Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jurij Ivanovich Gribanov

О линейных интегральных операторах в Банаховых пространствах

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 3, 353--361

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105023

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 3 (1965)

О ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ

Ю.И. ГРИБАНОВ, Казань

Предположим, что для банахова пространства E измеримых по Лебегу функций, определенных на сегменте $[0, 1]$, выполнены следующие условия:

1. из $\lim_{n\to\infty} \| u_n \| = 0$ вытекает $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = 0$ по мере;
2. из $\lim_{n\to\infty} \| u_n \| = 0$ вытекает существование такой частичной последовательности $\{ u_{n_k}(t) \}$ и такой неотрицательной функции $u(t) \in E$, что $|u_{n_k}(t)| \leq u(t)$ почти всюду $(k = \overline{1, \infty})$;
3. из $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ по мере вытекает $\| u \| \leq \leq \varliminf_{n\to\infty} \| u_n \|$.

С. Банаху ([1], стр. 74-75) принадлежит

Теорема. Пусть E и $\mathcal{F}$ - два банаховых пространства функций, удовлетворяющие условиям 1,2 и 3, а $\mathcal{K}(s, t)$ - функция, определенная в квадрате $[0, 1; 0, 1]$. Если тогда для каждой функции $u(t) \in E$ существует интеграл
$$v(s) = \int_0^1 \mathcal{K}(s, t)\, u(t)\, dt$$
для почти всех s и если $v(s) \in \mathcal{F}$, то $v(s)$ является линейной операцией.

В [2] было указано обобщение этой теоремы С. Банаха на банаховы пространства функций, заданных на произвольных пространствах с мерой. Однако это обобщение оказалось неверным, что было замечено и любезно сообщено автору И.В. Шрагиным. Мы намерены здесь прежде всего указать правильное обобщение теоремы С. Банаха.

Пусть (X, Σ, μ) - произвольное пространство с мерой, т.е. множество X вместе с некоторой σ-алгеброй Σ его (измеримых) подмножеств и неотрицательной счетно-аддитивной функцией множества μ, определенной на Σ. Рассматриваются измеримые функции, заданные на этом пространстве с мерой.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ по мере на любом измеримом множестве конечной меры, то будем говорить, что последовательность функций $u_n(t)$ сходится к функции $u(t)$ ограниченно по мере. Из сходимости по мере, а также и из сходимости почти всюду следует ограниченная сходимость по мере. Вообще говоря, из ограниченной сходимости по мере не вытекает сходимость почти всюду. Ограниченная сходимость по мере совпадает со сходимостью по мере тогда и только тогда, когда (X, Σ, μ) является пространством с конечной мерой (это утверждение справедливо при естественном дополнительном предположении, что пространство (X, Σ, μ) не содержит атомов бесконечной меры). Отметим следующий нужный нам факт.

__Лемма__. Если из любой частичной последовательности $\{u_{n_k}(t)\}$ последовательности функций $\{u_n(t)\}$ можно выделить подпоследовательность, почти всюду сходящуюся к функции $u(t)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ ограниченно по мере.

Это утверждение непосредственно следует из определения ограниченной сходимости по мере и известной теоремы Ф. Рисса: если E множество конечной меры и из любой частичной последовательности $\{u_{n_k}(t)\}$ последовательности функций $\{u_n(t)\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к функции $u(t)$ почти всюду на множестве E, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ по мере на множестве E.

Пусть $E = E(X, \Sigma, \mu)$ - банахово пространство измеримых функций, заданных на пространстве (X, Σ, μ) и удовлетворяющих условию:

a) из $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$ вытекает существование такой частичной последовательности $\{u_{n_k}(t)\}$ и такой неотрицательной функции $u(t) \in E$, что

$\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}(t) = 0$ μ - почти всюду и

$|u_{n_k}(t) \le u(t)$ μ - почти всюду $(k = \overline{1, \infty})$.

Отметим кстати, что если для любой функции $u(t) \in E$ множество $X(u \ne 0)$ является множеством σ-конечной меры, то первое требование условия a) эквивалентно предположению: из $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$ вытекает $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = 0$ ограниченно по мере. Поскольку этот факт в дальнейшем не используется, мы не будем останавливаться на его доказательстве.

Далее, пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Y, \sigma, \nu)$ - банахово пространство измеримых функций, определенных на пространстве (Y, σ, ν) и удовлетворяющих условию:

b) из $f(s)$, $f_n(s) \in \mathcal{F}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ ограниченно по мере следует $\|f\| \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|f_n\|$.

Обобщением сформулированной выше теоремы С. Банаха является

<u>Теорема 1</u>. Если интегральный оператор

$$\mathcal{K}u = \int_X \mathcal{K}(s,t)\,u(t)\,d\mu(t)$$

отображает пространство E в пространство $\mathcal{F}$, то $\mathcal{K}u$ является линейным оператором из E в $\mathcal{F}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть последовательность функций $\{u_n(t)\} \subset E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n \| = 0$. Рассмотрим любую частичную последовательность $\{u_{\bar{n}}(t)\}$ предыдущей последовательности. Так как $\lim\limits_{\bar{n}\to\infty} \| u_{\bar{n}} \| = 0$, то по свойству а) существует такая подпоследовательность $\{u_{n_k}(t)\}$ последовательности $\{u_{\bar{n}}(t)\}$ и такая неотрицательная функция $u(t) \in E$, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}(t) = 0$ μ - почти всюду и $|u_{n_k}(t)| \leqslant u(t)$ μ - почти всюду $(k = \overline{1,\infty})$. Так как оператор $\mathcal{K}u$ отображает E в $\mathcal{F}$, то функция $\mathcal{K}(s,t)\,u(t)$ интегрируема по t при ν - почти всех s. Имеем: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{K}(s,t)\,u_{n_k}(t) = 0$ μ - почти всюду для ν - почти всех s и $|\mathcal{K}(s,t)\,u_{n_k}(t)| \leqslant |\mathcal{K}(s,t)\,u(t)|$ μ - почти всюду для всех s. Так как функция $\mathcal{K}(s,t)\,u(t)$ интегрируема по t при ν - почти всех s, то отсюда на основании теоремы Лебега об ограниченно сходящихся последовательностях функций ([3], стр.111) получаем:

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \mathcal{K}(s,t)\,u_{n_k}(t)\,d\mu(t) = 0 \quad \nu \text{ - почти всюду.}$$

Таким образом, на основании доказанного, если $u(t), u_n(t) \in E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - u \| = 0$, то из любой подпоследовательности $\{u_{\bar{n}}(t)\}$ последовательности $\{u_n(t)\}$ можно выделить такую частичную подпоследовательность $\{u_{n_k}(t)\}$, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{K} u_{n_k} = \mathcal{K} u \quad \nu \text{ - почти всюду.}$$

Следовательно, по предыдущей лемме,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{K} u_n = \mathcal{K} u \quad \text{ограниченно по мере.}$$

Так как $\mathcal{K}u, \mathcal{K}u_n \in \mathcal{F}$, то, используя предыдущее свойство и условие b), заключаем о следующем свойстве оператора $\mathcal{K}$: Если $u(t), u_n(t) \in E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$, то

$$\| \mathcal{K} u \| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \| \mathcal{K} u_n \| .$$

Поскольку оператор $\mathcal{K}$ аддитивен, то из этого свойства оператора $\mathcal{K}$ и одной теоремы С. Банаха ([1], стр. 67, теорема 2) непосредственно следует, что $\mathcal{K}$ является линейным оператором на E в $\mathcal{F}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $E = E(X, \Sigma, \mu)$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Y, \sigma, \nu)$ - банаховы пространства функций в смысле Люксембурга [4]. Через E^* обозначается дуальное к E банахово пространство функций, т.е. пространство функций

$$E^* = \{ v(t) : \int_X |u(t) v(t)| d\mu(t) < \infty,\ u(t) \in E \} ,$$

которое, рассматриваемое с нормой

$$\| v \| = \sup_{\|u\| \leq 1} \left| \int_X u v \, d\mu \right| ,$$

является полным пространством. Вообще говоря, дуальное к E пространство E^* является только частью сопряженного к E пространства в обычном смысле теории нормированных пространств. Дуальное к E^* пространство совпадает с исходным пространством E . Координатные пространства, в частности, пространства $\ell^p\ (1 \leq p \leq \infty)$, являются частными случаями банаховых пространств функций. В случае координатных пространств интегральный оператор превращается в матричный.

Обозначим через $\mathcal{L}(E, \mathcal{F}^*)$ пространство таких функций $\mathcal{K}(s,t)$ измеримых на $(Y \times X, \sigma \times \Sigma, \nu \times \mu)$, для которых интеграл

$$\int\limits_{Y \times X} |\mathcal{K}(s,t)u(t)g(s)|\, d(\nu \times \mu)(s,t) < \infty$$

при любых функциях $u(t) \in E$ и $g(s) \in \mathcal{F}^*$. Можно показать, что $\mathcal{L}(E, \mathcal{F}^*)$ рассматриваемое с нормой

$$\|\mathcal{K}\| = \sup_{\|g\| \leq 1} \sup_{\|u\| \leq 1} \int\limits_{Y \times X} |\mathcal{K}(s,t)u(t)g(s)|\, d(\nu \times \mu)(s,t),$$

является банаховым пространством функций.

Если интегральный оператор

$$|\mathcal{K}|u = \int\limits_X |\mathcal{K}(s,t)|\, u(t)\, d\mu(t)$$

действует из E в $\mathcal{F}$ (по теореме 1 этот оператор является тогда линейным оператором на E в $\mathcal{F}$), то действующий из E в $\mathcal{F}$ интегральный оператор $\mathcal{K}u$ будем называть нормальным оператором.

Введем следующие обозначения:

$$(\mathcal{K}u, g) = \int\limits_Y \Big(\int\limits_X \mathcal{K}(s,t)u(t)\,d\mu(t)\Big) g(s)\, d\nu(s),$$

$$\mathcal{K}^* g = \int\limits_Y \mathcal{K}(s,t) g(s)\, d\nu(s),$$

$$(u, \mathcal{K}^* g) = \int\limits_X \Big(\int\limits_Y \mathcal{K}(s,t) g(s)\, d\nu(s)\Big) u(t)\, d\mu(t).$$

Из теоремы Фубини о перемене порядка интегрирования ([3], § 36) и теоремы 1 непосредственно вытекает

<u>Теорема 2</u>. Для того чтобы $\mathcal{K}u$ был нормальным оператором из пространства E в пространство $\mathcal{F}$ необходимо и

достаточно, чтобы его ядро $\mathcal{K}(s,t) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{F}^*)$.
Если $\mathcal{K}u$ нормальный оператор на E в $\mathcal{F}$, то $\mathcal{K}^* g$ является нормальным оператором из $\mathcal{F}^*$ в E^*, причем

(1) $$(\mathcal{K}u, g) = (u, \mathcal{K}^* g)$$

при любых функциях $u \in E$ и $g \in \mathcal{F}^*$.

Последнее соотношение (1) означает, что нормальный оператор $\mathcal{K}u$ из E в $\mathcal{F}$ непрерывен в слабых топологиях $\sigma(E, E^*)$ и $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{F}^*)$ и что нормальный оператор $\mathcal{K}^* g$ из $\mathcal{F}^*$ в E^* сопряжен с оператором $\mathcal{K}u$ в слабых топологиях.

Обозначим через $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}^*)$ множество таких функций $\mathcal{K}(s,t)$, что функция $\mathcal{K}(s,t)u(t)$ μ-интегрируема по t при ν - почти всех s при каждой функции $u(t) \in E$, а функция $g(s)\int\limits_X \mathcal{K}(s,t)u(t)\,d\mu(t)$ ν-интегрируема при любых функциях $u(t) \in E$ и $g(s) \in \mathcal{F}^*$. Согласно теореме 1, $\mathcal{K}u$ является линейным оператором из пространства E в пространство $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда его ядро $\mathcal{K}(s,t) \in \mathcal{M}(E, \mathcal{F}^*)$; $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}^*)$, рассматриваемое с

$$\|\mathcal{K}\| = \sup_{\|g\| \le 1} \sup_{\|u\| \le 1} \left| \int\limits_Y \left(\int\limits_X \mathcal{K}(s,t)u(t)\,d\mu(t)\right) g(s)\,d\nu(s) \right|,$$

является нормированным пространством. Существуют такие банаховы пространства функций E и $\mathcal{F}$, что любой интегральный оператор $\mathcal{K}u$ из E в $\mathcal{F}$ является нормальным, т.е., как множества функций, $\mathcal{L}(E, \mathcal{F}^*) = \mathcal{M}(E, \mathcal{F}^*)$. Например, $\mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty) = \mathcal{M}(\ell^\infty, \ell^\infty)$ - любой матричный оператор, действующий в пространстве ℓ^∞, является нормальным оператором. Существуют также такие банаховы пространства функций E и $\mathcal{F}$, что, как множества функций, $\mathcal{L}(E,\mathcal{F}^*) \neq \mathcal{M}(E,\mathcal{F}^*)$. Например, $\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2) \neq \mathcal{M}(\ell^2,\ell^2)$, т.е. не любой матричный оператор, действующий в пространстве ℓ^2, является нормальным оператором. Пример действующего в ℓ^2 матричного оператора, не являющегося нормальным, впервые был указан Д. Гильбертом в его основополагающей работе по интегральным уравнениям. Этот пример приводится в [5] (см. стр. 258).

Итак, изучение класса линейных интегральных операторов из E в $\mathcal{F}$ сводится к изучению пространства $\mathcal{M}(E,\mathcal{F}^*)$. Поэтому исследование последнего нормированного пространства функций представляет собой важную задачу. Укажем несколько связанных с этим частных задач. Пусть $\mathcal{L}(E,\mathcal{F}^*) \neq \mathcal{M}(E,\mathcal{F}^*)$. Мы не знаем, будет ли любая функция $\mathcal{K}(s,t) \in \mathcal{M}(E,\mathcal{F}^*)$ измерима на декартовом произведении $(Y \times X, \sigma \times \Sigma, \nu \times \mu)$ пространств с мерами. Мы также не знаем является ли $\mathcal{M}(E,\mathcal{F}^*)$ полным пространством. Однако совершенно ясно, что $\mathcal{M}(E,\mathcal{F}^*)$ заведомо не является банаховым пространством функций в смысле Люксембурга. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что исследование пространства $\mathcal{M}(E,\mathcal{F}^*)$ представляет собой трудную задачу. Решение этой задачи, несомненно, должно привести к открытию новых интересных фактов в общей теории меры и интегрирования. Известны многочисленные достаточные признаки непрерывности и полной непрерывности интегральных операторов, действующих в конкретных банаховых пространствах функций (в пространствах Ф. Рисса $\mathcal{L}^p$ в пространствах Орлича и т.д.). Интересно отметить, что интегральные операторы, удовлетворяющие этим признакам, всегда оказываются нормальными операторами. Впрочем, это естественно, так как при получении таких признаков всегда существенным образом используют теорему Фубини о перемене порядка интегрирования. Нам не приходилось сталкиваться с достаточно широкими признаками линейности интегральных операторов, при выполнении которых интегральные операторы не оказывались бы нормальными. Получение таких удобных достаточных признаков представляет несомненный интерес. Интегральный оператор $\mathcal{K}u$ из E в $\mathcal{F}$ будем называть регулярным, если интегральный оператор $\mathcal{K}^*g$ действует из $\mathcal{F}^*$ в E^* и имеет место соотношение (1). Теорема 2 утверждает, что любой нормальный оператор является регулярным. Гипотеза: любой интегральный оператор из E в $\mathcal{F}$ является регулярным. Нами в одной еще неопубликованной работе высказанная гипотеза была оправдана для случая координатных пространств - любой матричный оператор, действующий из одного координатного пространства в другое, является регулярным оператором. Повидимому, оправдание (или опровержение) высказанной гипотезы при общих предположениях представляет значительные трудности.

Литература

[1] С. ВАНАХ, Курс функціонального аналізу, Київ , 1948

[2] Ю.И. ГРИБАНОВ, О непрерывности аддитивных интегральных преобразований банаховых пространств функций, Anal.Ştiiţ.Univ."Al.I.Cuza" din JAŞI, Sect.I, Tom.IX,Anul 1963,Fasc.2(383-386)

[3] П. ХАЛМОШ, Теория меры, ИИЛ, 1953

[4] W.A.J. LUXEMBURG, Banach function spaces (thesis Delft), Assen(Netherlands), 1955

[5] Г.Г. ХАРДИ, Дж.Е. ЛИТТЛЬВУД, Г. ПОЛИА, Неравенства, ИЛЛ, 1948

(Поступило в редакцию 15-марта 1965)