frac{e^{-nu}}{\operatorname{ch} u}(n \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u),$$

его решением будет и функция

$$\frac{e^{nu}}{\operatorname{ch} u}(n \operatorname{sh} u - \operatorname{ch} u) - \frac{e^{-nu}}{\operatorname{ch} u}(n \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u),$$

которая обращается в нуль при

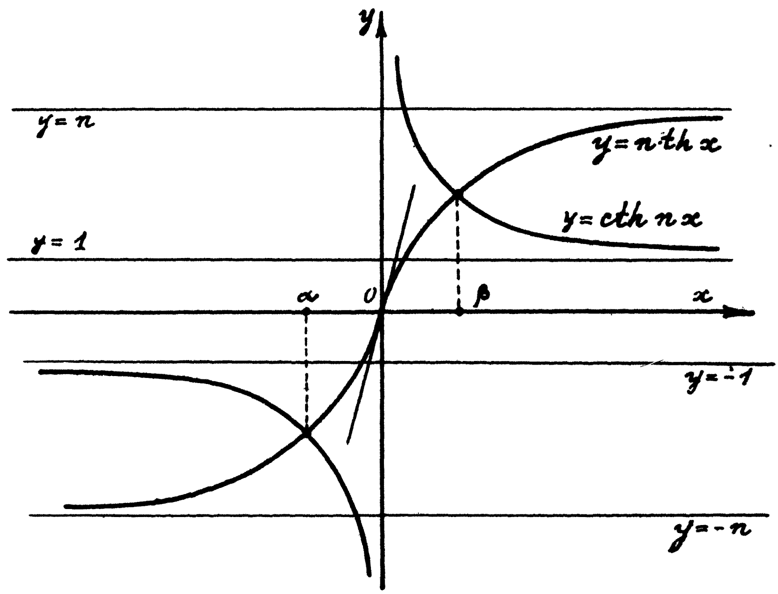
$$n \operatorname{th} u = \operatorname{cth} n u .$$

Это уравнение при любом натуральном n имеет два различных корня α, β (рис.на стр.285). Следовательно, согласно теореме сравнения Штурма, любое решение $\varphi(u)$ уравнения (10) имеет по крайней мере один нуль между α и β [5].

Пусть u_0 есть значение u такое, что

$$\varphi_1(u_0)\cdot\varphi_2(u_0) \neq 0 .$$

Возьмем то решение $\varphi(u)$ уравнения (10), которе удовлетворяет условию $\varphi(u_0)$. Это решение имеет по крайней мере один нуль $u_1 \neq u_0$, заключенный между α и β, а это означает, что справедлива



<u>Теорема 1</u>: существует бесконечное множество поясов тора, принадлежащих его области положительной кривизны, каждый из которых допускает бесконечно малые скользящие изгибания.

Примечание: используя теорему Валле-Пуссена [5] можно показать, что каждый из этих поясов содержит в себе внешний экватор тора.

Покажем, что справедлива еще

<u>Теорема 2</u>: существует по крайней мере один пояс тора положительной кривизны, симметричный относительно плоскости экватора и допускающий бесконечно малые скользящие изгибания.

Действительно, частное решение

$$\varphi_2(u) = c_0 + u(\dots), \quad c_0 \neq 0,$$

уравнения (10) тоже имеет нуль u' между α и β и такой, что $u' \neq 0$. Для симметричных относительно плоскости экватора параллелей

$$u = u' \qquad \text{и} \qquad u = -u'$$

потребуем, чтобы

$$\varphi(u') = A\varphi_1(u') + B\varphi_2(u') = 0,$$

$$\varphi(-u') = -A\varphi_1(u') + B\varphi_2(u') = 0,$$

но так как

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(u') & \varphi_2(u') \\ -\varphi_1(u') & \varphi_2(u') \end{vmatrix} = 2\varphi_1(u')\cdot\varphi_2(u') = 0,$$

то существуют A и B такие, что $AB \neq 0$, а $\varphi(u') = \varphi(-u') = 0$, что и доказывает теорему 2.

5. Теперь рассмотрим область отрицательной кривизны тора, на ней $\varepsilon = -1$. Уравнение (7) в самосопряженной форме

$$\frac{d}{du}\left[cth^2 u\,\frac{d\varphi(u)}{du}\right] + \frac{n^2 cth^2 u}{a\,chu - 1}\,\varphi(u) = 0. \tag{12}$$

Возьмем еще уравнение

$$\frac{d}{du}\left[p^2\,\frac{d\psi(u)}{du}\right] + \frac{n^2 p^2}{q^2}\,\psi(u) = 0, \tag{13}$$

где $p^2 = cth^2 u$, $q^2 = a\,chu_2 - 1$, $[u_1, u_2] \subset (0, +\infty)$.

Уравнение (12) удовлетворяет всем условиям теоремы сравнения Штурма относительно уравнения (13). А так как решениями уравнения (13) являются

$$\cos\frac{nu}{q}, \quad \sin\frac{nu}{q},$$

то каждое решение уравнения (12) имеет, при всяком натуральном n, счетное множество нулей. Рассуждая дальше аналогично тому, как это было в предыдущем пункте убедимся, что верны

Теорема 3: для всякой параллели u_0 области отрицательной кривизны тора, существует счетное множество параллелей u_n, принадлежащих той же области, таких, что пояс тора, ограниченный параллелью u_0 и любой из параллелей u_n, допускает бесконечно малые скользящие изгибания.

Примечание: эта теорема в более общем виде, но другим путем была установлена в работе [6].

Теорема 4: существует счетное множество поясов тора, принадлежащих его области отрицательной кривизны, симметричных относительно плоскости экватора и допускающих бесконечно малые скользящие изгибания.

Л и т е р а т у р а :

[1] H. LIEBMANN: Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen, Münchener Berichte, (1920).

[2] Н.В. ЕФИМОВ: Качественные вопросы теории деформации поверхностей, УМН, Ш, вып.2(24), (1948).

[3] В.В. ГОЛУБЕВ: Лекции по аналитической теории диффе-

ренциальных уравнений, Москва-Ленинград, (1950).

[4] Г. ПИАДЖИО: Интегрирование дифференциальных уравнений, Москва-Ленинград, (1933).

[5] Д. САНСОНЕ: Обыкновенные дифференциальные уравнения, I, Москва (1953).

[6] В.И. МИХАЙЛОВСКИЙ: Бесконечно малые изгибания "скольжения" поверхностей вращения отрицательной кривизны, Укр.мат.журнал, т.XIУ, № 1, (1962).

(Received April 27,1966)