Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

K. K. Mokrishchev

О кривых четырехмерного эвклидова пространства

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 7 (1966), No. 2, 127--138

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105050`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
7,2 (1966)

# О КРИВЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЭВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

К.К. МОКРИЩЕВ, Ростов

§ 1. Пусть $\Gamma$ есть четырежды непрерывно дифференцируемая кривая четырехмерного эвклидова пространства $E_4$, а

(1) $$x_i = x_i(s), \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

суть ее уравнения в декартовых прямоугольных координатах, $s$ – длина ее дуги; $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \chi_i$ – единичные векторы касательной, первой, второй и третьей нормалей; $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ – первая, вторая и третья кфивизны; тогда деривационные формулы будут иметь вид [1]:

(2) $$\begin{cases} \xi_i' = \kappa_1 \eta_i , \\ \eta_i' = -\kappa_1 \xi_i + \kappa_2 \zeta_i , \\ \zeta_i' = -\kappa_2 \eta_i + \kappa_3 \chi_i , \\ \chi_i = -\kappa_3 \zeta_i . \end{cases}$$

Если точка $M$ кривой $\Gamma$ определяетсц значением $s$ дуги, а ей близкая точка $N$ значением дуги $s + \Delta s$, то, с точностью третьего порядка относительно дуги $MN$, будем иметь

(3) $$\begin{cases} x_i(s+\Delta s) = x_i + \Delta s \cdot \xi_i + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_1 \eta_i + [3] , \\ \xi_i(s+\Delta s) = [1 - \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_1^2]\xi_i + [\Delta s \cdot \kappa_1 + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_1']\eta_i + \\ \qquad + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_1 \kappa_2 \zeta_i + [3] , \\ \eta_i(s+\Delta s) = -[\Delta s \cdot \kappa_1 + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_1']\xi_i + [1 - \frac{1}{2}(\Delta s)^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)]\eta_i + \\ \qquad + [\Delta s \cdot \kappa_2 + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_2']\zeta_i + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_2 \kappa_3' \chi_i + [3] , \\ \zeta_i(s+\Delta s) = \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_1 \kappa_2 \xi_i - [\Delta s \cdot \kappa_2 + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_2']\eta_i + \\ \qquad + [1 - \frac{1}{2}(\Delta s)^2(\kappa_2^2 + \kappa_3^2)]\zeta_i + [\Delta s \cdot \kappa_3 + \\ \qquad + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_3']\chi_i + [3] , \\ \chi_i(s+\Delta s) = -\frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_2 \kappa_3 \eta_i - [\Delta s \kappa_3 + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_3']\zeta_i + \\ \qquad + [1 - \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \kappa_3^2]\chi_i + [3] , \end{cases}$$

где [3] - члены не ниже третьего порядка относительно $\Delta s$.

В дальнейшем предполагается, что ни в одной из точек кривой $\Gamma$ ни одна из кривизн $\kappa_1$, $\kappa_2$, $\kappa_3$, не обращается в нуль.

Отметим еще, что радиус - вектор центра соприкасающейся окружности линии $\Gamma$, соответствующей ее точке $M$ имеет вид

$$x_{i0} = x_i + \frac{1}{\kappa_1}\eta_i, \tag{4}$$

радиус-вектор центра соприкасающейся сферы

$$x_{ic} = x_i + \frac{1}{\kappa_1}\eta_i + \frac{1}{\kappa_2}\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)'\xi_i \tag{5}$$

и радиус-вектор центра соприкасающейся гиперсферы

$$x_{ir} = x_i + \frac{1}{\kappa_1}\eta_i + \frac{1}{\kappa_2}\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)'\xi_i + \left\{\frac{\kappa_2}{\kappa_1\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_3}\left[\frac{1}{\kappa_2}\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)'\right]'\right\}\chi_i. \tag{6}$$

§ 2. Ребра фундаментального репера линии $\Gamma$ определяют шесть плоскостей (двухмерных):

$$(\xi_i,\eta_i),\ (\xi_i,\xi_i),\ (\xi_i,\chi_i),\ (\eta_i,\xi_i),\ (\eta_i,\chi_i),\ (\xi_i,\chi_i)$$

которые в дальнейшем, ради краткости, будем обозначать соответственно символами

$$(a),\ (b),\ (c),\ (d),\ (e),\ (f).$$

Введем следующее

<u>Определние: центральной точкой плоскости</u> $(a)$, <u>соответствующей точке</u> $M$ <u>кривой</u> $\Gamma$ <u>называется предельное положение точки пересечения плоскости</u> $(a)$, <u>построенной в точке</u> $M$ <u>с плоскостью</u> $(a)$, <u>построенной в точке</u> $N$, <u>когда последняя перемещаясь по кривой</u> $\Gamma$ <u>стремится к точке</u> $M$.

Аналогично вводятся центральные точки плоскостей

$$(b),\ (c),\ (d),\ (e),\ (f).$$

Обозначим центральные точки плоскостей

$$(a),(b),(c),(d),(e),(f)$$

соответственно буквами

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F\ .$$

Имеет место

Теорема 1: для кривой $\Gamma$ пространства $E_4$

$$A \equiv B \equiv C \equiv M\ ,$$

точка $D$ определяется радиусом-вектором

$$x_{iD} = x_i + \frac{1}{K_1}\eta_i$$

и, следовательно, совпадает с центром соприкасающейся окружности в той же точке $M$ ; точка $E$ определяется радиусом-вектором

$$x_{iE} = x_i + \frac{1}{K_1}\eta_i + \frac{K_2}{K_1 K_3}\chi_i\ ,$$

а точка $F$ находится в бесконечности.

Доказывается эта теорема непосредственным вычислением радиусов-векторов точек $A, B, C, D, E, F$ .

Покажем, например, отыскание точки $E$ .

Очевидно, что радиус-вектор $z_i$ точки пересечения плоскости $(\epsilon)$ и ей бесконечно близкой, может быть определен из условий:

$$z_i = x_i + u\eta_i + v\chi_i = x_i(s+\Delta s) + \lambda\eta_i(s+\Delta s) + \mu\chi_i(s+\Delta s),$$

где $u, v, \lambda, \mu$ – параметры. Отсюда, используя первое, третье и пятое из уравнений (3), находим

$$0 = 1 - \lambda(K_1 + \tfrac{1}{2}\Delta s K_1') + [2],$$

$$u = \tfrac{1}{2}(\Delta s)^2 K_1 + \lambda[1 - \tfrac{1}{2}(\Delta s)^2(K_1^2 + K_2^2)] + \tfrac{1}{2}\mu(\Delta s)^2 K_2 K_3 + [3],$$

$$0 = \lambda(K_2 + \tfrac{1}{2}\Delta s \cdot K_2') - \mu(K_3 + \tfrac{1}{2}\Delta s \cdot K_3') + [2],$$

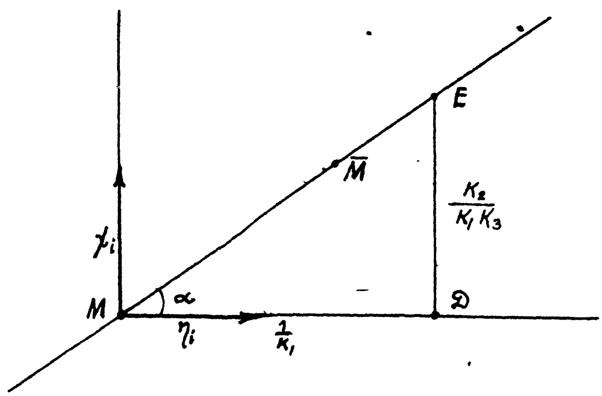
$$v = \tfrac{1}{2}\lambda(\Delta s)^2 K_2 K_3 + \mu[1 - \tfrac{1}{2}(\Delta s)^2 K_3^2] + [3],$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta s \longrightarrow 0$ , найдем

$$u = \lambda = \frac{1}{K_1}\ ,\quad v = \mu = \frac{K_2}{K_1 K_3}\ ,$$

следовательно

$$x_{iE} = x_i + \frac{1}{K_1}\eta_i + \frac{K_2}{K_1 K_3}\chi_i$$




Приводимый рисунок дает наглядное представление о взаимном расположении центральных точек линии $\Gamma$ . Треугольник $MDE$ будем называть треугольником центральных точек линии $\Gamma$ .

Непосредственно ясны следующие утверждения:

1°. Если гипотенуза треугольника центральных точек линии $\Gamma$ имеет постоянную длину, равную $a$, то ее кривизны связаны соотношением

$$K_2^2 + K_3^2 = a K_1^2 K_3^2 .$$

2°. Если катет треугольника центральных точек линии $\Gamma$, противолежащий ее точке, сохраняет постоянную длину, равную $b$, то ее кривизны связаны соотношением

$$K_2 = b K_1 K_3$$

3°. Если треугольники центральных точек линии $\Gamma$ будут подобны, то ее кривизны связаны соотношением

$$K_2 = c K_3 ,$$

где $c = tg\,\alpha = const.$

$4^{\circ}$. Если площадь треугольника центральных точек линии $\Gamma$ постоянна и равна $d$, то ее кривизны связаны соотношением

$$k_2 = 2d\, k_1^2\, k_3 .$$

$5^{\circ}$. Если треугольники центральных точек линии $\Gamma$ конгруентны, то ее кривизны связаны условиями

$$k_1 = \frac{c}{b} , \qquad k_2 = c \cdot k_3$$

где $b$ и $c$ - постоянные.

Справедливы и обратные утверждения.

§ 3. Предположим, что линия $\Gamma$ принадлежит классу линий, указанных в $1^{\circ}$ § 2.

Пусть $\bar{M}$ есть фиксированная точка на гипотенузе треугольника центральных точек линии $\Gamma$. При движении репера вдоль $\Gamma$ точка $\bar{M}$ опишет линию $\bar{\Gamma}$, которую можно представить уравнениями

$$\bar{x}_i = x_i + \lambda (\eta_i + c\, \chi_i ) ,$$

где $\lambda = const$. Отсюда, если учесть, что $k_2 = c\, k_3$ находим

$$\bar{\xi}_i \frac{d\bar{s}}{ds} = (1 - \lambda k_1)\, \xi_i$$

и, при соответствующем выборе направления отсчета дуг на $\bar{\Gamma}$, будем иметь

$$\bar{\xi}_i = \xi_i .$$

Следовательно, в силу свойств обобщения преобразования Комбескюра [2] на кривые в $E_4$, получаем

$$\bar{\xi}_i = \xi_i , \bar{\eta}_i = \eta_i , \bar{\zeta}_i = \zeta_i , \bar{\chi}_i = \chi_i , \frac{\bar{k}_1}{k_1} = \frac{\bar{k}_2}{k_2} = \frac{\bar{k}_3}{k_3} ,$$

таким образом:

если треугольники центральных точек линии $\Gamma$ подобны, то каждая фиксированная точка гипотенузы этого треугольника описывает (при скольжении репера вдоль $\Gamma$ ) линию $\bar{\Gamma}$ такую, что:

1) Она есть ортогональная траектория образующих поверхности, описываемой гипотенузою треугольника центральных точек линии $\Gamma$,

2) ее фундаментальный репер всегда параллелен соответствующему реперу линии $\Gamma$,

3) ее кривизны пропорциональны соответственным кривизнам линии $\Gamma$,

4) ее треугольники центральных точек подобны между собой и подобны треугольникам центральных точек линии $\Gamma$,

5) ее главные нормальные плоскости, совпадают с соответственными главными нормальными плоскостями линии $\Gamma$, т.е. линии $\Gamma$ и $\bar{\Gamma}$ образуют сопряженную пару кривых Бертрана [3].

§ 4. Предположим теперь, что треугольники центральных точек линии $\Gamma$ конгруентны, тогда

(7) $$K_1 = \frac{c}{\ell}, \quad K_2 = c K_3 .$$

Такая линия $\Gamma$ обладая всеми свойствами линий, рассмотренных в предыдущем параграфе, естественно, будет обладать и некоторыми другими свойствами.

Дифференцируя по $s$ равенство

$$x_{i\varepsilon} = x_i + \frac{1}{K_1} \eta_i + \frac{K_2}{K_1 K_3} \chi_i$$

и используя (2) и (7), получим

$x'_{iE} = 0$ , следовательно $x_{iE} = const$

и так как

$$\sum (x_i - x_{iE})^2 = \frac{b^2}{c^2}(1 + c^2),$$

то имеем:

если треугольники центральных точек линии $\Gamma$ конгруентны, то все они имеют общую вершину $E$ , а линия $\Gamma$ лежит на гиперсфере радиуса, равного

$$\frac{b}{c}\sqrt{1 + c^2}$$

и с центром в точке $E$ .

Кроме того

$$\sum (x_{iD} - x_{iE})^2 = b^2 ,$$

следовательно, принимая во внимание (5) и (7), заключаем:

если треугольники центральных точек линии $\Gamma$ конгруентны, то геометрическое место центров соприкасающихся окружностей (и вместе с тем центров соприкасающихся сфер) этой линии - есть кривая, лежащая на гиперсфере радиуса $b$ и концентрической с гиперсферой, на которой лежит линия $\Gamma$ .

Дифференцируя по $s$ уравнение

$$x_{iD} = x_i + \frac{1}{K_1}\eta_i$$

и используя (2) и (7), находим:

$$\xi_{iD} = \xi_i , \quad \frac{ds_D}{ds} = \frac{b}{c} K_2 ,$$

Отсюда

$$K_{1D}\eta_{iD} = \frac{1}{b}(-c\eta_i + \chi_i), \quad K_{1D} = \frac{1}{b}\sqrt{1 + c^2} ,$$

следовательно

$$\eta_{iD} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(-c\eta_i + \chi_i)$$

Дифференцируя это равенство по $s$ и используя предыдущие соотношения, получим:

$$\xi_{iD} = \xi_i , \quad K_2 K_{2D} = \frac{c^2}{b^2\sqrt{1+c^2}}$$

Как известно

$$\chi_{iD} = \varepsilon_{klmi}\, \xi_{kD}\, \eta_{lD}\, \xi_{mD} ,$$

где $\varepsilon_{klmi}$ есть тензор *Levi-Civita* [1]. Поэтому

$$\chi_{iD} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (\eta_i + c\,\chi_i) .$$

Дифференцируя это равенство по $s$, после несложных преобразований, найдем:

$$K_3 K_{3D} = \frac{c}{b^2\sqrt{1+c^2}} .$$

Веря найденные выражения $K_2 \cdot K_{2D}$ и $K_3 \cdot K_{3D}$ и исключая из них с помощью (7) $K_2$ и $K_3$, получим

$$K_{2D} = c\,K_{3D} .$$

Таким образом приходим к выводу:

<u>если треугольники центральных точек линии $\Gamma$ конгруентны, то:</u>

1) <u>Треугольники центральных точек геометрического места $D$ центров соприкасающихся окружностей (и соприкасающихся сфер) этой линии $\Gamma$ будут тоже конгруентны и будут подобны треугольникам центральных точек линии $\Gamma$,</u>

2) <u>произведение вторых кривизн линий $\Gamma$ и $D$, в соответственных точках, есть величина постоянная,</u>

3) <u>произведение третьих кривизн линий $\Gamma$ и $D$, в соответственных точках, есть величина постоянная.</u>

Теперь нетрудно усмотреть справедливость утверждения:

<u>если кривизны линии $\Gamma$ связаны соотношениями</u>

$$K_1 = \frac{c}{b} , \quad K_2 = c\,K_3 ,$$

<u>где $b$ и $c$ - постоянные, отличные от нуля величины, тог-</u>

да можно построить в ее главной нормальной плоскости неограниченную последовательность подобных прямоугольных треугольников так, чтобы все вершины одного острого угла совпадали с центром гиперсферы, на которой лежит линия $\Gamma$ и чтобы катет каждого треугольника, содержащий центр гиперсферы, служил гипотенузой последующего треугольника, тогда при перемещении точки $M$ до линии $\Gamma$, ее главная нормальная плоскость будет вращаться вокруг центра гиперсферы, а лежащие в ней вершины построенных треугольников опишут гиперсферические кривые, обладающие свойствами линии $\Gamma$.

§ 5. Ребра фундаментального репера линии $\Gamma$ определяют четыре гиперплоскости

$$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), (\xi_i, \eta_i, \chi_i), (\xi_i, \zeta_i, \chi_i), (\eta_i, \zeta_i, \chi_i),$$

обозначим их соответственно

$$(T), (\mathcal{U}), (\mathcal{V}), (\mathcal{W}).$$

Введем

Определение: характеристической плоскостью гиперплоскости $(T)$, соответствующей точке $M$ линии $\Gamma$, называется предельное положение плоскости пересечения гиперплоскости $(T)$, построенной в точке $M$, с гиперплоскостью $(T)$, построенной в точке $N$, когда последняя перемещаясь по $\Gamma$ стремится к $M$.

Аналогично определяются характеристические плоскости гиперплоскостей $(\mathcal{U})$, $(\mathcal{V})$, $(\mathcal{W})$.

Обозначим характеристические плоскости гиперплоскостей

$$(T), (\mathcal{U}), (\mathcal{V}), (\mathcal{W})$$

соответственно символами $(t)$, $(u)$, $(v)$, $(w)$.

Имеет место

Теорема 2: для линии $\Gamma$ пространства $E_4$ характеристические плоскости $(t)$, $(u)$, $(v)$, $(w)$ определяются соответственно уравнениями:

$$x_{i(t)} = x_i + u\,\xi_i + v\,\eta_i ,$$
$$x_{i(u)} = x_i + u\,\xi_i + v\,(\eta_i + \frac{K_2}{K_3}\chi_i),$$
$$x_{i(v)} = x_i + u\,(\xi_i + \frac{K_1}{K_2}\zeta_i) + v\,\chi_i ,$$
$$x_{i(w)} = x_i + \frac{1}{K_1}\eta_i + u\,\zeta_i + v\,\chi_i ,$$

где $u$, $v$ - независимые параметры.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Плоскость $(t)$ совпадает с плоскостью $(a)$.

Теперь нетрудно проверить, что

для каждой точки $M$ линии $\Gamma$ ее соотвественные центральные точки и центры соприкасающихся сферы и гиперсферы лежат в двумерной плоскости, не проходящей через точку $M$.

§ 6. Отыскание центральных точек характеристических плоскостей $(t)$, $(u)$, $(v)$, $(w)$ показывает, что центральная точка плоскости $(t)$ совпадает с точкой $M$ линии $\Gamma$, а каждая из плоскостей $(u)$, $(v)$, $(w)$, имеет бесчисленное множество центральных точек - образующих прямую; эти прямые будем называть центральными прямыми линии $\Gamma$.

Справедлива

Теорема 3: линия $\Gamma$ обладает тремя центральными прямыми $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, лежащими соответственно в характеристических плоскостях $(u)$, $(v)$, $(w)$ и представляемых уравнениями:

$$x_{i(\alpha)} = x_i + u\left[\frac{K_3}{K_1K_2}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)'\xi_i + \eta_i + \frac{K_2}{K_3}\chi_i\right],$$

$$x_{i(\beta)} = x_i - \frac{K_1}{K_2K_3}\chi_i + u\left[\xi_i + \frac{K_1}{K_2}\xi_i + \frac{1}{K_3}\left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\chi_i\right],$$

$$x_{i(\gamma)} = x_i + \frac{1}{K_1}\eta_i + \frac{1}{K_2}\left(\frac{1}{K_1}\right)'\xi_i + u\chi_i .$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что из центральных прямых только $(\alpha)$ проходит через вершину репера линии $\Gamma$. Таким образом здесь наблюдается некоторая аналогия с расположением центральных точек: их тоже три и только одна из них инцидентна с вершиной репера.

§ 7. Что можно сказать о взаимном расположении центральных точек, центроб соприкасающихся сферы и гиперсферы и центральных прямых линии $\Gamma$ ? Ответ на поставленный вопрос дают утверждения:

1°. Если треугольники центральных точек линии $\Gamma$ подобны, то ее центральная прямая $(\alpha)$ совпадает с гипотенузой треугольника центральных точек,

2°. прямая $(\gamma)$ всегда проходит через центры ее соприкасающихся сферы и гиперсферы,

3°. прямая $(\gamma)$ линии $\Gamma$ постоянной первой кривизны всегда проходит через центральные точки $D$ и $E$.

4°. если треугольники центральных точек линии $\Gamma$ конгруентны, то $(\alpha)$ и $(\gamma)$ лежат в главной нормальной плоскости этой линии.

Так как направления прямых $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$ определяются соответственно векторами

$$\frac{K_3}{K_1K_2}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)'\xi_i+\eta_i+\frac{K_2}{K_3}\chi_i\ ,\quad \xi_i+\frac{K_1}{K_2}\zeta_i+\frac{1}{K_3}\left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\chi_i\ ,\quad \chi_i\ ,$$

то условия

$$(\alpha)\perp(\beta)\ ,\quad (\gamma)\perp(\beta)$$

эквивалентны уравнениям

$$\frac{K_3}{K_1K_2}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)'+\frac{K_2}{K_3^2}\left(\frac{K_1}{K_2}\right)'=0,\quad \frac{1}{K_3}\left(\frac{K_1}{K_2}\right)'=0\ ,$$

откуда

$$\frac{K_1}{K_2}=a,\quad \frac{K_2}{K_3}=b\ ,$$

где $a$, $b$ - постоянные, отличные от нуля величины; следовательно:

<u>чтобы центральные прямые</u> $(\alpha)$ <u>и</u> $(\gamma)$ <u>в каждой точке линии</u> $\Gamma$ <u>были перпендикулярны прямой</u> $(\beta)$ <u>необходимо и достаточно, чтобы</u> кривизны линии $\Gamma$ были связаны соотношениями

$$\frac{K_1}{K_2}=a,\quad \frac{K_2}{K_3}=b\ ,$$

$$ab\neq 0\ ,\quad a=const\ ,\quad b=const\ .$$

### Литература


[1] A. DUSCHEK - W. MAYER: Lehrbuch der Differentialgeometrie, I,II, Leipzig und Berlin, 1930.

[2] L. BIANCHI: Lezioni di geometria differenziale, v.1, p.1, Bologna-Pisa, 1923.

[3] D. PEREPELKIN: Sur les courbes de l'espace Euclidien à quatre dimensions analogues aux courbes de Bertrand, Bull.des sciens Math.,t.VIII,1934.



(Received February 22, 1966)