Václav Havel

Zerlegungen in kartesischen Funktionen (Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 1, 43--47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104992

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 1 (1965)

ZERLEGUNGEN IN KARTESISCHEN FUNKTIONEN

(vorläufige Mitteilung)

Václav HAVEL, Brno

Es sei $\Gamma \neq \emptyset$ die Menge, welche den Element o nicht enthält, weiter setzen wir $\Gamma_0 = \Gamma \cup \{o\}$ [1].

Es sei $(M_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ Familie von nichtleeren Mengen und f Surjektion zwischen $\prod_\alpha M_\alpha$, M_0 [2]; das Paar $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ nennen wir <u>kartesische Funktion</u> oder kurz nur <u>Funktion</u>.

Ist $\emptyset \neq M'_{\alpha_0} \subseteq M_{\alpha_0}$ für jedes α_0 und ist f' die Verengung von f auf $\prod_\alpha M'_\alpha$, wobei $M'_0 = f(\prod_\alpha M'_\alpha)$, so heisst $F' = ((M'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$ <u>Subfunktion</u> von F.

Unter der <u>Abbildung</u> σ zwischen Funktionen $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, $F^* = ((M^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^*)$ verstehen wir die Familie $(\sigma_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ von Abbildungen σ_{α_0} zwischen M_{α_0}, $M^*_{\alpha_0}$ (für jedes α_0).

Die Abbildung σ heisst <u>Homomorphismus</u>, wenn $\sigma_0 f((a_\alpha)_\alpha) = f^*((\sigma_\alpha a_\alpha)_\alpha)$ für jede Auswahl $a_\alpha \in M_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ gilt.

Unter der <u>Zerlegung in der Funktion</u> $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ verstehen wir die Familie $(\mathfrak{X}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$, wo $\mathfrak{X}_{\alpha_0}$ eine Zerlegung in M_{α_0} für jedes α_0 bedeutet; ist dabei $\mathfrak{X}_{\alpha_0}$ sogar die Zerlegung auf M_{α_0} für jedes α_0, so sprechen wir über die <u>Zerle-</u>

---

1) Im weiteren durchlaufen $\alpha, \beta, \ldots$ die Menge Γ und $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ die Menge Γ_0.

2) Das Symbol $\prod$ bezeichnet da das kartesische Produkt der Mengen.

gung auf F.[3]

Es sei $\sigma = (\sigma_{\alpha o})_{\alpha o}$ Epimorphismus zwischen Funktionen $F = ((M_{\alpha o})_{\alpha o}, f)$, $F^* = ((M^*_{\alpha o})_{\alpha o} f^*)$. Die durch σ induzierte Zerlegung $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_{\alpha o})_{\alpha o}$ auf F wird folgenderweise definiert: $\mathfrak{X}_{\alpha o}$-Blöcke sind vollständige Vorbilder der Elemente von $M^*_{\alpha o}$ bei $\sigma_{\alpha o}$ für jedes α_o.

Die Zerlegung $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_{\alpha o})_{\alpha o}$ in $F = ((M_{\alpha o})_{\alpha o}, f)$ heisst erzeugend, wenn für jede Auswahl $A_\alpha \in \mathfrak{X}_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ ein $\mathfrak{X}_o$-Block $A_o \supseteq f(\prod_\alpha A_\alpha)$ existiert.

Ist $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_{\alpha o})_{\alpha o}$ erzeugende Zerlegung in $F = ((M_{\alpha o})_{\alpha o} f)$, so definieren wir die zu F gehörende Subfunktion $F' = ((M'_{\alpha o})_{\alpha o}, f')$ in F so, dass sich $M'_{\alpha o}$ als die Vereinigung von allen $\mathfrak{X}_{\alpha o}$-Blöcken für jedes α_o erweist und f' Verengung von f auf $\prod_\alpha M'_\alpha$ ist.

Im folgenden bedeute $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}^\iota)_\iota$[4] willkürliche Familie von Zerlegungen in gegebener Funktion $F = ((M_{\alpha o})_{\alpha o}, f)$ und wir setzen $\mathfrak{X}^\iota = (\mathfrak{X}^\iota_{\alpha o})_{\alpha o}$ für jedes ι und $\mathfrak{X}_{\alpha o} = (\mathfrak{X}^\iota_{\alpha o})_\iota$ für jedes α_o.

Die Menge $\mathcal{Y}(F)$ aller Zerlegungen in F sei folgenderweise halbgeordnet: für $\mathfrak{X}^1 = (\mathfrak{X}^1_{\alpha o})_{\alpha o}$, $\mathfrak{X}^2 = (\mathfrak{X}^2_{\alpha o})_{\alpha o}$ aus $\mathcal{Y}(F)$ bedeute $\mathfrak{X}^1 \leq \mathfrak{X}^2$, dass $\mathfrak{X}^1_{\alpha o} \leq \mathfrak{X}^2_{\alpha o}$ in $\mathcal{Y}(M_{\alpha o})$ für jedes α_o. Dann ergibt sich $\mathcal{Y}(F)$ als vollständiger Halbverband: für jede Familie von Zerlegungen in F existiert die

---

3) Für die Terminologie der Theorie von Zerlegungen in Mengen vgl. [1], [2].

4) Index ι durchläuft (dieselbe) Menge $\mathcal{J}$.

Zerlegung $\sup \mathfrak{Z} = (\sup \mathfrak{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0} \in \mathcal{Y}(F)$ während $\inf \mathfrak{Z}$ nicht immer existiert; wenn aber $\inf \mathfrak{Z} \in \mathcal{Y}(F)$ existiert, so ist $\inf \mathfrak{Z} = (\inf \mathfrak{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$.

Satz 1. Es sei σ Epimorphismus zwischen Funktionen $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, $F^* = ((M^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^*)$. Die durch σ induzierte Zerlegung ist dann erzeugend in F.

Satz 2. Es sei $F^* = ((M^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^*)$ Subfunktion in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ und $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ eine erzeugende Zerlegung in F mit zugehörender Subfunktion $F' = ((M'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$, so dass $M_{\alpha_0} \cap M^*_{\alpha_0} \neq \emptyset$ für jedes α_0. Setzen wir $\overline{\mathfrak{Z}}_{\alpha_0} = M_{\alpha_0} \sqsubset \mathfrak{Z}_{\alpha_0}$ 5) für jedes α_0, so ist $\overline{\mathfrak{Z}} = (\overline{\mathfrak{Z}}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung in F.

Satz 3. Ist $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}^{\iota})_{\iota}$ Familie von erzeugenden Zerlegungen in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ und ist $F^{\iota} = ((M^{\iota}_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^{\iota})$ die zu $\mathfrak{Z}^{\iota}$ zugehörenden Subfunktion für jedes ι, wobei $\bigcap_{\iota} M^{\iota}_{\alpha_0} \neq \emptyset$ für jedes α_0, so existiert die Zerlegung $\inf \mathfrak{Z} \in \mathcal{Y}(F)$ und ist erzeugend.

Satz 4. Es sei $\mathfrak{Z}^{i}$ erzeugende Zerlegung in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ mit zugehöriger Subfunktion $F^{i} = (M^{i}_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^{i})$; $i = 1, 2$. Setzen wir voraus, dass jeder $\mathfrak{Z}^{i}_{\alpha_0}$-Block die Menge $M^{j}_{\alpha_0}$ durchschneidet und weiter sei $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ die Zerlegung in F, wobei $\mathfrak{Z}_{\alpha_0} \geq \mathfrak{Z}^{i}_{\alpha_0} \sqcap M^{j}_{\alpha_0}$ 6) für $(i,j) = (1,2), (2,1)$.

---

5) Das Symbol $\sqsubset$ bezeichnet die sog. Hülle (nach O. Borůvka); [1], S.7-8.

6) Das Symbol $\sqcap$ bezeichnet die Durchdringung der Zerlegung mit der Menge nach O. Borůvka; [1], S. 8.

und für jedes α_0 ; dabei soll den Zerlegungen $\mathfrak{X}^1_{\alpha_0} \sqcap M^2_{\alpha_0}$, $\mathfrak{X}^2_{\alpha_0} \sqcap M^1_{\alpha_0}$ dieselbe Subfunktion zugehören. Ist $\mathfrak{X}$ erzeugend, so sind aus die durch $\mathfrak{X}$ erzwungene Ueberdeckungen *) $\mathfrak{X}^I$, $\mathfrak{X}^{II}$ von $\mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{X}^2$ erzeugend.

<u>Satz 5</u>. Es sei $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}^\iota)_\iota$ Familie von erzeugenden Zerlegungen in $F = ((M_1, M_2, \dots, M_n, M_0), f)$ also für den Fall der endlichen Indexmenge Γ. Dann ist auch $\sup \mathfrak{X}$ erzeugende Zerlegung in F.

Es sei $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung auf $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$. Unter der <u>Faktorfunktion</u> $F/\mathfrak{X}$ versteht man die Funktion $((\mathfrak{X}_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f/\mathfrak{X})$, wo mit $f/\mathfrak{X}$ eine solche Surjektion zwischen $\prod_\alpha \mathfrak{X}_\alpha$, $\mathfrak{X}_0$ bezeichnet wird, für welche die Beziehung $f/\mathfrak{X}\ ((A_\alpha)_\alpha) = A_0$ eintritt, wo $f(\prod_\alpha A_\alpha) \subseteq A_0 \in \mathfrak{X}_0$ für die Auswahl $A_\alpha \in \mathfrak{X}_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$.

Auf Faktorfunktionen kann man die Begriffe von Ueberdeckung und Verfeinerung, Hülle und Durchdringung, Verknüpfung et cetera leicht übertragen. Formulieren wir noch einige Sätze, welche die Faktorfunktionen betreffen.

<u>Satz 6</u>. Es sei $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung auf der Funktion $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$; wir setzen $F/\mathfrak{X} = F'$. Es sei weiter $\mathfrak{X}' = (\mathfrak{X}'_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ Zerlegung auf F' und $\mathfrak{X}^* = (\mathfrak{X}^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ die durch $\mathfrak{X}'$ erzwungene Uberdeckung von $\mathfrak{X}$. Dann ist $\mathfrak{X}'$ erzeugend, gerade wenn $\mathfrak{X}^*$ erzeugend ist.

----

7) $\mathfrak{X}^I$ ist die durch $\mathfrak{X}$ erzwungene Ueberdeckung von $\mathfrak{X}^1$, wenn für jedes α_0 die Zerlegung $\mathfrak{X}^I_{\alpha_0}$ die durch $\mathfrak{X}_{\alpha_0}$ erzwungene Ueberdeckung von $\mathfrak{X}^1_{\alpha_0}$ und analogisch für $\mathfrak{X}^{II}$; siehe [1], S. 9.

<u>Satz 7</u> (erster Isomorphiesatz). Existiert Epimorphismus $\sigma = (\sigma_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ zwischen $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, $F^* = ((M^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^*)$, so existiert auch Isomorphismus $\rho = (\rho_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ zwischen F^* und gewisser Faktorfunktion $F' = F/\mathfrak{X}$ [8]) und umgekehrt. Das Isomorphismus ρ verwirklicht sich so, dass in ρ_{α_0} jedem $\mathfrak{X}'_{\alpha_0}$-Block A'_{α_0} als Bild $\sigma_{\alpha_0} A'_{\alpha_0} \in M^*_{\alpha_0}$ entspricht (für jedes α_0).

<u>Satz 8</u> (zweiter Isomorphiesatz). Es seien $\mathfrak{X}^1 = (\mathfrak{X}^1_{\alpha_0})_{\alpha_0}$, $\mathfrak{X}^2 = (\mathfrak{X}^2_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegungen in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$. Sind $F/\mathfrak{X}^1$, $F/\mathfrak{X}^2$ verknüpft, so existiert ein Isomorphismus $\rho = (\rho_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ zwischen ihnen so, dass in ρ_{α_0} jedem $\mathfrak{X}^1_{\alpha_0}$-Block mit ihm inzidenter $\mathfrak{X}^2_{\alpha_0}$-Block (für jedes α_0) entspricht.

<u>Satz 9</u> (dritter Isomorphiesatz). Es sei $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung auf $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ und $\mathfrak{X}' = (\mathfrak{X}'_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung auf $F' = F/\mathfrak{X} = ((M'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$. Dann existiert das Isomorphismus $\rho = (\rho_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ zwischen $F'/\mathfrak{X}'$ und der durch $F'/\mathfrak{X}'$ erzwungenen Ueberdeckung von F': im ρ_{α_0} entspricht jedem $\mathfrak{X}'_{\alpha_0}$-Block A''_{α_0} die Vereinigung aller in A''_{α_0} enthaltenen $\mathfrak{X}_{\alpha_0}$-Blöcke (für jedes α_0).

L i t e r a t u r

[1] O. BORŮVKA, Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, Berlin 1960.

[2] V. HAVEL, Kartesisch assoziierte Zerlegungen (vorläufige Mitteilung), CMUC 6,1(1965).

---

8) Wir sprechen dann über <u>Faktorfunktion die durch σ induziert wurde.</u>