Rostislav Zezula

Über eine Näherungsmethode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben der Reaktortheorie

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 3 (1962), No. 2, 37--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104911

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
3, 2 (1962)

ÜBER EINE NÄHERUNGSMETHODE ZUR LÖSUNG GEWISSER RANDWERTAUFGA- -BEN DER REAKTORTHEORIE

Rostislav ZEZULA, Praha

Einleitung

Wir werden die Möglichkeit der Lösung gewisser Randwertaufgaben der Reaktortheorie, die nichtlinear von einem Parameter abhängen, durch Überführung auf ein unendliches homogenes lineares Gleichungssystem untersuchen. Wir werden zeigen, dass man, unter gewissen Voraussetzungen, dieses homogene System durch Auslassen der ersten Gleichung auf ein unhomogenes System überführen und lösen kann, indem man mit Hilfe der Reduktionsmethode die konvergente Folge der angenäherten Eigenwerte, welche der ersten Gleichung des reduzierten homogenen Systems genügen, und die schwach konvergente Folge der angenäherten Eigenvektoren, die die Lösung der reduzierten unhomogenen Systeme sind, konstruiert. Zuletzt werden die numerischen Vorteile der von uns betrachteten Methode im Vergleich mit einigen anderen bekannten Lösungsmethoden besprochen.

— — —

Die physikalisch einfachste mathematische Beschreibung eines zylindrischen homogenen Reaktors ohne Reflektor mit den extrapolierten Grenzen $R, \pm \frac{H}{2}$ und mit einem zylindrischen Regulierungsstab, der sich in einer zylindrischen Axialhöhlung vom gleichen Halbmesser a bewegt, ist (mit

Hinsicht auf die Anordnungssymmetrie) durch folgendes zweidimensionales Randwertproblem zur Bestimmung des Neutronenflusses $\varphi(r,z)$ gegeben

$$\Delta\varphi + B^2\varphi = 0 \tag{1}$$

$$\varphi(R,z) = \varphi(r, \pm\frac{H}{2}) = 0 \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial n}\right]_{r=a} = \left[\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial r}\right]_{r=a} = K\varphi(a,z) \tag{3}$$

Operator K ist eine Näherung des schwer zu bestimmenden genauen linearen Operators, die wir [2] in der Form

$$K\varphi(a,z) = \vartheta(z) \cdot \varphi(a,z) \tag{4}$$

annehmen, wo $\vartheta(z)$ eine für $-\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2}$ stückweise konstante Funktion bedeutet:

$$\vartheta(z) = -\vartheta_i \qquad (z_{i-1} \leq z \leq z_i, \quad z_0 = -\frac{H}{2}, \; i = 1,2,\dots,n_0$$
$$\vartheta_i > 0 \qquad\qquad z_{n_0} = +\frac{H}{2} \tag{5}$$

Wenn wir

$$\vartheta = \min \vartheta_i \tag{6}$$

$$\varkappa = \max \vartheta_i \quad (i = 1,2,\dots,n_0) \tag{7}$$

bezeichnen, so sieht man leicht ein, dass der Operator K beschränkt ist.

Die Methode von Fourier ermöglicht es uns [1], leicht eine Folge von Funktionen $\varphi_k(r,z,B^2)$ zu gewinnen, die für jeden Wert des Parameters $B^2 = \lambda$ der Gleichung (1) und den Randbedingungen (2) genügen:

$$\varphi_k(r,z,B^2) = \frac{h_k(r,B^2)}{h_k(a,B^2)} \cdot g_k(z) \qquad \begin{array}{c} k = 1,2,\dots \\ a \leq |r| \leq R \\ -\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2} \end{array} \tag{8}$$

wo

$$h_k(r,B^2) = J_0(\sqrt{B^2-\alpha_k^2}\,.\,r)\; Y_0(\sqrt{B^2-\alpha_k^2}\,.\,R)$$
$$-Y_0(\sqrt{B^2-\alpha_k^2}\,.\,r)\,.\,J_0(\sqrt{B^2-\alpha_k^2}\,.\,R) \qquad \left(\alpha_k = \frac{k\pi}{H}\right) \tag{9}$$

$$g_k(x) = \begin{cases} \cos\alpha_k x & \text{für } k = 2n+1 \\ \sin\alpha_k x & \text{für } k = 2(n+1) \end{cases} \tag{10}$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Definieren wir jetzt den Hilbertschen Unterraum

$H\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right) \subset L^2\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right)$ der Funktionen $\varphi(r,x,B^2)$, welche sämtlich die Randbedingungen (2) erfüllen, als die Abschliessung der linearen Hülle des Funktionensystems (8). Vollständiges System der Eigenfunktionen (10) bildet eine orthogonale Basis dieses Unterraumes H. Mit Hinsicht auf die Randbedingung (3) kommen nur diejenigen Funktionen $\varphi(r,x,B^2) \in H$ in Betracht, für welche die beiden folgenden Entwicklungen nach dem Eigenfunktionensystem (10) im H konvergieren

$$\varphi(r,x,B^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot \frac{h_k(r,B^2)}{h_k(a,B^2)} \cdot g_k(x) \qquad \begin{matrix} (a \le |r| \le R) \\ (\lambda_1 \le B^2 \le \lambda_2) \end{matrix} \tag{11}$$

$$\psi(r,x,B^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial r} h_k(r,B^2)}{h_k(a,B^2)} \cdot g_k(x) \tag{12}$$

Wir setzen also voraus, dass im Unterraum H eine Lösung $\varphi(r,x,B^2)$ der Gleichung (1) existiert, welche die Bedingungen (11), (12) erfüllt (sodass $\psi(r,x,B^2)$) eine Ersatzfunktion für die Ableitung $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ der Funktion $\varphi(r,x,B^2)$

ist). Wenn wir den Operator K und den Vektor $\psi(a,z)$ mittels der Basis (10) darstellen, so führt uns die Randbedingung $\psi = K\varphi$ auf ein unendliches homogenes lineares Gleichungssystem [2]

$$-\frac{H}{2}\,\frac{\frac{\partial}{\partial r} h_i(r,B^2)\mid r=a}{h_i(a,B^2)}\,\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} K_{ik}\,\xi_k \qquad (i = 1,2,\dots) \tag{13}$$

wo K_{ik} die Matrixelemente des Operators K in der Basis (10) bedeuten.

Durch das homogene Gleichungssystem (13) werden die Eigenwerte des Parameters $B^2 = \lambda$ sowie die diesen Eigenwerten entsprechenden Eigenfunktionen $\varphi(r,z,B^2) \in H$ bestimmt, und wir können sie numerisch ermitteln.

Im folgenden Lemma 1 werden wir zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen auch umgekehrt die Funktion $\varphi \in H$, welche durch die Reihe (11) der Lösung des unendlichen homogenen linearen Gleichungssystems (13) zugeordnet ist, eine Lösung unseres Randwertproblems (1), (2), (3) im gewissen Sinne verallgemeinert.

<u>Lemma 1.</u> Setzen wir voraus, dass

1) es existiert ein Wert $B_0^2 \in \langle\lambda_1,\lambda_2\rangle$, für welchen das unendliche homogene Gleichungssystem (13) eine nichttriviale Lösung $(\xi_1(B_0^2), \xi_2(B_0^2), \dots)$ besitzt,

2) für jedes r, $a \le |r| \le R$ und für jedes reelle $B^2 = \lambda \in \langle\lambda_1,\lambda_2\rangle$ konvergieren die Reihen (11), (12) und die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot \frac{\frac{\partial^2}{\partial r^2} h_k(r,B^2)}{h_k(a,B^2)} \cdot g_k(z) = \omega(r,z,B^2) \tag{14}$$

(wo die Funktionen $h_k(r, B^2)$, $g_k(x)$ durch (9), (10) gegeben sind) im Mittel im Raume $\mathcal{L}^2\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right)$.

Dann gilt: die Funktion

$$\varphi(r, x, B_0^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (B_0^2) \cdot \frac{h_k(r, B_0^2)}{h_k(a, B_0^2)} g_k(x) \in H$$

ist eine Lösung des verallgemeinerten Randwertproblems (17), (2), (15).

Beweis:

Laut unserer Definition des Unterraumes $H\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right) \subset \mathcal{L}^2\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right)$ gilt

$$\varphi(r, x, B^2) \in H\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right) .$$

Nach Voraussetzung 2 ist die Funktion $\psi(r, x, B^2)$ ein Ersatz für die Ableitung (in Richtung der Normale) der Funktion $\varphi(r, x, B^2)$, sodass die Randbedingung (3) folgendermassen ersetzt werden kann

$$\psi(a, x, B^2) = K\varphi(a, x, B^2) \tag{15}$$

was in der Basis (10) des Unterraumes $H\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right)$ mit dem linearen Gleichungssystem (13) äquivalent ist.

Die Teilsummen der Reihe

$$\varphi(r, x, B^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{h_k(r, B^2)}{h_k(a, B^2)} g_k(x)$$

und infolgedessen auch die Funktion $\varphi(r, x, B^2)$ selbst, genügen der Randbedingung (2). Nach Voraussetzung (14) existiert eine Ersatzfunktion für zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi(r, x, B^2) = \omega .$$

Da die Teilsummen der Reihen (11) für $\varphi(r, x, B^2)$ und (14) für $\omega(\varkappa, x, B^2)$ der Gleichung (1) genügen, so muss auch die Ersatzfunktion für die zweite Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(\varkappa, x, B^2)$

$$\rho(\varkappa, x, B^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_k(x) \cdot \frac{h_k(\varkappa, B^2)}{h_k(a, B^2)} \tag{16}$$

existieren und es gilt die Relation

$$\omega(\varkappa, x, B^2) + \rho(\varkappa, x, B^2) + B^2 \varphi(\varkappa, x, B^2) = \theta\,, \tag{17}$$

welche im Falle, dass die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ existieren, mit der Gleichung (1) äquivalent ist.

Mit Hinsicht auf Lemma 1 werden wir also vor die Aufgabe gestellt, die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen eine Lösung des unendlichen homogenen linearen Gleichungssystems existiert. Diese Aufgabe ist so weitgehend, dass es als zweckmässig erscheint, unser ursprüngliches Randwertproblem (1), (2), (3) gewissermassen zu verallgemeinern, indem man in der Randbedingung (3) anstatt des Operators $\frac{\partial}{\partial n}$ den allgemeineren Operator $N(\lambda)$ nimmt, der durch die Relation

$$N(\lambda) \cdot g_k = \varkappa_k(\lambda) \cdot g_k \qquad (k = 1, 2, \dots) \tag{18}$$

definiert wird, wo $\varkappa_k(\lambda)$ gegebene, stetig differenzierbare Funktionen sind, welche den Ungleichungen

$$C_1 \leq \varkappa_k(\lambda) \leq C_2 \qquad (k \geqslant 2) \tag{19}$$

genügen, sodass der Operator $N(\lambda)$ linear und beschränkt ist.

Es sei also im Unterraum $H(a, b)$ des Hilbertschen Raumes $L^2(a, b)$ die Operatorengleichung

$$R(\lambda)y = (N(\lambda) - K)y = \theta \tag{20}$$

gegeben, welche der Randbedingung (3) unseres Randwertproblems (1), (2), (3) entspricht.

Es sei weiter

$$A(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}(\lambda) & -c \\ \hline -b & D(\lambda) \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \\ b = (\beta_1, \beta_2, \ldots) \\ D(\lambda) = (d_{ik}(\lambda)) \\ i, k = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{21}$$

die Matrixdarstellung des beschränkten Operators $R(\lambda)$ in der Basis $\{\psi_n = g_n\}$ des Unterraumes $H(a,b) \subset L^2(a,b)$, so dass gilt:

$$c = ((K^*\psi_1, \psi_2), (K^*\psi_1, \psi_3), \ldots) \in \ell^2$$
$$b = ((K\psi_1, \psi_2), (K\psi_1, \psi_3), \ldots) \in \ell^2$$

$$d_i(\lambda) = (d_{i1}(\lambda), d_{i2}(\lambda), \ldots) = ((R^*(\lambda)\psi_{i+1}, \psi_2), (R^*(\lambda)\psi_{i+1}, \psi_3) \ldots \ldots) \in \ell^2$$

Betrachten wir das Eigenwertproblem im Hilbertschen Raume ℓ^2, welches durch die Operatorengleichung

$$A(\lambda) \cdot y = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}(\lambda) & -c \\ \hline -b & D(\lambda) \end{array}\right) y = \theta \tag{22}$$

gegeben wird und für $N(\lambda) = \frac{\partial}{\partial n}$ mit dem unendlichen homogenen linearen Gleichungssystem (13) zusammenfällt. Da der Eigenvektor y nur bis auf ein konstantes Koeffizient be - stimmt wird, so können wir

$$y(\lambda) = (1, \xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \ldots) \tag{23}$$

setzen und die erste Gleichung im System (22) beiseitelassen, so dass wir für jedes feste $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ anstatt des homogenen Systems (22) das unhomogene unendliche lineare Gleichungssystem

$$D(\lambda) \cdot x(\lambda) = b \tag{24}$$

zur Bestimmung des Vektors

$$x(\lambda) = (\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \dots) \in \ell^2 \tag{25}$$

erhalten. Wenn dieser Vektor von λ überhaupt nicht abhängig ist, und wenn ein Wert $\lambda^* \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ existiert, der die linke Seite der ersten Gleichung in (22) verschwinden lässt, sodass

$$c \cdot x(\lambda^*) = a_{11}(\lambda^*) \tag{26}$$

gilt, dann ist der Vektor $y = (1, \xi_1, \xi_2, \dots)$ ein Eigenvektor des Operators $A(\lambda)$, der zum Eigenwert λ^* gehörig ist.

In der Praxis kann es vorkommen, dass der Vektor x in (24) nur schwach von λ abhängig ist. In diesem Falle kann man, wie weiter gezeigt wird, mit Hilfe der Reduktionsmethode und der Banachschen Iteration, eine Folge der "angenäherten Eigenwerte" $\lambda_k \to \lambda^*$ und die entsprechende Folge der dazugehörigen "angenäherten Eigenvektoren"

$$y_k = (1, \xi_1^{(k)}(\lambda^*), \xi_2^{(k)}(\lambda^*), \dots, \xi_k^{(k)}(\lambda^*), \theta, \theta, \dots) \to y(\lambda^*)$$

konstruieren.

Wir wenden uns deshalb zur Frage über die Konvergenz der Reduktionsmethode zur Lösung des unhomogenen Gleichungssystems (24), auf welches man das homogene Gleichungssystem (22) überführen kann. Die Konvergenzfrage werden wir dabei ganz allgemein, ohne jegliche Hinsicht auf unser Randwertproblem (1), (2), (3) betrachten.

Zuerst führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Es sei E_n der reelle n-dimensionale Euklidische Raum. Es sei weiter im reellen Hilbertschen Folgenraume ℓ^2 die Operatorengleichung

$$D x = b \tag{27}$$

vorgelegt, wo $D \in (\ell^2 \to \ell^2)$ gegebener linearer beschränkter Operator und $b = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in R_D \subset \ell^2$ gegebenes Element ist.

Bezeichnen wir als $(d_{ik}) = (De_k, e_i)$ die Matrixdarstellung des Operators D und

$$b^{(n)} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in E_n$$

die Projektion des Vektors b auf E_n.

Wenn wir noch die weitere Voraussetzung machen, dass die "abgeschnittenen" quadratischen Matrizen

$$D^{(n)} = (d_{ik}) \qquad (1 \le i, k \le n)$$

für alle $n \geq N$ nicht singulär sind, so existiert die Folge der Vektoren $x^{(n)}$, die mit Hilfe der Reduktionsmethode erworben wurden:

$$x^{(n)} = [D^{(n)}]^{-1} b^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}) \in E_n \tag{28}$$

Definieren wir

$$x_n^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}, \theta, \theta, \dots) \in \ell^2 \tag{29}$$

$$b_n = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \theta, \theta, \dots) \in \ell^2 \tag{30}$$

$$D_n = \left(\begin{array}{c|c} D^{(n)} & \theta \\ \hline \theta & \theta \end{array}\right) \in (\ell^2 \to \ell^2), \quad H_n = \left(\begin{array}{c|c} [D^{(n)}]^{-1} & \theta \\ \hline \theta & \theta \end{array}\right) \in (\ell^2 \to \ell^2) \tag{31}$$

so folgt aus der Relation (28)

$$D_n x_n^{(n)} = b_n, \qquad x_n^{(n)} = H_n \cdot b_n \tag{32}$$

Jetzt können wir schon den folgenden Satz über die schwache Konvergenz der Reduktionsmethode für die Lösung des unhomogenen unendlichen linearen Gleichungssystems (27) beweisen:

Satz 1: Wenn der lineare beschränkte Operator $D \in (l^2 \to l^2)$ den folgenden drei Bedingungen genügt

1) für alle $n \geq N$ sind die Matrizen $D^{(n)}$ nicht singulär, so dass die Vektoren $x_n^{(n)} = H_n b_n$ existieren,

2) es existiert ein linearer beschränkter Operator $V \in (l^2 \to l^2)$, der für alle $x \in l^2$ definiert ist und die Relation

$$x \in l^2 \Longrightarrow \quad V(Dx) = x \tag{33}$$

erfüllt.

3) es ist für alle $n \geq N$

$$\| D x_n^{(n)} \| \leq C, \tag{34}$$

so gilt: 1) die Folge der mit Hilfe der Reduktionsmethode erworbenen Vektoren $x_n^{(n)} = H_n b_n \in l^2$ konvergiert schwach gegen das Element $Vb \in l^2$

$$H_n b_n = x_n^{(n)} \rightharpoonup Vb \tag{35}$$

2) das Element Vb ist die Lösung der Gleichung (27)

$$D(Vb) = b \tag{36}$$

Beweis:

Offensichtlich ist $b_n = D_n \cdot x_n^{(n)} \to Dx = b$.

Es gilt aber auch, wie wir gleich beweisen,

$$Dx_n^{(n)} \longrightarrow Dx = b. \tag{37}$$

Denn es ist $\quad Dx_n^{(n)} = D_n x_n^{(n)} + (D - D_n) x_n^{(n)}$,

so dass für beliebiges $\quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^2$

die Gleichung

$$(Dx_n^{(n)}, y) = (D_n x_n^{(n)}, y) + ((D - D_n) x_n^{(n)}, y)$$

gilt.

Für die Folge der Vektoren

$$y_n = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, 0, \dots) \in l^2$$

gilt offensichtlich $\quad y_n \longrightarrow y$.

Aus der Konstruktion der Matrizen D_n sieht man leicht ein, dass für jedes $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt

$$((D - D_n) x_n^{(n)}, y_n) = \theta \quad . \tag{38}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} (D - D_n) x_n^{(n)}, y_n) = \theta .$$

Wir haben also

$$\lim_{n\to\infty} (Dx_n^{(n)}, y_n) = \lim_{n\to\infty} (D_n x_n^{(n)}, y_n) = (Dx, y). \tag{39}$$

Für jedes $y \in l^2$ ist die folgende Beziehung richtig

$$\lim_{n\to\infty} (Dx_n^{(n)}, y) = \lim_{n\to\infty} (D x_n^{(n)}, y_n + (y - y_n) = (Dx, y) + \lim_{n\to\infty} (Dx_n^{(n)}, y - y_n)$$

Nach der Voraussetzung (34) muss aber gelten

$$|(Dx_n^{(n)}, y - y_n)| \leq \| Dx_n^{(n)} \| \cdot \| y - y_n \| \leq C \cdot \| y - y_n \| \to \theta , \tag{40}$$

so dass $(Dx_n^{(n)}, y - y_n)$ eine Nullfolge ist. Wir haben also

$$y \in l^2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (Dx_n^{(n)}, y) = (Dx, y) = (b, y) \tag{41}$$

was mit der Beziehung (37) äquivalent ist, die zu beweisen war. Infolge der Voraussetzung 2 des Satzes existiert ein adjungierter Operator $V^* \in (\ell^2 \to \ell^2)$ und es gilt

$$y \in \ell^2 \Rightarrow (x_n^{(n)}, y) = (V \cdot D x_n^{(n)}, y) = (D x_n^{(n)}, V^* y),$$

folglich

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^{(n)}, y) = \lim_{n\to\infty} (D x_n^{(n)}, V^* y) = (Dx, V^* y) = (b, V^* y) = (Vb, y). \qquad (42)$$

Es ist also auch

$$x_n^{(n)} \rightharpoonup Vb .$$

Da wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, D^* e_i)^2 = \| D^* e_i \|^2 \leq \| D^* \|^2 < \infty$$

haben, so gilt $d_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots) \in \ell^2 \quad (i = 1, 2, \dots)$ (43)

Nach (32) ist für $i = 1, 2, \dots, n$

$$(d_i , x_n^{(n)}) = (x_n^{(n)}, d_i) = \beta_i ,$$

also nach (42) auch

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^{(n)}, d_i) = (Vb, d_i) = (d_i, Vb) = \beta_i \qquad (44)$$

bei jedem $i = 1, 2, \dots$, was in der Matrixform geschrieben $D\,Vb = b$ gibt. Damit ist die gesamte Behauptung des Satzes 1 bewiesen.

<u>Bemerkung 1.</u>

Satz 1 gilt, wie aus seinem Beweise ersichtlich ist, nicht nur für die Operatoren D_n und Vektoren $x_n^{(n)}$, welche mittels der Reduktionsmethode definiert sind, sondern auch für jede Folge der linearen begrenzten inventierbaren Operatoren $\{D_n\}$ und Vektoren $\{x_n^{(n)}\}$, $\{b_n\}$, welche im Hilbertschen Raume für den gegebenen linearen beschränkten Operator D und für das gegebene Element $b = Dx \in \ell^2$ den folgenden drei Bedingungen genügen:

1) $b_n \to b = Dx$ (45)

2) für jedes $n = 1, 2, \ldots$ existiert die Lösung
$x_n^{(n)} = H_n b_n \in l^2$ der Gleichung $D_n x_n^{(n)} = b_n$ (46)

3) für beliebiges $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in l^2$ gilt, wenn wir $y_n = (\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \vartheta \ldots) \in l^2$ bezeichnen, die Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} ((D - D_n) x_n^{(n)}, y_n) = \vartheta \tag{47}$$

Bemerkung 2.

Die Voraussetzung 1 im Satz 1 ist sicher erfüllt, wenn der Operator D positiv ist, weil dann bei jedem $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\det D^{(n)} = \det (d_{ik})_{i,k=1,2,\ldots n} = \det ((De_i, e_k)) \neq \vartheta$$

die bekannte Gramsche Determinante ist. In diesem Falle ist die Methode der Reduktion nur ein Spezialfall der Ritzschen Methode. Auch die Voraussetzung 2 dieses Satzes wird offensichtlich erfüllt sein, wenn der inverse Operator D^{-1} existiert und auf einer überalldichten Teilmenge $R_D \subset l^2$ definiert und begrenzt ist.

Bemerkung 3.

Die Voraussetzung 2 im Satz 1, die offensichtlich für einige Operatoren D nicht erfüllt wird, kann man folgendermassen ersetzen:

2 a) Es existiert die Lösung $x \in l^2$ der Operatoren - gleichung $Dx = b$ und zu jedem $y \in l^2$ gibt es eine Lösung $z \in l^2$ der Gleichung

$$y = D^* z \tag{33 a}$$

Die Behauptung $Dx_n^{(n)} \to Dx = b$ wird in diesem Falle offensichtlich ihre Gültigkeit behalten, und für beliebiges $y \in l^2$

werden die folgenden Beziehungen gelten

$$(x_n^{(n)}, y) = (x_n^{(n)}, D^* z) = (D x_n^{(n)}, z) \to (Dx, z) = (x, D^* z) = (x, y)$$

so dass wir wieder $x_n^{(n)} \longrightarrow x$, $Dx = b$ haben.

Mit der Hilfe des Satzes 1 werden wir jetzt im folgenden Satze in der schon angedeuteten Weise, unter Zuhilfenahme weiterer Voraussetzungen, welche die schwache Abhängig - keit des Vektors $x(\lambda)$ in (24) vom Parameter λ ausdrücken, das Eigenwertproblem (22) lösen.

Satz 2.

Es sei im Hilbertschen Folgenraume die Operatorengleichung (22) gegeben, wo die Funktionen $a_{11}(\lambda), d_{ik}(\lambda)$ gegebene stetig differenzierbare Funktionen von λ und $c \in \ell^2$, $b \in \ell^2$ gegebene Vektoren sind.

Machen wir folgende Voraussetzungen:

1) Der lineare begrenzte Operator $D(\lambda)$ erfüllt für alle $\lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ die Voraussetzungen des Satzes 1 (sodass die Lösung $x(\lambda) = (\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \dots) \in \ell^2$ der Operatoren - gleichung

$$D(\lambda) \cdot x(\lambda) = b$$

für jedes $\lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ existiert (siehe Satz 3)).

2) Zu der Funktion $a_{11}(\lambda)$ existiert im Intervalle $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ die stetig differenzierbare inverse Funktion $h(\lambda)$, so dass für jedes $\lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ gilt

$$h(a_{11}(\lambda)) = \lambda \tag{48}$$

3) Für jedes $\lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ und für $k \geq N$ erfüllen die Vektoren $x_k^{(k)}(\lambda) = H_k(\lambda) \cdot b_k$ die Bedingung

$$\frac{d}{d\lambda} x_k^{(k)}(\lambda) = \left(\frac{d}{d\lambda} \xi_1^{(k)}(\lambda), \frac{d}{d\lambda} \xi_2^{(k)}(\lambda), \dots\right) = q^{(k)} \in \ell^2 \tag{49}$$

$$\|q^{(k)}\| \leq M .$$

4) Es gilt für alle $k \geqslant N$

$$\left|\frac{d}{d\lambda} g_k(\lambda)\right| = \left|\frac{d}{d\lambda}\left[h(c, x_k^{(k)}(\lambda))\right]\right| \leqq \max_{\lambda \in \langle\lambda_1,\lambda_2\rangle} \frac{1}{\left|\frac{d a_{11}(\lambda)}{d\lambda}\right|} \left|(c, q^{(k)})\right| \leqslant \alpha < 1 \qquad (50)$$

wo die Funktionen $g_k(\lambda)$ das Intervall $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ in sich abbilden.

Dann sind folgende Behauptungen richtig:

1) Für jedes $k \geqslant N$ und für beliebiges $\lambda_k^{(0)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$

konvergieren die Banachschen Iterationen

$$\lambda_k^{(m+1)} = h[(c, x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)})] = h[(c, H_k(\lambda_k^{(0)}) b_k) + (\lambda_k^{(m)} - \lambda_k^{(0)}) \cdot (c, q^{(k)})] \to \lambda_k \qquad (51)$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

2) Die Zahlenfolge $\{\lambda_k = h[(x_k^{(k)}(\lambda_k), c)] \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle\}$

ist beschränkt, sodass ihr Limes inferior

$$\lambda^* = \lim\inf \lambda_k \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \qquad (52)$$

existiert.

3) Die Folge der Vektoren $x_k^{(k)}(\lambda^*) = H_k(\lambda^*) b_k$ ist schwach gegen das Element $x(\lambda^*) = V(\lambda^*) b$ konvergent:

$$x_k^{(k)}(\lambda^*) \rightharpoonup x(\lambda^*) = V(\lambda^*) b = (\xi_1(\lambda^*), \xi_2(\lambda^*), \ldots) \in \ell^2 . \qquad (53)$$

4) Vektor $y(\lambda^*) = (1, \xi_1(\lambda^*), \xi_2(\lambda^*), \ldots) \in \ell^2$ genügt der Operatorengleichung

$$A(\lambda^*) \cdot y(\lambda^*) = \theta , \qquad (54)$$

so dass λ^* ein Eigenwert des Operators $A(\lambda)$ und $y(\lambda^*)$ ein zu diesem Eigenwert gehöriger Eigenvektor ist.

<u>Beweis</u>:

Nach dem Satz 1 gilt für jedes $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$

$$x_k^{(k)}(\lambda) = (\xi_1^{(k)}(\lambda), \xi_2^{(k)}(\lambda), \ldots, \xi_k^{(k)}(\lambda), \theta, \ldots) \rightharpoonup x(\lambda) = (\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \ldots)$$

und also $(x_k^{(k)}(\lambda), c) \longrightarrow (x(\lambda), c)$.

Aus den Gründen der endlichen Dimension sind die Koordinaten

$\xi_i^{(k)}(\lambda)$ der Vektoren $x_k^{(k)}(\lambda)$ stetig differenzierbare Funktionen des Parameters λ.

Da nach Voraussetzung 2 des Satzes die inverse Funktion $h(\lambda)$ stetig ist, so gilt

$$h[(x_k^{(k)}(\lambda), c)] \to h[(x(\lambda), c)]$$

Bestimmen wir den Wert $\lambda_k \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ aus der Bedingung, dass der Vektor $y_k = (1, \xi_1^{(k)}(\lambda), \ldots, \xi_k^{(k)}(\lambda), \theta, \ldots)$ für $\lambda = \lambda_k$ die linke Seite in der ersten Gleichung des homogenen Systems (22) gleich Null macht:

$$a_{11}(\lambda_k) = (c, x_k^{(k)}(\lambda_k)) \qquad (k \geqslant N) \tag{55}$$

Dann haben wir für beliebig gewähltes $\lambda_k^{(0)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$

$$\begin{aligned} \lambda_k = h(a_{11}(\lambda_k)) &= h[(c, x_k^{(k)}(\lambda_k)] \\ &= h[(c, x_k^{(k)}(\lambda_k^{(0)}) + (\lambda_k - \lambda_k^{(0)}) q^{(k)})] \\ &= h[(c, H_k(\lambda_k^{(0)}) b_k) + (\lambda_k - \lambda_k^{(0)}) \cdot (c, q^{(k)})] \\ &= h[r^{(k)}(\lambda_k)]. \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Funktion $g^{(k)}(\lambda) = h[r^{(k)}(\lambda)]$ (wo $r^{(k)}(\lambda) = (c, x_k^{(k)}(\lambda)) = (c, H_k(\lambda_k^{(0)}) b_k) + (\lambda - \lambda_k^{(0)}) \cdot (c, q^{(k)})$)

ist, da nach Voraussetzung 4 des Satzes

$$\left|\frac{d}{d\lambda} g^{(k)}(\lambda)\right| = \left|\frac{dh}{dr^{(k)}} \cdot \frac{dr^{(k)}}{d\lambda}\right| \leq \max_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \frac{1}{\left|\frac{d a_{11}(\lambda)}{d\lambda}\right|} |(c, q^{(k)})| \leq \alpha < 1$$

gilt, ein Lipschitzscher Operator auf dem Intervall $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, so dass nach dem Banachschen Fixpunktsatze die (leicht berechenbaren) Iterationen

$$\lambda_k^{(m+1)} = g^{(k)}(\lambda_k^{(m)}) = h[(c, H_k(\lambda_k^{(0)}) b_k) + (\lambda_k^{(m)} - \lambda_k^{(0)}) \cdot (c, q^{(k)})]$$

für beliebiges $\lambda_k^{(0)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ gegen einen und denselben Wert

$$\lambda_k = \lim_{m \to \infty} \lambda_k^{(m+1)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \tag{56}$$

konvergieren, und die Zahlenfolge $\{\lambda_k\}$ beschränkt ist.

Es existiert also der Wert $\lambda^* = \liminf \lambda_k \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ und es gilt nach dem Satz 1

$$x_k^{(k)}(\lambda^*) \to x(\lambda^*), \qquad D(\lambda^*)x(\lambda^*) = b \tag{57}$$

Weiter haben wir, infolge der Voraussetzung 3 des Satzes, für geeignet ausgewählte Teilfolge $\lambda_{k_i} \to \lambda^*$

$$\theta = a(\lambda_{k_i}) + (-c, x_{k_i}^{(k_i)}(\lambda_{k_i})) =$$

$$= a(\lambda_{k_i}) + (-c, x_{k_i}^{(k_i)}(\lambda^*) + (\lambda_{k_i} - \lambda^*)\cdot(-c, q^{(k_i)}).$$

Daraus bekommen wir durch den Grenzübergang $k_i \to \infty$

$$\theta = a(\lambda^*) + (-c, x(\lambda^*)) \tag{58}$$

was zusammen mit der Beziehung (57)

$$\theta = -b + D(\lambda^*)\, x(\lambda^*)$$

in der Matrixform geschrieben $A(\lambda^*)\cdot y(\lambda^*) = \theta$ gibt, w.z.b.w.

Bemerkung 4.

Aus dem Beweise des Satzes 2 ist leicht einzusehen, dass jeder Häufungspunkt der Folge $\{\lambda_k\}$ ein Eigenwert des Eigenwertproblems (22) ist. Verhält sich die Folge $\{\lambda_k\}$ monoton, oder ist das Intervall $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ so klein, dass es nur einen Eigenwert enthält, so haben wir also $\lambda^* = \lim_{k\to\infty} \lambda_k$.

Bemerkung 5.

Da die Matrizen $D^{(m)}$ endlichdimensional sind und infolge der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen $d_{ik}(\lambda)$ $(i,k=1,2,\dots)$ die Koordinaten der Vektoren $x_k^{(k)}(\lambda)$ stetige Funktionen von λ sind, so gilt für jedes feste $k \geqslant N$

$$\lambda_m \to \lambda^* \Longrightarrow \|x_k^{(k)}(\lambda_m) - x_k^{(k)}(\lambda^*)\| = |\lambda_m - \lambda^*|\cdot\|q^{(k)}\| \leqslant |\lambda_m - \lambda^*|\cdot M \to \theta; \tag{59}$$

die Konvergenz ist also gleichmässig in Bezug auf den Index k. Infolgedessen gilt bei jedem festen $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ auch

$$\lim_{k \to \infty} \| x_k^{(k)}(\lambda_{k-p}) - x_k^{(k)}(\lambda^*) \| = \theta$$

und also
$$x_k^{(k)}(\lambda_{k-p}) - x_k^{(k)}(\lambda^*) \to \theta, \tag{60}$$

so dass wir für den beliebigen Vektor $w \in l^2$

$$(x_k^{(k)}(\lambda_{k-p}) - x(\lambda^*), w) = (x_k^{(k)}(\lambda_{k-p}) - x_k^{(k)}(\lambda^*), w) + (x_k^{(k)}(\lambda^*) - x(\lambda^*), w) \to \theta$$

haben, was mit der schwachen Konvergenz

$$x_k^{(k)}(\lambda_{k-p}) \rightharpoonup x(\lambda^*) \tag{61}$$

äquivalent ist. Wenn wir speziell $p = 1$, $\lambda_k^{(0)} = \lambda_{k-1}$ wählen,

so erhalten wir nach (61)

$$x_k^{(k)}(\lambda_k^{(0)}) = x_k^{(k)}(\lambda_{k-1}) \rightharpoonup x(\lambda^*) \tag{62}$$

wo die Vektoren $x_k^{(k)}(\lambda_k^{(0)})$ schon im Laufe des Iterationsprozesses (51) berechnet wurden. Im allgemeinen werden aber die Vektoren $x_k^{(k)}(\lambda^*)$ eine bessere Annäherung für den Vektor $x(\lambda^*)$ geben.

Bemerkung 6.

Bei der numerischen Berechnung der Banachschen Iterationen (51) wird es oft vorteilhaft sein,

$$\lambda_k^{(0)} = \lambda_{k-1} \tag{63}$$

zu wählen. Die Werte der Skalarprodukte $(c, H_k(\lambda_k^{(0)}) b_k) = (c, x_k^{(k)}(\lambda_k^{(0)}))$, $(c, q^{(k)})$ sind im Laufe der Iteration des λ_k konstant, so dass wir für jedes $k \geq N$ das Gleichungssystem $D_k(\lambda) \cdot x_k^{(k)} = b_k$ nur einmal, für $\lambda = \lambda_k^{(0)}$, lösen. Die inverse Funktion $h(\lambda)$ zu der Funktion $a_{11}(\lambda)$ kann bei der Berechnung der Iterationen (51) auch entweder in Form einer Tabelle für die Funktion $a_{11}(\lambda)$, in der wir interpolieren können, oder, wenn wir mit geringerer Genauigkeit auskommen, auch graphisch gegeben werden.

Bemerkung 7.

Aus dem Beweisgange des Satzes 2 ist ersichtlich, dass wir die Voraussetzungen 3 und 4 folgendermassen ersetzen können, ohne die Gültigkeit des Satzes zu ändern:

3 a) Der Vektor $x(\lambda) = V(\lambda)\,b$ ist eine stetige Funktion von λ : $\lambda_m \to \lambda \Rightarrow x(\lambda_m) \to x(\lambda)$, (64)

weshalb für $\lambda_{k_i} \to \lambda^*$ die folgende Beziehung gilt:

$$\lim_{k_i\to\infty}(c, x_{k_i}^{(k_i)}(\lambda_{k_i})) = \lim_{k_i\to\infty}(c, x_{k_i}^{(k_i)}(\lambda^*)) + \lim_{k_i\to\infty}(c, x_{k_i}^{(k_i)}(\lambda_{k_i}) - x_{k_i}^{(k_i)}(\lambda^*)) =$$

$$= (c, x(\lambda^*)) + \lim_{k_i\to\infty}(c, x_{k_i}^{(k_i)}(\lambda_{k_i}) - x(\lambda_{k_i})) + \lim_{k_i\to\infty}(c, x(\lambda_{k_i}) - x(\lambda^*)) +$$

$$+ \lim_{k_i\to\infty}(c, x(\lambda^*) - x_{k_i}^{(k_i)}(\lambda^*)) = (c, x(\lambda^*)) \;. \qquad (58\text{ a})$$

4 a) Die Funktion $g^{(k)}(\lambda) = h[(c, x_k^{(k)}(\lambda))]$

erfüllt für alle $k \geq N$ die Bedingung

$$\left|\frac{d}{d\lambda}\, g^{(k)}(\lambda)\right| \leq \alpha < 1 \;, \qquad (50\text{ a})$$

woher folgt, dass die folgenden Banachschen Iterationen konvergieren:

$$\lambda_k^{(m+1)} = g^{(k)}(\lambda_k^{(m)}) = h[(c, x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}))] = h[(c, H_k(\lambda_k^{(m)})\,b_k)] \to \lambda_k$$

$$(\lambda_k^{(o)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \quad \text{beliebig}$$

Die praktische Berechnung der Banachschen Iterationen wird dadurch erheblich erschwert, da jetzt die Skalarprodukte $(c, x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}))$ im Laufe der Iteration des λ_k nicht mehr konstant sind, so dass wir für jedes $m = 0,1,2,\dots$ das Gleichungssystem $D_k(\lambda_k^{(m)})\,x_k^{(k)} = b_k$ immer von Neuem lösen müssen.

Im Satze 2 wird die Existenz der Lösung des homogenen unendlichen linearen Gleichungssystems $A(\lambda)y = \theta$ bewiesen, unter der grundlegenden Voraussetzung, dass für das entsprechende unhomogene System $D(\lambda)x = b$ die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt werden, so dass dieses System für jedes $\lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ eine Lösung $x(\lambda) = V(\lambda)b$ hat. Im folgenden Satze werden wir zeigen, unter welchen Bedingungen (die die schwache Abhängigkeit des Vektors $x(\lambda) = V(\lambda)b$ vom λ ausdrücken) diese grundlegende Voraussetzung im Falle der Operatorengleichung (20) in Erfüllung geht.

Satz 3.

Es möge der Operator $R(\lambda) = N(\lambda) - K \in (H(a,b) \to H(a,b))$ und seine Matrixdarstellung (21)

$$A(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}(\lambda) & -c \\ \hline -b & D(\lambda) \end{array}\right)$$

in der Basis $\{\psi_n\}$ des Unterraumes $H(a,b) \subset \mathcal{L}^2(a,b)$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

1) $$x_m(\lambda) - \vartheta(t) \neq \theta \qquad (65)$$

für alle $m = 2, 3, \ldots \quad t \in \langle a, b\rangle; \ \lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$

sodass $$\frac{1}{c_2 + \varkappa} \leq \frac{1}{x_m(\lambda) - \vartheta(t)} \leq \frac{1}{c_1 + \vartheta} \qquad (66)$$

2) $$D_n(\lambda) = D_{on} + D_{1n}(\lambda)$$

für alle $n \geq N, \quad \lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ (67)

wo die Matrixoperatoren D_{on} vom λ nicht abhängen

3) für alle $n \geq N$ existieren die inversen Operatoren D_{on}^{-1} und sind gleichmässig beschränkt

$$\| D_{on}^{-1} \| \leq p \qquad (68)$$

4) es gilt für alle $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, $n \geqslant N$

$$\| D_{1n}(\lambda) \| \cdot \| D_{on}^{-1} \| \leqslant k < 1 \tag{69}$$

Dann erfüllt der Operator $D(\lambda)$ bei jedem $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ die Voraussetzungen des Satzes 1, so dass die Vektoren $x_k^{(k)}(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ gegen die Lösung $x(\lambda) = V(\lambda) b$ der Gleichung $D(\lambda) \cdot x(\lambda) = b$ schwach konvergieren.

Beweis:

Es sei $V(\lambda) \in (H(a,b) \to H(a,b))$ ein Operator, der durch die folgenden Beziehungen definiert ist:

$$V(\lambda) \cdot \psi_m(t) = \frac{1}{\chi_m(\lambda) - \vartheta(t)} \psi_m(t) \qquad (m \geqslant 2) \tag{70 a}$$

$$V(\lambda) \cdot \psi_1(t) = \psi_1(t) \tag{70 b}$$

Bezeichnen wir $T(a,b) \subset H(a,b)$ den Unterraum der Vektoren $h \in H(a,b)$, welche die erste Koordinate gleich Null haben. Es ist klar, dass $T(a,b)$ ein invarianter Unterraum des Operators $R(\lambda)$ ist, sodass $V(\lambda)$ eine lineare beschränkte Erweiterung der Umkehrung $[D^*(\lambda)]^{-1}$ des Operators $D^*(\lambda)$, der seinerseits eine auf $T(a,b)$ definierte Verengung des Operators $R(\lambda)$ ist, auf den Unterraum $T(a,b)$ darstellt. Operator $D(\lambda)$ ist die Matrixdarstellung des Operators $D^*(\lambda)$ in der Basis $\{\psi_m\}$ des Unterraumes $H(a,b)$. Nach den Voraus - setzungen 2,3,4 des Satzes sind die Operatoren $D_n(\lambda)$ den umkehrbaren Matrixoperatoren D_{on} $(n \geqslant N)$ nahe, so dass sie nach dem bekannten Satze [4] auch umkehrbar und die Vektoren $D(\lambda) x_n^{(m)}(\lambda)$ gleichmässig beschränkt sind, denn es gilt

$$\| D(\lambda) \cdot x_n^{(m)}(\lambda) \| \leqslant \| D(\lambda) \| \cdot \| D_n^{-1}(\lambda) b_n \| \leqslant \| D(\lambda) \| \cdot \| D_n^{-1}(\lambda) \| \cdot \| b_n \| \leqslant$$
$$\leqslant \| D(\lambda) \| \cdot \frac{n}{1-k} \cdot \| b \| = C(\lambda),$$

wo $C(\lambda)$ vom n unabhängig ist, w.z.b.w.

Bemerkung 8.

Wenn die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt werden, so gilt

$$D_n(\lambda)x_n^{(n)} = (D_{on} + D_{1n}(\lambda)) \cdot x_n^{(n)} = b_n$$

und weiter $(E + D_{on}^{-1} \cdot D_{1n}(\lambda)) \cdot x_n^{(n)} = D_{on}^{-1} \cdot b_n$ (71)

Nehmen wir an, dass die Abbildungen D_{on}, $D_{1n}(\lambda)$ eineindeutig sind. Nach der Voraussetzung 4 konvergiert die Neumannsche Reihe für den inversen Operator $(E + D_{on}^{-1} \cdot D_{1n}(\lambda))^{-1}$

Wir haben also

$$x_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot [D_{on}^{-1} \cdot D_{1n}(\lambda)]^k \cdot D_{on} b_n \cdot \tag{72}$$

Wenn überdies noch $D_{1n}(\lambda) = (\lambda - \lambda_o) S_n$, (73)

wo

$$S_n = \left(\begin{array}{c|c} S^{(n)} & \theta \\ \hline \theta & \theta \end{array}\right),$$

und $S^{(n)}$ eine Diagonalmatrix ist, so haben wir

$$x_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda - \lambda_o)^k \cdot [D_{on}^{-1} \cdot S_n]^k \cdot D_{on}^{-1} b_n \tag{74}$$

Wenn $\| D_{on}^{-1} \cdot S_n \| << 1$ und $(\lambda - \lambda_o) << 1$ sind, so können wir uns in dieser Neumannschen Reihe auf den Glied erster Ordnung in $(\lambda - \lambda_o)$ beschränken, so dass

$$x_n^{(n)} = D_{on}^{-1} b_n - (\lambda - \lambda_o) \cdot [D_{on}^{-1} \cdot S_n] D_{on}^{-1} b_n \tag{75}$$

gilt und die Voraussetzung 3 des Satzes 2 in diesem Falle erfüllt wird.

Die Sätze 1,2 und 3 (zusammen mit dem Lemma 1) kann man zur Diskussion der Konvergenzfrage verschiedener praktischen Probleme anwenden. Im Falle unseres ursprünglichen Randwertproblems (1), (2), (3) zeigt es sich, dass die Matrixelemente $d_{ik}(\lambda)$ nur sehr schwach vom Parameter $\lambda = B^2$ abhängen, so dass die oben angeführte Methode anwendbar ist und in [2], [3] zu guten praktischen Ergebnissen führte.

Wenn der symmetrische Operator $R(B^2)$ positiv definit ist, so kann man unser Randwertproblem auch mit Hilfe der Ritzschen Methode lösen, indem man $R(B^2)y = \lambda(B^2)y$ (76) setzt und den Wert B_0^2 so bestimmt, damit $\lambda(B_0^2) = \vartheta$. Man kann sich aber überzeugen, dass im Falle schwacher Abhängigkeit der Matrixelemente $d_{ik}(\lambda)$ vom λ die Lösungsmethode nach Satz 2 grosse numerischen Vorteile hat. Ausserdem wird in dieser Methode nicht verlangt, dass der Operator $R(\lambda)$ positiv definit, ja sogar nicht einmal symmetrisch sei, sondern es wird nur die schwache Abhängigkeit der Vektoren $x_n^{(m)}(\lambda) = H_n(\lambda)\, b_n$ vom Parameter λ in dem durch die Sätze 2 und 3 präzisierten Sinne vorausgesetzt.

LITERATURVERZEICHNISS

[1] F. STUMMEL, On the theory of Cylindrical Air gaps in Nuclear Reactors. P/967 PICG 1958 1, 13, s. 105.

[2] J. ČERMÁK, L. TRLIFAJ, Vlijanie častično pogružennogo pogloščajuščego stěržna na raspredelenije plotnosti nějtronnogo potoka. Atomnaja Energija, t. 9, vyp. 6, Dekabr´ 1960, s. 470 - 476.

[3] J. ČERMÁK; The distribution of neutron density in the vicinity of a partly inserted black rod in two groups approximation. Czech. J. Phys. B 11(1961), pg. 652 - 659.

[4] L.V. KANTOROVIČ, G.P. AKILOV, Funkcional´nyj analiz v normirovannych prostranstvach. Gos. izd. fiziko-matem. literatury, Moskva 1959.