Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

K. K. Mokrishchev; E. A. Sevost'yanova

О бесконечно-малых изгибаниях сферы в пространствах постоянной кривизны

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 2, 239--250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105013

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

5, 2 (1965)

О БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ СФЕРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

К.К. МОКРИЩЕВ - Е.А. СЕВОСТЬЯНОВА

Ростов на Дону

В этой работе рассматриваются бесконечно малые изгибания первого и второго порядков сферы в пространстве постоянной кривизны и устанавливаются теоремы о скользящих изгибаниях первого и второго порядков симметричных и несимметричных поясов сферы в эллиптическом, гиперболическом и евклидовом пространствах. Надлежащие вычисления, в сравнительно подробном виде, приведены только для сферы евклидова пространства, - это позволило избежать загромождения работы техническими деталями, но исходные определения и уравнения указаны для общего случая.

§ 1. Пусть в пространстве R_3 постоянной кривизны $\frac{1}{k^2}$ задана регулярная поверхность гиперкомплексной координатой

(1) $$\bar{\tau}(u,v) = x\cdot i_1 + y\cdot i_2 + z\cdot i_3 + t\cdot i_4 \quad ,$$

где x, y, z, t -вейерштрассовы (или нормированные однородные) координаты текущей точки поверхности, а i_1, i_2, i_3, i_4 - комплексные единицы, удовлетворяющие условиями

$$\dot{i}_m \cdot \dot{i}_n = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n , \\ 0 & \text{если } m \neq n . \end{cases}$$

Как и в евклидовом пространстве E_3 бесконечно малые деформации второго порядка поверхности (1) можно представить уравнением

(2) $\qquad \bar{\tau}^{x} = \bar{\tau} + 2\varepsilon\bar{z} + 2\varepsilon^{2}\bar{w} \quad ,$

где $\varepsilon \to 0$ есть параметр деформации, а

(3) $\bar{z} = \xi\cdot i_1 + \eta\cdot i_2 + \zeta\cdot i_3 + \chi\cdot i_4 , \; \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \chi^2 = k^2 ,$

(4) $\bar{w} = \lambda\cdot i_1 + \quad \cdot i_2 + \nu\cdot i_3 + \quad \cdot i_4 , \; \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \quad = k^2$

суть поля деформаций соответственно первого и второго порядков.

Определяя бесконечно малые изгибания второго порядка среди деформаций (2) так же, как и в евклидовом пространстве [1], и рассуждая надлежащим образом, получим уравнения для отыскания изгибающих полей

$$d\bar{\tau}\cdot d\bar{z} = 0 , \qquad d\bar{\tau}\cdot d\bar{w} + d\bar{z}^2 = 0 ,$$

или в производных

(5) $\qquad \bar{\tau}_u\cdot\bar{z}_u = 0, \; \bar{\tau}_u\bar{z}_v + \bar{\tau}\,\bar{z}_u = 0, \quad \bar{\tau}_v\cdot\bar{z}_v = 0 ,$

(6) $\qquad \bar{\tau}_u\,\bar{w}_u + \bar{z}_u^2 = 0, \; \bar{\tau}_u\bar{w}_u + \bar{\tau}_v\,\bar{w}_v + 2\bar{z}_u\bar{z}_v = 0 ,$

$\qquad\qquad \bar{\tau}_v\cdot\bar{w}_v + \bar{z}_v^2 = 0 .$

Внешне эти уравнения не отличаются от соответствующих уравнений в евклидовом пространстве.

§ 2. Зададим сферу единичного радиуса пространства E_3 в декартовых прямоугольных координатах уравнениями

$$x = \frac{\cos v}{ch\, u}, \quad y = \frac{\sin v}{ch\, u}, \quad z = th\, u ,$$

(7)

$$-\infty < u < \infty , \quad 0 \leq v < 2\pi$$

и найдем координаты ее изгибающего поля первого порядка $\bar{z} = \{\xi, \eta, \zeta\}$, а затем третью координату ее изгибающего поля второго порядка $\bar{w} = \{\lambda, \mu, \nu\}$.

Используя (7) представим уравнения (5) в виде

$$(8)\begin{cases} sh\, u(\cos v\cdot\xi_u + \sin v\cdot\eta_u) - \zeta_u = 0 , \\ sh\, u(\cos v\cdot\xi_v + \sin v\cdot\eta_v) - \zeta_v + ch\, u(\sin v\cdot\xi_u - \cos v\cdot\eta_u) = 0 , \\ \sin v\cdot\xi_v - \cos v\cdot\eta_v = 0 . \end{cases}$$

полагая

(9) $$\xi_v = \gamma\cdot\cos v, \qquad \eta_v = \gamma\cdot\sin v,$$

где γ - вспомогательная функция от u, v получим из (8) и (9)

(10) $$sh^2u\cdot\gamma_v - shu\cdot\xi_{vv} + chu\cdot\xi_u = 0,$$

(11) $$shu\, chu\,(\xi_{uu}+\xi_{vv}) - 2\,\xi_u = 0.$$

Учитывая периодичность $\xi(u,v)$ при обходе любой из параллелей сферы, найдем решения уравнения (11)

$$\xi_1(u,v) = e^{nu}(n\,thu - 1)\sin nv,$$

(12) $$\xi_2(u,v) = e^{-nu}(n\,thu + 1)\sin nv,$$

$$\xi(u,v) = C_1\cdot\xi_1(u,v) + C_2\,\xi_2(u,v),$$

где n -натуральное число, а C_1, C_2 -произвольные янные. Функция $\xi(u,v)$ регулярна во всех точках сферы, за исключением ее полюсов.

Используя (12) и интегрируя (10), получим

(13) $$\gamma(u,v) = \frac{n^2-1}{chu}\,(C_1 e^{nu} + C_2 e^{-nu})\cos nv,$$

а теперь (13) и интегрирование уравнений (9) дает

(14) $$\xi = \frac{n^2-1}{2chu}(C_1 e^{nu} + C_2 e^{-nu})\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)v + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)v\right],$$

$$\eta = -\frac{n^2-1}{2chu}(C_1 e^{nu} - C_2 e^{-nu})\left[\frac{1}{n+1}\cos(n+1)v - \frac{1}{n-1}\cos(n-1)v\right].$$

Эти функции тоже регулярны во всех точках сферы, кроме ее полюсов.

Найдем теперь третью компоненту ν поля бесконечно малого изгибания второго порядка сферы (7). Для этого, используя уравнения сферы (7), представим уравнения (6) в следующем виде

$$(15)\begin{cases} \operatorname{sh} u(\cos v\cdot\lambda_u+\sin v\cdot\mu_u)-\nu_u=\mathcal{P}, \\ \operatorname{sh} u(\cos v\cdot\lambda_v+\sin v\cdot\mu_v)-\nu_v+\operatorname{ch} u(\sin v\cdot\lambda_u-\cos v\cdot\mu_u)=Q, \\ \sin v\cdot\lambda_v-\cos v\cdot\mu_v=R, \end{cases}$$

где положено

$$(16)\quad \begin{aligned} \mathcal{P}&=\operatorname{ch}^2 u\cdot(\xi_u^2+\eta_u^2+\zeta_u^2), \\ Q&=2\operatorname{ch}^2 u\,(\xi_u\xi_v+\eta_u\eta_v+\zeta_u\zeta_v), \\ R&=\operatorname{ch} u\,(\xi_v^2+\eta_v^2+\zeta_v^2). \end{aligned}$$

Исключая λ и μ из (15), найдем уравнение, определяющее функцию ν

$$\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u(\nu_{uu}+\nu_{vv})-2\nu_u=2\mathcal{P}-\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u\cdot\mathcal{P}_u-\operatorname{sh}^2 u\cdot\mathcal{P}_{vv}-$$
$$-\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u\cdot Q_v+\operatorname{sh}^2 u\cdot Q_{uv}+\operatorname{sh} u(1-\operatorname{sh}^2 u)R_u-\operatorname{sh}^2 u\operatorname{ch} u\cdot R_{uu},$$

или, используя (16),(14) и (12), придадим этому уравнению вид

$$(17)\quad \begin{aligned} &\operatorname{sh} 2u\cdot(\nu_{uu}+\nu_{vv})-4\nu_u= \\ &=\frac{n^2e^{2nu}}{4}[(n^2-1)^2(-e^{-4u}+2-e^{4u})+ \\ &+4(n-1)^2e^{2u}+4(n+1)^2e^{-2u}]\cdot C_1^2-4n^2(n^2+1)C_1C_2+ \\ &+\frac{n^2e^{-2nu}}{4}[(n^2-1)^2\times(e^{4u}+2+e^{-4u})+ \\ &+4(n+1)^2e^{2u}+4(n-1)^2e^{-2u}]\cdot C_2^2+4n^2\{(1-n^2)e^{2nu}\cdot \\ &\cdot C_1^2+2(n^2-1)[(n^2-1)(e^{4u}-2+e^{-4u})+4(e^{2u}+e^{-2u})]C_1C_2+ \\ &+(1-n^2)e^{-2u}\cdot C_2^2\}\cdot\cos 2nv. \end{aligned}$$

Будем отыскивать решение уравнения (17) в виде

$$(18)\quad \nu(u,v)=\varphi(u)+\psi(u)\cdot\cos 2nv.$$

После выполнения довольно громоздких вычислений, находим:

$$(19)\quad \begin{aligned} &\varphi(u)=(u-\operatorname{th} u)\cdot B+C-\frac{e^{2nu}}{16\operatorname{ch} u}\{n(n-1)^2[ne^{3u}+ \\ &+(n+4)e^{u}]-n(n+1)^2[(n-4)e^{-u}+ne^{-3u}]\}C_1^2+ \\ &+n^2(n^2+1)\operatorname{th} u\cdot C_1C_2-\frac{e^{-2nu}}{16\operatorname{ch} u}\{n(n-1)^2[ne^{-3u}+ \\ &+(n+4)e^{-u}]-n(n+1)^2[(n-4)e^{u}+ne^{3u}]\}C_2^2, \end{aligned}$$

(20) $$\psi(u)=(n\,th\,u-\tfrac{1}{2})e^{2nu}\cdot A_1+(n\,th\,u+\tfrac{1}{2})e^{-2nu}\cdot$$
$$\cdot A_2-n(n^2-1)(n\,th\,u-1)e^{2nu}\cdot C_1+F(u)\cdot C_1C_2-$$
$$-n(n^2-1)(n\,th\,u+1)e^{-2nu}\cdot C_2^2\;,$$

где B, C, A и A_2 – произвольные постоянные, а

(21) $$F(u)=\frac{n(n^2-1)}{4n^2-1}\Big\{n\,th\,u\Big[\frac{(n^2-1)(6n^2+n+4)}{4(n^2-4)}(e^{4u}-e^{-4u})+ + \frac{2n^3-2n^2-5n+8}{n-1}(e^{2u}-e^{-2u})+8\sum_{k=3}^{n}\frac{n+k-1}{n-k+1}(e^{2(k-1)u}- - e^{-2(k-1)u})\Big]-\frac{2n^4+11n^3+6n^2-n-4}{8(n^2-4)}(e^{4u}+e^{-4u})- -\frac{3(n^2-3n+3)}{2(n-1)}(e^{2u}+e^{-2u})+4\sum_{k=3}^{n}\frac{n+k-1}{n-k+1}(e^{2(k-1)u}+ + e^{-2(k-1)u})+\frac{8e^{2nu}}{e^{-2u}-1}(n\,th\,u-\tfrac{1}{2})- -\frac{8e^{-2nu}}{e^{2u}-1}(n\,th\,u+\tfrac{1}{2})\Big\}\,.$$

Анализ (19),(20) и (21) приводит к выводу, что решение (18) уравнения (17), при $n > 2$, регулярно на всей сфере, кроме ее полюсов.

Отметим, что при выполнении этих вычислений, были использованы некоторые соображения статьи Е. Ремоса [2].

В последующем будут извлечены геометрические следствия из полученных формул.

§ 3. Выделим на сфере (7) параллель, определяемую условием

$$th\,u_0=\frac{1}{n}$$

и положим в (12_3) $C_2=0$ а в (20), кроме того, $B=A_1=A_2=0$, тогда соответствующие бесконечно малые изгибания первого и второго порядков сферы, как показывают (12),(18)-(20), будут, при $n\geqslant 3$, удовлетворять условиям

$$\zeta(u_0,v)=0\,,\quad \vartheta(u_0,v)=\varphi(u_0)=const.,$$

$$\zeta(-\infty,v)=0\,,\quad \vartheta(-\infty,v)=\varphi(-\infty)=const.$$

и будут регулярными на соответствующем сегменте сферы, поэтому имеет место

Теорема 1: существует счетное множество сегментов сферы евклидова пространства, больших ее половины, допускающих скользящие бесконечно малые изгибания первого и второго порядков.

Эта теорема принадлежит Е. Рембсу [2]. Но еще раньше эта теорема, только для изгибаний первого порядка, была установлена Г. Либманом [3]. Поэтому, параллели сферы, удовлетворяющие условиям $th\,u = \pm \frac{1}{n}$ будем называть либмановскими.

§ 4. Будем отыскивать на сфере (7) такие две параллели

$$u = u_0 , \quad u = -u_0 ,$$

которые удовлетворяли бы условиям

$$\xi(u_0, v) = \xi(-u_0, v) = 0, \quad \psi(u_0) = \psi(-u_0) = 0 .$$

Чтобы бесконечно малые изгибания первого и второго порядков пояса сферы, заключенного между этими параллелями, не вырождались в тривиальные, достаточно, в силу этих условий, как показывают (12) и (20),(21), потребовать

$$\begin{vmatrix} (n\,th\,u_0 - 1) & (n\,th\,u_0 + 1) \\ (n\,th\,u_0 + 1) & (n\,th\,u_0 - 1) \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} (n\,th\,u_0 - \frac{1}{2}) & (n\,th\,u_0 + \frac{1}{2}) \\ (n\,th\,u_0 + \frac{1}{2}) & (n\,th\,u_0 - \frac{1}{2}) \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

а для этого достаточно значение u_0 выбрать так, чтобы

$$n\,th\,u_0 = cth\,n\,u_0 ,$$

$$2n\,th\,u_0 \neq cth\,2n\,u_0 ,$$

но это всегда можно осуществить; тогда, для такого u_0 в силу (12_3), (18)-(21), имеем

$$\xi(u_0, v) = \xi(-u_0, v) = 0,$$

$$\vartheta(u_0, v) = \varphi(u_0) = const., \quad \vartheta(-u_0, v) = \varphi(-u_0) = const.,$$

таким образом доказана

<u>Теорема 2</u>: существует счетное множество симметричных поясов сферы евклидова пространства, допускающих скользящие бесконечно малые изгибания первого и второго порядков.

§ 5. Возьмем на сфере (7) произвольную параллель $u = u_0 > 0$ и будем отыскивать такое α, чтобы пояс сферы, заключенный между параллелями

$$u = u_0, \quad u = -u_0 + \alpha,$$

допускал нетривиальные скользящие бесконечно малые изгибания первого и второго порядков. Для этого достаточно выполнить условия

$$(22) \quad \xi(u_0, v) = \xi(-u_0 + \alpha, v) = 0,$$

$$(23) \quad \psi(u_0) = \psi(-u_0 + \alpha) = 0.$$

Рассмотрим сначала условия (22). Как показывает (12_3) константы C_1 и C_2 не должны быть равны нулю и (22) приводят к уравнению, определяющему α

$$\begin{vmatrix} e^{nu_0}(n\,th\,u_0 - 1) & e^{-nu_0}(n\,th\,u_0 + 1) \\ e^{-n(u_0-\alpha)}[n\,th(u_0-\alpha)+1] & e^{n(u_0-\alpha)}[n\,th(u_0-\alpha)-1] \end{vmatrix} = 0.$$

Этому уравнению можно придать вид

$$(24) \quad f(\tau) \equiv A\tau^{2(n+1)} + B\tau^{2n} + C\tau^2 + \mathcal{D} = 0,$$

где положено

$$
(25)\quad \begin{cases}
A = (n-1)\,e^{-(n+1)u_0}\cdot b\,, \\
B = -(n+1)\,e^{-(n-1)u_0}\cdot b\,, \\
C = -(n+1)\,e^{(n-1)u_0}\cdot a\,, \\
D = (n-1)\,e^{(n+1)u_0}\cdot a\,, \\
a = e^{nu_0}\left[(n-1)e^{u_0} - (n+1)e^{-u_0}\right], \\
b = e^{-nu_0}\left[(n+1)e^{u_0} - (n-1)e^{-u_0}\right], \\
\tau = e^{\alpha}\,.
\end{cases}
$$

Если $u = u_0 > 0$ есть либмановская параллель, тогда $a = 0$, $b \neq 0$, $th\, u_0 = \frac{1}{n}$ и уравнение (24) дает только $th(\alpha - u_0) = \frac{1}{n}$, следовательно $\alpha = 2u_0$; поэтому пояс сферы, заключенный между параллелями $u = u_0$ и $u = -u_0 + \alpha$, вырождается в линию-параллель $u = u_0$.

В дальнейшем параллели $u = u_0 > 0$ предполагаются не либмановскими.

Покажем, что при достаточно большом n уравнению (24) удовлетворяет значение α такое, что $0 < \alpha < u_0$.

При $\alpha = 0$ имеем $\tau = 1$ и после простых преобразований, найдем

$$f(1) = a^2 - b^2\,.$$

Для всякого натурального n, удовлетворящего условию

$$n > cth^2 u_0$$

будем иметь $a > b > 0$ и потому $f(1) > 0$.

Положив в (24) $\alpha = u_0$ и выполнив несложные преобразования, получим

$$f(e^{u_0}) = -2\,(a+b)\,e^{(n+1)u_0}$$

При условиях, указанных выше, имеем $f(e^{u_0}) < 0$.
Таким образом справедлива

<u>Теорема 3</u>: для каждой не либмановской параллели $u_0 > 0$ сферы евклидова пространства существует на ней счетное множество параллелей $u_n < 0$ таких, что ее пояс, заключенный между параллелью u_0 и любой из параллелей u_n допускает скользящее бесконечно малое изгибание.

Факт, устанавливаемый этой теоремой, аналогичен результату, полученному В.И. Михайловским [4] для поверхностей вращения отрицательной кривизны.

Рассмотрим теперь условия (23). Чтобы выполнить эти условия при выбранном значении $u_0 > 0$ и α, удовлетворяющем (24), надо надлещашим образом рспорядиться значениями произвольных постоянных A_1, A_2 в (20). Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\begin{vmatrix} e^{2nu}(n\,\mathrm{th}\,u_0 - \frac{1}{2}) & e^{-2nu_0}(n\,\mathrm{th}\,u_0 + \frac{1}{2}) \\ e^{-2n(u_0-\alpha)}[n\,\mathrm{th}(\alpha-u_0) - \frac{1}{2}] & e^{-2n(\alpha-u_0)}[n\,\mathrm{th}(\alpha-u_0)+\frac{1}{2}] \end{vmatrix} \neq 0$$

Это неравенство можно представить в виде

$$(26)\quad f_1(\tau) \equiv A_1\tau^{2(2n+1)} + B_1\tau^{4n} + C_1\tau^2 + D_1 \neq 0 ,$$

где положено

$$(27)\quad \begin{cases} A_1 = (2n-1)e^{-(2n+1)u_0}\cdot b_1 , \\ B_1 = -(2n+1)e^{-(2n-1)u_0}\cdot b_1 , \\ C_1 = -(2n+1)e^{(2n-1)u_0}\cdot a_1 , \\ D_1 = (2n-1)e^{(2n+1)u_0}\cdot a_1 , \\ a_1 = e^{2nu_0}[(2n-1)e^{u_0} - (2n+1)e^{-u_0}] , \\ b_1 = e^{-2nu_0}[(2n+1)e^{u_0} - (2n-1)e^{-u_0}] , \\ \tau = e^{\alpha} . \end{cases}$$

Здесь параллели, определяемые условием $th\,u_0 = \frac{1}{2n}$, ведут себя аналогично поведению либмановских параллелей в предыдущем случае. Поэтому либмановскими параллелями сферы будем называть в дальнейшем каждую ее параллель, обращающую в нуль хотя-бы одну из величин a, b, a_1, b_1.

Докажем теперь, что любой корень α уравнения (24) не обращает в нуль многочлена $f_1(\tau)$ (26). Для этого достаточно показать, что результант $R(f_1, f)$ многочленов $f(\tau)$ и $f_1(\tau)$ отличен от нуля. Имеем [5]:

$$R \equiv \left| \begin{matrix} A_1 & 0 & B_1 & \overbrace{0 \; 0 \ldots 0}^{4n-3} & C_1 & 0 & D_1 & \overbrace{0 \; 0 \ldots 0}^{2n+1} \\ 0 & A_1 & 0 & B_1 \; 0 \ldots 0 & 0 & C_1 & 0 & D_1 \; 0 \ldots 0 \\ \ldots & . & . & . \; . \; . & . & . & . & . \; . \; . \\ A & 0 & B & 0 \; 0 \; . \; . \; . & . & . & & \\ 0 & A & 0 & B \; 0 \; . \; . \; . & . & . & . & \\ \ldots & . & . & . \; . \; . & . & . & . & . \end{matrix} \right| \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} 2n+2 \text{ строки} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} 4n+2 \text{ строки} \end{matrix}$$

Разлагая этот определитель по элементам столбцов и учитывая (25) и (27), получим при достаточно большом n

$$R \equiv (2n-1)^{2(n+1)}(n-1)^{2(2n+1)} \times$$

$$\times \{ e^{-2nu_0}[(2n+1)e^{u_0} - (2n-1)e^{-u_0}]^{2(n+1)} \times [(n-1)e^{u_0} -$$

$$-(n+1)e^{-u_0}]^{2(2n+1)} + e^{2nu_0}[(n+1)e^{u_0} - (n-1)e^{-u_0}]^{2(2n+1)} \times$$

$$\times [(2n-1)e^{u_0} - (2n+1)e^{-u_0}]^{2(n+1)} \} > 0 .$$

Из проведенных в этом параграфе рассуждений вытекает

<u>Теорема 4</u>. Для каждой не либмановской параллели $u_0 > 0$ сферы евклидова пространства существует на ней счетное множество параллелей $u_n < 0$ таких, что ее пояс, ограниченный параллелью u_0 и любой из параллелей u_n допускает скользящие бесконечно малые изгибания первого и второго порядков.

§ 6. Все установленные выше теоремы можно распространить на сферы в пространстве постоянной кривизны, равной $\frac{1}{k^2}$ (эллиптическом при $\frac{1}{k^2} > 0$ и гиперболическом при $\frac{1}{k^2} < 0$). Для этого надо задать сферу радиуса a уравнениями

$$x = \sin\frac{a}{k}\frac{\cos v}{ch u}, \quad y = \sin\frac{a}{k}\frac{\sin v}{ch u}, \quad z = \sin\frac{a}{k}\, th u, \quad t = \cos\frac{a}{k},$$

$$-\infty < u < \infty, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

и воспользоваться рассуждениями вполне аналогичными, проведенными в §§ 1 - 5 , представляя изгибающие поля $\bar{z}$ и $\bar{w}$ в виде (3) и (4) о отыскивая их при помощи уравнений (5) и (6). Та , например, вместо теоремы 4, получим утверждение:

для каждой не либмановской параллели $u_0 > 0$ сферы пространства постоянной кривизны $\frac{1}{k^2}$ существует на ней счетное множество параллелей $u_n < 0$ таких, что ее пояс, ограниченный параллелью u_0 и любой из параллелей u_n допускает бесконечно малые изгибания первого и второго порядков при которых граничные параллели скользят по полостям эквидистантных поверхностей с общей базисной плоскостью, совпадающей с плоскостью экватора сферы.

При $k \to \infty$ отсюда вытекает теорема 4.

Литература

[1] Н.В. ЕФИМОВ, Качественные вопросы теории деформации поверхностей, УМН,Ш, вып. 2(24),(1948).

[2] E. REMBS, Über Gleitverbiegungen, Mathematische Annalen, 111,(1935), S. 587-595.

[3] H. LIEBMANN, Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen,Münchener Berichte, (1920).

[4] В.И. МИХАЙЛОВСКИЙ, Бесконечно малые изгибания "скольжения" поверхностей вращения отрицательной кривизны, Укр.мат. журнал, т. XIV, № 1,(1962).

[5] А.Г. КУРОШ, Курс высшей алгебры, Москва, (1963).