Alois Švec

Sur la différentiabilité du repére de Winternitz d'une courbe

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 1 (1960), No. 3, 31–34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104876

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
1, 3 (1960)

SUR LA DIFFÉRENTIABILITÉ DU REPÈRE DE WINTERNITZ D'UNE COURBE

Alois ŠVEC, Praha

E. Čech a étudié dans ses travaux [1] - [5] la diffé - rentiabilité d'une courbe et des objets associés à ses points; il se borne au cas d'une courbe plongée dans l'espace euclidien. Ici je vais étudier une courbe d'espace afinne unimodulaire à trois dimensions.

Soit s l'arc afinne unimodulaire et $\{X; e_1, e_2, e_3\}$ le repère de Winternitz de la courbe $X = X(s)$, alors on a (voir [6]) $(e_1\, e_2\, e_3) = 1$ et

$$(1)\quad \frac{dX}{ds} = e_1 ,\ \frac{de_1}{ds} = e_2 ,\ \frac{de_2}{ds} = k_1 e_1 + e_3 ,\ \frac{de_3}{ds} = k_2 e_1 + 3 k_1 e_2 .$$

Pour un paramètre arbitraire t on a

$$(2)\quad \frac{dX}{dt} = K_0 e_1 ,\ \frac{de_1}{dt} = K_0 e_2 ,\ \frac{de_2}{dt} = K_1 e_1 + K_0 e_3 ,\ \frac{de_3}{dt} = K_2 e_1 + 3 K_1 e_2 .$$

Désignons par

$$(3)\quad \mathcal{E}_1 = \{X, e_1\} ,\ \mathcal{E}_2 = \{X, e_2\} ,\ \mathcal{E}_3 = \{X, e_3\}$$

les arêtes et par

$$(4)\quad \mathcal{F}_1 = \{X, e_2 , e_3\} ,\ \mathcal{F}_2 = \{X, e_1 , e_3\} ,\ \mathcal{F}_3 = \{X, e_1 , e_2\}$$

les côtés du repère de Winternitz.

La notion de la classe différentielle d'une fonction $f = f(t)$ (scalaire, vectorielle ou polyvectorielle) est bien connue: $cl f \geq 0$ veut dire que f est continue; $cl f \geq r+1$ veut dire que $cl f' \geq r$.

Introduissons les fonctions (en supposant que les dé - rivées considérées existent)

(5) $t_1(t) = \frac{d^2K_0}{dt^2} + K_0^2K_1$, $t_2(t) = \frac{dt_1}{dt} + 3K_0K_1\frac{dK_0}{dt} + K_0^3K_2$,

$$u(t) = \frac{d^3K_0}{dt^3} + K_0^3K_2 ,$$

$$v_1(t) = \frac{dK_1}{dt} + K_0K_2 , \quad v_2(t) = \frac{d^3K_0}{dt^3} + K_0^2v_1 ,$$

$$v_3(t) = \frac{dv_1}{dt} + 2K_2\frac{dK_0}{dt} , \quad v_4(t) = \frac{d^3K_0}{dt^3} + 4K_0^3K_2 ,$$

(6)

$$w_1(s) = \frac{dk_1}{ds} + k_2 , \quad w_2(s) = 3\frac{dk_1}{ds} - k_2 .$$

Alors on peut déterminer la classe différentielle des fonctions $X(t)$, $e_i(t)$ ou $X(s)$, $e_i(s)$,$\mathcal{E}_i(s)$, $\mathcal{F}_i(s)$ si les classes différentielles des fonctions $K_i(t)$ et (5) ou $k_i(s)$ et (6) sont connues; tous les cas possibles sont publiés dans les tableaux I et II (le cas trivial où $cl\,K_i = \infty$ ou $cl\,k_i = \infty$ étant exclu). Ici

$$(7) \quad cl\,\mathcal{E}_i = \min\left(cl\,e_i' , cl\,[X e_i]\right), \quad cl\,\mathcal{F}_i = \min\left(cl\,[e_j e_k], cl\,(X e_j e_k)\right).$$

Les démonstrations seront données au Czechoslovak Mathematical Journal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ČECH, Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions. Čech.mat.žurnal 7(82) 1957, 599 - 631.

[2] E. ČECH, Classe différentielle des courbes. Sections et projections. Revue de Math.Pur et Appl. II, 1957, 151 - 159.

[3] E. ČECH, Sur le type différentiel anallagmatique d'une courbe plane ou gauche. Coll.Mat.,VI, 1958, 141 -143.

[4] E. ČECH, Classe différentielle des courbes. Circles osculateurs et sphères osculatrices. Bul.Inst. Polit.Iasi, V(IX), 1959, 1 - 4.

Typ	$dK_0(t)$	$dK_1(t)$	$dK_2(t)$		$dX(t)$	$de_1(t)$	$de_2(t)$	$de_3(t)$
1	r	r	$\geq r$		$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
	r	$\geq r$	r					
2	$r+1$	r	$\geq r$		$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
3	$\geq r+3$	r	$\geq r$		$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
	$r+2$	r	$\geq r$	$dt_1 \geq r$				
4	$r+2$	r	$\geq r$	$dt_1 \geq r+1, dt_2 = r$	$r+4$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
5	$r+2$	r	$\geq r$	$dt_1 \geq r+1, dt_2 \geq r+1$	$r+5$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
6	r	$\geq r+1$	$\geq r+1$		$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
7	$r+1$	$\geq r+1$	r		$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$
8	$\geq r+4$	$\geq r+2$	r		$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
	$r+3$	$\geq r+2$	r	$du = r$				
	$\geq r+4$	$r+1$	r	$dv_1 = r$				
	$r+3$	$r+1$	r	$dv_1 = r, dv_2 = r$				
9	$r+3$	$\geq r+2$	r	$du \geq r+1$	$r+5$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
	$r+3$	$r+1$	r	$dv_1 = r, dv_2 \geq r+1$				
10	$r+2$	$\geq r+2$	r		$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
	$r+2$	$r+1$	r	$dv_1 = r$				
11	$\geq r+4$	$r+1$	r	$dv_1 \geq r+1$	$r+5$	$r+4$	$r+3$	$r+1$
12	$r+3$	$r+1$	r	$dv_1 \geq r+1; dv_3 = r$ ou $dv_4 = r$	$r+4$	$r+4$	$r+3$	$r+1$
13	$r+3$	$r+1$	r	$dv_1 \geq r+1, dv_3 \geq r+1, dv_4 \geq r+1$	$r+4$	$r+5$	$r+3$	$r+1$
14	$r+2$	$r+1$	r	$dv_1 \geq r+1$	$r+3$	$r+3$	$r+3$	$r+1$

	$d k_1(s)$	$d k_2(s)$		$d X$	$d e_1$	$d e_2$	$d e_3$
I	r	$\geq r$		$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
II	$\geq r+2$	r		$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
	$r+1$	r	$d w_1 = r,\ d w_2 = r$				
III	$r+1$	r	$d w_1 = r,\ d w_2 \geq r+1$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
IV	$r+1$	r	$d w_1 \geq r+1,\ d w_2 = r$	$r+5$	$r+4$	$r+3$	$r+1$

...

...

	$d \mathcal{E}_1$	$d \mathcal{E}_2$	$d \mathcal{E}_3$	$d \mathcal{F}_1$	$d \mathcal{F}_2$	$d \mathcal{F}_3$
I	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
II	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
III	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+3$	$r+4$
IV	$r+4$	$r+3$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

[5] E. ČECH, Sulla differenziabilità del triedro di Frenet. Ann.Mat.Pur.Appl.,Ser.IV, t.XLIX, 1960, 91-96.

[6] J. FAVARD, Cours de géométrie différentielle locale. Paris, 1957.