Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Karel Svoboda; Václav Havel; Ivan Kolář

La méthode du repérage des systèmes de sous-variétés

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 4, 183--201

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104974`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
5, 4 (1964)

LA MÉTHODE DU REPÉRAGE DES SYSTÈMES DE SOUS - VARIÉTÉS

K. SVOBODA, V. HAVEL, I. KOLÁŘ , Brno

R.N. Ščerbakov et ses collaborateurs (Tomsk, l'U.R.S.S.) ont élaboré dans une série des cas concrets la méthode du repérage de sous-variété dont la déscription générale est donnée dans le travail [6]. Nous présentons certaine extension resp. généralisation de cette méthode qui permet d'étudier simultanément une groupe de sous-variétés de dimension quelconque plongées dans une variété donnée. Un exemple de l'application concrète de notre méthode est montré dans la deuxième partie du présent exposé.

1. La partie générale

Dans un espace projectif P_n à n dimensions considérons un repère mobile R formé de n + 1 points analytiques linéairement indépendants $A_1, \dots, A_{n+1}$. Le déplacement infinitésimal du repère R est défini par un système d'équations différentielles qui expriment les différentielles dA_i des points fondamentaux du repère R comme des combinaisons linéaires de ces points. Les coefficients ω du système mentionné sont des formes de Pfaff en différentielles des paramètres dont dépend la position du repère R dans l'espace P_n . Les formes ω satisfont aux équations de structure bien connues d'un espace projectif.

Nous entendons sous le nom figure fondamentale de l'espace P_n un ensemble formé par un nombre fini de sous-espaces linéaires de dimension quelconque de P_n. Nous admettons pour plus de simplicité que la figure fondamentale ne soit pas trop étendue en ce sens qu'elle peut être complétement déterminée par des points linéairement indépendants en nombre de $h \leqslant n$.

Les considérations suivantes sont consacrées à l'étude générale <u>des variétés engendrées par les figures fondamentales</u> par la méthode du repère mobile. Pour cela, nous introduisons d'une manière naturelle la notion de variété $\mathcal{V}_p$ à p dimensions de la classe $\mathcal{C}^k$ de figures fondamentales. En supposant que la figure fondamentale soit déterminée par les points analytiques $M_1, \dots, M_h$ la variété $\mathcal{V}_p$ se trouve définie par un système de fonctions $M_1 = M_1(u^1, \dots, u^p)$, $\dots$, $M_h = M_h(u^1, \dots, u^p)$ de la classe $\mathcal{C}^k$, soumises aux conditions habituelles.

A chaque figure fondamentale de $\mathcal{V}_p$ nous faisons correspondre un repère mobile R de manière que les points A_1, $\dots$, A_h du repère en question se confondent avec les points $M_1, \dots, M_h$. Les repères attachés d'une telle façon à la variété $\mathcal{V}_p$ dépendent de p <u>paramètres principaux</u> $u^1, \dots, u^p$ et d'un certain nombre de <u>paramètres secondaires</u> [1]. La condition que la figure fondamentale reste fixe en position par rapport au mouvement du repère correspondant R se traduit par le fait qu'un nombre convenable q de composantes $\omega^1, \dots, \omega^q$ du repère ne dépend que des différentielles des paramètres principaux. Donc, les formes en question sont des formes principales de la variété $\mathcal{V}_p$ et le système d'équations de Pfaff

(1) $\qquad \omega^1 = 0, \dots, \omega^q = 0$

est complètement intégrable [3], parce qu'il s'agit du système des équations d'un sous-groupe stacionnaire de la figure fondamentale.

La variété $\mathcal{V}_p$ étant à p dimensions, on a $q \geqslant p$ et il en découle que les formes principales sont liées par $q - p$ rélations linéaires de la forme

(2) $\omega^\beta = L^\beta_\alpha \, \omega^\alpha \qquad (\alpha = 1,\ldots, p \; ; \; \beta = p+1,\ldots,q)$.

Les équations (2) servent de point de départ à l'étude de la variété $\mathcal{V}_p$. Les formes résiduelles, en nombre de $N - q$, où N désigne le nombre des composantes indépendantes d'un repère mobile général, peuvent s'écrire sous la forme

(3) $\omega^\gamma = L^\gamma_\alpha \, \omega^\alpha + e^\gamma \qquad (\gamma = q + 1,\ldots, N)$,

les e^γ étant des formes secondaires dont dépend la position du repère R attaché à la figure fondamentale de la variété $\mathcal{V}_p$. En annulant les formes secondaires en vertu des choix particuliers du repère R on réalise le passage successif au repère canonique de la variété $\mathcal{V}_p$. Ce procédé étant terminé tous le coefficient L^β_α , L^γ_α devient soit constants soit invariants de la variété $\mathcal{V}_p$ [1].

Cela étant, considérons une "<u>sous-variété</u>" $\mathcal{W}_m$ à m dimensions plongée dans la variété $\mathcal{V}_p$ et supposons qu'elle soit définie par un système d'équations de Pfaff de la forme

(4) $\bar{\omega}^1 = 0, \ldots, \bar{\omega}^{p-m} = 0$,

où $\bar{\omega}^1 ,\ldots, \bar{\omega}^{p-m}$ sont des combinaisons linéaires indépendantes des formes $\omega^1,\ldots,\omega^p$. On dit que la sous-variété $\mathcal{W}_m$ est holonome, si le système (4) est complètement intégrable. La solution du système en question détermine dans le cas considéré un ensemble, dépendant de $p - m$ paramètres, de sous-variétés à m dimensions contenues dans $\mathcal{V}_p$. Au contraire, la sous-variété $\mathcal{W}_m$ s'appelle anholonome, si le système (4) n'est pas complètement intégrable; on peut trouver par ex. dans [6] une déscription plus détaillée des variétés anholonomes. Dans ce qui suit nous nous bornons au cas des sous-variétés holonomes.

Le voisinage différentiel du premier ordre d'une sous-variété $\mathcal{W}_m$ détermine certains objets géométriques en relation invariante avec $\mathcal{W}_m$. Il y a avantage, pour l'étude de la sous-variété $\mathcal{W}_m$, à choisir une partie convenable du repère R dans les objets mentionnés. Le choix considéré du repère mobile et ainsi l'adjonction du repère à une sous-variété concrète a pour conséquence que les formes secondaires indépendantes $\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^{m'}$, en nombre convenable m', s'annullent identiquement. Les annulations spéciales des formes secondaires en question conduissent aux sous-variétés du type spécial. Au contraire, si l'on laisse de coté une annulation quelconque de ces formes et si l'on admet que les formes en question sont tout à fait libres, on peut associer la partie correspondante du repère R avec une sous-variété $\mathcal{W}_m$ arbitraire.

La déscription géométrique générale de la construction précédente est un peu indéterminée et elle dépend essentiellement de la forme de la figure fondamentale. Pour cette raison nous préféreons, dans des considérations suivantes, une déscription analytique de la construction indiquée.

La sous-variété $\mathcal{W}_m$ de $\mathcal{V}_p$ étant choisie d'une manière bien déterminée, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, qu'il soit possible de choisir le repère mobile attaché à $\mathcal{W}_m$ de telle manière que la sous-variété $\mathcal{W}_m$ est donnée par les équations

$$(5) \qquad \omega^{m+1} = 0 \,, \ldots, \; \omega^p = 0 \; .$$

Nous allons rechercher l'influence des changements des paramètres secondaires sur les équations (5) de $\mathcal{W}_m$.

Le système (1) étant complètement intégrable les différentielles extérieures des formes ω^i $(i = 1, \ldots, q)$ prennent la forme

(6) $\quad d\,\omega^i = \varphi^i_j \wedge \omega^j \quad (i, j = 1, \ldots, q)$

(d est le symbole pour la différentielle extérieure), où φ^i_j sont des formes de Pfaff convenables. On en obtient, en portant des relations (2) dans les premières p équations (6), les formules

(7) $$d\,\omega^\alpha = \varphi^\alpha_{\alpha'} \wedge \omega^{\alpha'} + \varphi^\alpha_\beta \wedge L^\beta_{\alpha'}\,\omega^{\alpha'} = \vartheta^\alpha_{\alpha'} \wedge \omega^{\alpha'}$$

$$(\alpha, \alpha' = 1, \ldots, p; \ \beta = p+1, \ldots, q),$$

où l'on a posé $\vartheta^\alpha_{\alpha'} = \varphi^\alpha_{\alpha'} + \varphi^\alpha_\beta L^\beta_{\alpha'}$. Il en résulte, d'après les formules bien connues

$$d\,\omega^\alpha = d\,\omega^\alpha(\delta) - \delta\omega^\alpha(d), \quad \vartheta^\alpha_{\alpha'} \wedge \omega^{\alpha'} = \begin{vmatrix} \vartheta^\alpha_{\alpha'}(d) & \omega^{\alpha'}(d) \\ \vartheta^\alpha_{\alpha'}(\delta) & \omega^{\alpha'}(\delta) \end{vmatrix}$$

et en vertu de $\omega^\alpha(\delta) = 0$, les équations suivantes

(8) $$\delta\,\omega^\alpha(d) = \vartheta^\alpha_{\alpha'}(\delta)\,\omega^{\alpha'}(d) \,.$$

Supposons que les formes secondaires $\vartheta^\alpha_{\alpha'}(\delta)$ soient linéairement indépendantes. Cela étant, le système des équations (5) est invariante, si les variations des formes $\omega^{m+1}, \ldots$ $\ldots, \omega^p$ peuvent être exprimées comme des combinaisons linéaires des mêmes formes, c'est-à-dire si $\vartheta^\tau_\sigma(\delta) = 0$ $(\sigma = 1, \ldots, m\,;\ \tau = m+1, \ldots, p)$. Les formes secondaires en question, en nombre de $m' = m\,(p-m)$, jouent le rôle des formes $\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^{m'}$ dont nous avons parlé auparavant.

Considérons maintenant <u>un système</u> $\mathcal{S}$ <u>de sous-variétés</u> ${}^1\mathcal{W}_m, \ldots, {}^\ell\mathcal{W}_{m_\ell}$ dont les dimensions satisfont à la relation $m_1 + \ldots + m_\ell = p$. Supposons qu'il soit possible de choisir le repère mobile R attaché à la variété $\mathcal{V}_p$ de manière que les sous-variétés particulières ${}^{1}\mathcal{W}_{m_1}, \ldots, {}^{\ell}\mathcal{W}_{m}$ sont exprimées par les équations différentielles suivantes

$${}^{1}\mathcal{W}_{m_1}: \ \omega^{m_1+1} = 0 \ , \ldots, \ \omega^{p} = 0$$

$${}^{2}\mathcal{W}_{m_2}: \ \omega^{1} = 0, \ldots, \ \omega^{m_1} = 0, \ \omega^{m_1+m_2+1} = 0, \ldots$$
$$\ldots, \omega^{p} = 0$$

$${}^{\ell}\mathcal{W}_{m_\ell}: \ \omega^{1} = 0 \ , \ldots, \ \omega^{m_1+m_2+\ldots+m_{\ell-1}} = 0 \ .$$

En appliquant la considération précédente à chaque des sous-variétés du système $\mathcal{S}$ on obtient un système de $M = m_1' + \ldots + m'$ formes secondaires indépendantes. Si l'on annule toutes les formes en question, les objets déterminées par le voisinage différentiel du premier ordre de toutes les sous-variétés du système devient fixés en position. L'ensemble des formes secondaires ayant la propriété précédente s'appelle <u>système caractéristique</u> de $\mathcal{S}$ et le repère mobile R qui s'obtient en faisant toutes les autres formes secondaires soit nulles soit des combinaisons linéaires de formes du système caractéristique s'appelle <u>repère semicanonique de la variété $\mathcal{V}_p$ par rapport au système de sous-variétés</u> $\mathcal{S}$.

La construction du repère semicanonique de la variété $\mathcal{V}_p$ se réalise par la méthode du prolongement successif du système d'équations différentielles (2). On obtient ainsi les équa - tions de la forme

$$(9) \qquad \delta B_\rho = f_\gamma (B_\rho) \, e^\gamma \ ,$$

les B_ρ étant des coefficients de ω^α qui se produisent au cours du prolongement mentionné. En construisant le repère semicanonique il faut séparer des relations (9) des combinaisons qui ne dépendent pas essentiellement des formes $\tilde{e}^{\gamma'}$ du système caractéristique, cela veut dire les combinaisons qui ont la forme

$$(10) \qquad \delta g_\lambda (B_\rho) = f_{\gamma'}(B_\rho)\, \tilde{e}^{\gamma'} + f_{\gamma''}(B_\rho)\, \tilde{e}^{\gamma''}, \quad f_{\gamma'} = \rho^{\mu}_{\gamma'}\, g_\mu ,$$

les $\tilde{e}^{\gamma''}$ étant des formes qui n'appartient pas au système caractéristique. En partant de ces formes on peut réaliser les choix particuliers du repère attaché à la variété $\mathcal{V}_p$ jusqu'au moment où toutes les formes secondaires $\tilde{e}^{\gamma''}$ sont où nulles où des combinaisons linéaires de formes du système caractéristique. Dans ce cas, on peut ajouter les paramètres secondaires, en nombre de M , au nombre des fonctions inconnues dont dépend la variété $\mathcal{V}_p$ avec le système de sous-variétés $\mathcal{S}$ et considérer toutes les formes du système caractéristique comme nulles. Les relations (2),(3) prennent ensuite la forme

$$(11) \qquad \omega^{\varkappa} = L^{\varkappa}_{\alpha}\, \omega^{\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, p \; ; \; \varkappa = p + 1, \ldots, N)$$

et elles forment, avec les conditions d'intégrabilité correspondantes, le système d'équations différentielles qui définie la variété $\mathcal{V}_p$ en commun avec le système de sous-variétés $\mathcal{S}$. Nous appellerons le système en question <u>système fondamental d'équations différentielles de la variété $\mathcal{V}_p$ rapportée au système $\mathcal{S}$</u> . Le degré de généralité de la solution du système fondamental est plus grand de M fonctions arbitraires de p arguments que le degré de généralité de la variété $\mathcal{V}_p$.

Les coefficients $L^{\varkappa}_{\alpha}$ des équations (11) sont des invariants du repère semicanonique, ainsi que <u>des invariants du système $\mathcal{S}$ de sous-variétés de la variété</u> $\mathcal{V}_p$. Chaque relation entre les invariants $L_{\alpha}^{\varkappa}$ peut être régardée comme "une déscription naturelle" d'une classe de systèmes $\mathcal{S}$. Il se pose la question d'examiner l'existence et le degré de généralité de certaines classes spéciales de systèmes $\mathcal{S}$ et de construire les repères semicanoniques correspondants. En outre, quelques classes spéciales de systèmes $\mathcal{S}$ n'existent que sur les variétés $\mathcal{V}_p$ spéciales de sorte qu'il est possible de caractériser quelques classes particulières de variétés $\mathcal{V}_p$.

Nous dirigerons notre attention sur deux types importants du système $\mathcal{S}$ sur la variété $\mathcal{V}_p$.

Soit $m_1 = \ldots = m = 1$ et alors $\ell = p$. Dans le cas considéré le système $\mathcal{S}$ se compose de p sous-variétés indépendantes de dimension 1 . Parce qu'un système de $p - 1$ équations de Pfaff linéairement indépendantes en différentielles de p variables est nécessairement complètement intégrable, il s'agit donc de la construction d'un repère semicanonique de la variété $\mathcal{V}_p$ rapportée à p systèmes indépendants à $p - 1$ paramètres de sous-variétés à une dimension de figures fondamentales.

Soit $m_1 = m$, $m_2 = p - m$ et alors $\ell = 2$. Le cas en question est une généralisation immédiate de la construction décrite par R.N. Ščerbakov [6], qui étudie une seule sous-variété $\mathcal{W}_m$ plongée dans une variété $\mathcal{V}_p$ donnée. Il est possible, en partant du voisinage de premier ordre de la sous-variété $\mathcal{W}_m$, d'attacher une partie convenable du repère R à la variété $\mathcal{W}_m$ en annullant certaines formes secondaires en nombre de $m(p - m)$. La construction du repère semicanonique de la variété $\mathcal{V}_p$ par rapport à la sous-variété $\mathcal{W}_m$

se réalise de cette manière que les formes secondaires mentionnées restent tout à fait indéterminées tandis que toutes les autres formes secondaires s'annullent identiquement au cours du prolongement successif du système initial de la forme (2). Cela exige, naturellement, d'attacher la seconde partie du repère mobile considéré à une sous-variété $\overline{\mathcal{W}}_{p-m}$ convenable qui n'est pas choisie d'une manière quelconque mais, au contraire, qui est "conjuguée" avec la sous-variété $\mathcal{W}_m$. Le système $\mathcal{S}$ formé de deux sous-variétés $\mathcal{W}_m$, $\overline{\mathcal{W}}_{p-m}$ et considéré par R.N. Ščerbakov par voie indirecte est donc spécial - "conjuguée", tandis que la méthode que nous avons exposée dans les considérations précédentes permet d'étudier un tel système dans le cas tout à fait général. D'ailleurs, la construction du repère semicanonique d'une surface par rapport à un réseau général dans un espace projectif à trois dimensions, qui fait l'objet de l'étude dans la seconde partie de cet article, est réalisée de telle manière que le repère général en question passe, dans le cas spécial d'un réseau conjugué, dans le repère considéré par R.N. Ščerbakov dans son Mémoire [5].

2. Repère semicanonique d'une surface par rapport à un réseau de courbes (par J. Kolář)

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'effectuer des calculs concrets dans un des cas les plus simples. Plus précisément, nous allons construire, dans un espace projectif P_3 à trois dimensions, le repère semicanonique d'une surface $\mathcal{V}_2$ par rapport à un réseau général $\mathcal{S}$ de courbes. La figure fondamentale est donc formée par un seul sous-espace linéaire de dimension 0 et il s'agit du cas où $n = 3$, $p = 2$, $\ell = 2$, $m_1 = m_2 = 1$.

Considérons, dans l'espace P_3 en question, un repère mobile R formé de points A_0 , A_1, A_2 , A_3 linéairement indépendants et supposons que les coordonnées homogènes de ces points soient normalisées de telle façon que $[A_0A_1A_2A_3] = 1$. On a alors les équations

$$(1) \qquad dA_i = \omega_i^j A_j \qquad (i,\ j = 0,1,2,3)$$

dont les coefficients satisfont aux équations de structure

$$(2) \qquad \underline{d}\,\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad (i,j,k = 0,1,2,3)$$

et à la condition suivante

$$(3) \qquad \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 .$$

Attachons à chaque point $P(u^1, u^2)$ de la surface V_2 les repères R tels que le point A_0 se confond avec le point P . Les repères en question dépendent de deux paramètres principaux u^1, u^2 et de 12 paramètres secondaires $v^1, \ldots, v^{12}$. Au cours de la construction du repère canonique de la surface tous les paramètres secondaires devient des fonctions des paramètres principaux. En construisant le repère semicanonique de la surface par rapport au réseau de courbes nous procédons par la méthode expliquée dans les considérations précédentes.

Le point A_0 étant fixe, les formes ω_0^1 , ω_0^2 , ω_0^3 s'annullent en vertu de $du^1 = du^2 = 0$. Il en résulte que les formes en question ne dépendent que des différentielles des paramètres principaux et qu'elles apparaissent ainsi comme formes principales de la surface. En choisissant les points A_1, A_2 dans le plan tangent de la surface au point A_0 on a

$$(4) \qquad \omega_0^3 = 0$$

et les formes principales $\omega^1 = \omega_0^1$, $\omega^2 = \omega_0^2$ sont linéairement indépendantes.

Cela étant, appliquons les équations de structure à la formule (4). On en obtient ensuite, en vertu de lemme de Cartan, les relations

$$(5) \qquad \omega_1^3 = a\,\omega^1 + b\,\omega^2 , \quad \omega_2^3 = b\,\omega^1 + c\,\omega^2 .$$

En répétant le procédé précédant nous obtenons les équations

$$da + a(\omega_0^0 + \omega_3^3 - 2\,\omega_1^1) - 2\,b\,\omega_1^2 = e\omega^1 + f\,\omega^2,$$

$$(6) \quad db + b(\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2) - a\omega_2^1 - c\,\omega_1^2 = f\omega^1 + g\omega^2 ,$$

$$dc + c(\omega_0^0 + \omega_3^3 - 2\,\omega_2^2) - 2\,b\,\omega_2^1 = g\omega^1 + h\,\omega^2,$$

qui donnent, en désignant par δ le symbole de différentiation obtenue en laissant u^1, u^2 fixes, les formules suivantes

$$\delta a + a(e_0^0 + e_3^3 - 2\,e_1^1) - 2\,b\,e_1^2 = 0$$

$$(7) \quad \delta b + b(e_0^0 + e_3^3 - e_1^1 - e_2^2) - a\,e_2^1 - c\,e_1^2 = 0$$

$$\delta c + c(e_0^0 + e_3^3 - 2\,e_2^2) - 2\,b\,e_2^1 = 0 .$$

Le voisinage différentiel du premier ordre d'une courbe sur la surface détermine une droite située dans le plan tangent de la surface, à savoir sa tangente. Nous dirons que le repère R est attaché au réseau $\mathcal{G}$ situé sur la surface si, dans une position quelconque du point A_0 sur la surface, les arêtes $[A_0A_1]$, $[A_0A_2]$ du repère R se confondent avec les tangentes correspondantes des courbes formant le réseau $\mathcal{G}$ en question. Or, on a

$$\delta[A_0A_1] = (e_0^0 + e_1^1)\,[A_0A_1] + e_1^2\,[A_0A_2]$$

$$\delta[A_0A_2] = e_2^1 [A_0A_1] + (e_0^0 + e_2^2) [A_0A_2]$$

et il en découle que les formes e_1^2, e_2^1 forment le système caractéristique de formes secondaires. En annullant les formes mentionnées on attache le repère R à un réseau concret. Au contraire, au cours de la construction du repère semicanonique de la surface par rapport à un réseau $\mathcal{S}$ arbitraire les formes e_1^2, e_2^1 doivent rester tout à fait indéterminées.

En multipliant les équations (6) successivement par $-c$, $2\,b$, $-\,a$ et en faisant la somme des équations ainsi obtenues on a

$$(8) \qquad d(b^2 - ac) + 2(b^2 - ac)\,(\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2) = \\ = 2\,F\,\omega^1 + 2\,G\,\omega^2\,,$$

où

$$(9) \qquad 2\,F = 2\,b\,f - a\,g - c\,e\,, \quad 2\,G = 2\,b\,g - a\,h - c\,f\,.$$

Il en résulte que

$$\delta(b^2 - ac) + 2(b^2 - ac)\,(e_0^0 + e_3^3 - e_1^1 - e_2^2) = 0$$

et on a $b^2 - ac \neq 0$ pour des points non-paraboliques de sorte que, en nous bornant aux points en question, on peut poser

$$(10) \qquad b^2 - ac = 1\,.$$

Nous avons ensuite, d'après (8) et (10),

$$(11) \qquad \omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = F\,\omega^1 + G\,\omega^2$$

et en prolongeant l'équation précédente nous obtenons les relations

$$(12) \qquad \begin{aligned} &dF + F(\omega_0^0 - \omega_1^1) - G\omega_1^2 + 2\omega_1^0 - 2\,a\,\omega_3^1 - 2\,b\omega_3^2 = \\ &\qquad = 2\,H\,\omega^1 + 2\,K\,\omega^2 \\ &dG + G(\omega_0^0 - \omega_2^2) - F\omega_2^1 + 2\omega_2^0 - 2\,b\,\omega_3^1 - 2\,c\,\omega_3^2 = \\ &\qquad = 2\,K\,\omega^1 + 2\,L\,\omega^2\,. \end{aligned}$$

On a alors

$$\delta F + F(e_0^0 - e_1^1) - G\, e_1^2 + 2\, e_1^0 - 2\, a\, e_3^1 - 2\, b\, e_3^2 = 0$$

$$\delta G + G(e_0^0 - e_2^2) - F\, e_2^1 + 2\, e_2^0 - 2\, b\, e_3^1 - 2\, c\, e_3^2 = 0$$

et on en voit qu'il est possible de poser

(13) $$F = 0\ , \quad G = 0\ .$$

En vertu de (13) les équations (3) et (11) donnent

(14) $$\omega_0^0 + \omega_3^3 = 0\ , \qquad \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0\ ,$$

et les formules (12) prennent la forme suivante

(15) $$\begin{aligned} \omega_1^0 - a\omega_3^1 - b\,\omega_3^2 &= H\omega^1 + K\omega^2 \\ \omega_2^0 - b\omega_3^1 - c\,\omega_3^2 &= K\omega^1 + L\omega^2\ . \end{aligned}$$

Le prolongement ultérieur fournit les relations

$$dH + 2\, H(\omega_0^0 - \omega_1^1) - 2\, K\,\omega_1^2 + 2\, a\,\omega_3^0 - e\,\omega_3^1 - f\,\omega_3^2 = \\ = M\,\omega^1 + N\,\omega^2$$

$$dK + 2\, K\omega_0^0 - H\omega_2^1 - L\omega_1^2 + 2\, b\omega_3^0 - f\omega_3^1 - g\omega_3^2 = N\omega^1 + P\omega^2$$

$$dL + 2\, L(\omega_0^0 - \omega_2^2) - 2\, K\omega_2^1 + 2\, c\omega_3^0 - g\omega_3^1 - h\omega_3^2 = P\omega^1 + \\ + Q\omega^2\ .$$

Il en résultent les formules

$$\delta H + 2\, H(e_0^0 - e_1^1) - 2\, K\, e_1^2 + 2\, a\, e_3^0 - e\, e_3^1 - f\, e_3^2 = 0$$

$$\delta K + 2\, K\, e_0^0 - H\, e_2^1 - L\, e_1^2 + 2\, b\, e_3^0 - f\, e_3^1 - g\, e_3^2 = 0$$

$$\delta L + 2\, L(e_0^0 - e_2^2) - 2\, K\, e_2^1 + 2\, c\, e_3^0 - g\, e_3^1 - h\, e_2^2 = 0$$

qui permettent, en excluant les surfaces réglées, de poser

(17) $$H = 0\ , \quad K = 0\ , \quad L = 0\ .$$

Cela étant, les équations (15) et(16) ont, en vertu de (17), la forme suivante

(18) $$\omega_1^0 = a\omega_3^1 + b\,\omega_3^2$$

$$\omega_2^0 = b\omega_3^1 + c\omega_3^2$$

et

$$2\,a\omega_3^0 - e\omega_3^1 - f\omega_3^2 = M\omega^1 + N\omega^2$$

$$(19)\quad 2\,b\omega_3^0 - f\omega_3^1 - g\omega_3^2 = N\omega^1 + P\omega^2$$

$$2\,c\omega_3^0 - g\omega_3^1 - h\omega_3^2 = P\omega^1 + Q\omega^2 .$$

Les particularisations précédentes entraînent que les formes secondaires uniques qui restent encore non-nulles sont $e_0^0 = - e_3^3$, $e_1^1 = - e_2^2$, e_1^2 , e_2^1 . En changeant les paramètres secondaires qui restent à notre disposition les arêtes $[A_0A_3]$, $[A_1A_2]$ et le sommet A_3 du repère sont fixes en position. Nous déduirons leurs signification géométrique en comparant le repère considéré avec le repère canonique de la surface. Pour cela, nous pouvons annuler les formes secondaires en posant, d'après (7) et (20), $a = 0$, $c = 0$, $e = - 2$, $h = - 2$. Un calcul facile montre que le repère ainsi obtenu se confond avec le repère canonique de la surface [5]. Or, on sait que $[A_0A_3]$ et $[A_1A_2]$ sont les directrices de Wilczynski et A_3 le point d'intersection de la première directrice avec la quadrique de Lie. Mais, les objets en question ne se changent pas au cours de la particularisation auxiliaire et les considérations précédentes donnent alors leurs signification géométrique.

Pour faire suite à nos recherches précédentes nous allons normaliser les coordonnées du point A_0 de la même manière que dans le cas du repère canonique. Pour cela, nous déduirons tout d'abord les variations des fonctions e, f, g, h et nous obtiendrons, en vertu de (6), les relations

$$\delta e + e(e_0^0 - 3\, e_1^1) - 3\, f\, e_1^2 = 0$$

(20)

$$\delta f + f(e_0^0 - e_1^1) - e\, e_2^1 - 2\, g\, e_1^2 = 0$$

$$\delta g + g(e_0^0 + e_1^1) - 2\, f\, e_2^1 - h\, e_1^2 = 0$$

$$\delta h + h(e_0^0 + 3\, e_1^1) - 3\, g\, e_2^1 = 0 .$$

En posant

(21) $\quad V = e^2h^2 - 3\, f^2q^2 + 4\, e\, q^3 + 4\, f^3h - 6\, e\, f\, g\, h$

on obtient, d'après (20), $\delta V + 4\, e_0^0\, V = 0$. Les surfaces reglées étant exclues on a $V \neq 0$ et on peut normaliser le point A_0 et même le point A_3 de manière que $V = 16$ ce qui donne ensuite $e_0^0 = 0$. Remarquons que cette normalisation ne diffère pas de la normalisation employée à la construction du repère canonique de la surface.

En vertu de la particularisation précédente les formes secondaires e_1^2, e_2^1, $e_1^1 = - e_2^2$ restent libres et elles déterminent la position des points A_1, A_2, $A_1 + A_2$ sur la droite $[A_1A_2]$ fixe. Le repère construit est un repère semi-canonique de la surface par rapport à une trois-couche des courbes. Une telle trois-couche de courbes sur la surface étant donnée nous pouvons, à l'aide des paramètres secondaires réstants, fixer les points A_1, A_2, $A_1 + A_2$ sur les tangentes des courbes contenues dans les couches particulières. En proposant d'examiner une trois-couche arbitraire sur la surface, on peut considérer les paramètres secondaires en question comme fonctions arbitrairement choisie . Cela étant, les formes secondaires résiduelles s'annullent, toutes les formes du repère sont formes principales et tous les coefficients sont des invariants de la trois-couche de courbes sur la surface.

En considérant la construction du repère canonique du réseau $\mathcal{S}$ sur la surface il nous faut choisir encore le paramètre secondaire qui correspond à la forme e_1^1. Pour ce but nous allons procéder par la voie géométrique.

Les courbes asymptotiques sur la surface satisfont à l'équation différentielle

(22) $[A_0A_1A_2d^2A_0] = a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0$

tandis que le réseau $\mathcal{S}$ est donné par l'équation $\omega^1\omega^2 = 0$. Considérons le réseau de courbes qui sépare harmoniquement le réseau $\mathcal{S}$ et le réseau asymptotique et qui est déterminé par l'équation

$$(23)\quad \begin{vmatrix} a\omega^1 + b\omega^2 & b\omega^1 + c\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^1 \end{vmatrix} = a(\omega^1)^2 - c(\omega^2)^2 = 0.$$

Supposant en outre qu'aucune des deux couches du réseau $\mathcal{S}$ ne soit pas engendrée par les courbes asymptotiques de sorte que $a \neq 0$, $c \neq 0$. Il est aisé de voir que l'on peut choisir le point $A_1 + A_2$ sur la tangente d'une couche du réseau en question et que le choix considéré peut être réalisé en posant

(24) $c = \varepsilon a, \quad \varepsilon = \pm 1$

suivant que le réseau (23) est réel ou imaginaire.

On a ensuite, en vertu de (7) et (14) $e_1^1 = \frac{1}{2}\frac{b}{a}(\varepsilon e_2^1 - e_1^2)$ et ils ne restent que deux formes secondaires libres e_1^2, e_2^1. Un réseau $\mathcal{S}$ étant choisi sur la surface en question on peut annuler ces deux formes en choisissant les points A_1, A_2 sur les tangentes des courbes du réseau $\mathcal{S}$. Si l'on annulle les formes e_1^2, e_2^1 d'une manière tout à fait arbitraire, on obtient le repère semicanonique de la surface par rapport à un réseau $\mathcal{S}$ quelconque. Les équations différentielles correspondantes sont

$$dA_o = \omega_o^o A_o + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2$$

$$dA_1 = (a\omega_3^1 + b\omega_3^2) A_o + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 +$$

$$+ (a\omega^1 + b\,\omega^2) A_3$$

(25)

$$dA_2 = (b\omega_3^1 + \varepsilon\, a\omega_3^2) A_o + \omega_2^1 A_1 - \omega_1^1 A_2 +$$

$$+ (b\omega^1 + \varepsilon\, a\omega^2) A_3$$

$$dA_3 = \omega_3^o A_o + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 - \omega_o^o A_3$$

où, d'après (10) et (24),

(26) $$b^2 - \varepsilon\, a^2 = 1 .$$

Pour abréger, nous omettons les conditions d'intégrabilité des équations (25).

Pour $b = 0$, c'est-à-dire dans le cas spécial d'un réseau conjugué le repère (25) se confond avec le repère C considéré par R.N. Ščerbakov [5].

Tous les coefficients des équations (25) sont des invariants du réseau de courbes sur la surface. Nous donnerons leurs signification géométrique dans les cas les plus simples et nous poserons pour cela $\omega_i^j = a_i^j\, \omega^1 + b_i^j\, \omega^2$.

Les coefficients a, b liées par la rélation précédente (26), déterminent l'équation (22) et ils correspondent donc au rapport anharmonique des tangentes du réseau $\mathcal{S}$ et des tangentes asymptotiques.

La signification géométrique des coefficients a_1^2, b_1^2 , a_2^1 , b_2^1 est la suivante: Le plan tangent au point

$b_1^2 A_o - A_1$, resp. $a_2^1 A_o - A_2$ de la surface réglée , qui est engendrée par les tangentes $[A_0A_1]$, resp. $[A_0A_2]$ le long d'une des courbes de la couche $\omega^1 = 0$, resp. $\omega^2 = 0$, passe par la première directrice de Wilczynski. Le point $(b\, a_1^2 - a\, b_1^2) A_o + a A_1$, resp. $(\varepsilon b\, b_2^1 - a\, a_2^1) A_o + a A_2$ est le second foyer de la congruence $[A_0A_1]$, resp. $[A_0A_2]$.

Les coefficients a_3^1, b_3^2 ont la signification géométrique suivante: Le plan tangent au point $a_2^1 A_o - A_3$, resp. $b_3^2 A_o - A_3$ de la surface réglée engendrée par la première directrice de Wilczynksi le long d'une de courbes de la couche $\omega^2 = 0$, resp. $\omega^1 = 0$ passe par la droite $[A_0A_2]$, resp. $[A_0A_1]$.

L'étude plus détaillée du réseau de courbes sur la surface, fondée sur la méthode considérée dans ce travail, fait le contenu de l'article [7].

L i t é r a t u r e

[1] E. CARTAN, La théorie des groupes finies et continus et la géométrie différentielle, Paris 1937.

[2] S.P. FINIKOV, La méthode des formes extérieures de Cartan (en russe), Moscou 1948.

[3] G.F. LAPTĚV, La géométrie différentielle des variétés plongées (en russe), Trudy mosk.mat.obšč. 2 (1953), 275-382.

[4] J. FAVARD, Cours de Géométrie différentielle locale, Paris 1957.

[5] R.N. ŠČERBAKOV, Cours de la géométrie différentielle affine et projective (en russe), Tomsk 1960.

[6] R.N. ŠČERBAKOV, Sur la méthode du repérage des sous-variétés (en russe). Trudy Tomsk. gos. univ.

168(1963), 5 - 11.

[7] I. KOLÁŘ, Le repère d'un réseau sur la surface plongée dans l'espace projective, Čas.pěst.mat. 1965.