Drumi Dimitrov Bajnov; Svetla Dimitrova Milusheva

Методы усреднения для одной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений

Archivum Mathematicum, Vol. 11 (1975), No. 3, 151–168

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104853`

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
XI: 151—168, 1975

МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Д. БАЙНОВ, С. Д. МИЛУШЕВА

(Поступило в редакцию 25-ого июля 1974 г.)

Метод усреднения для решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений был обоснован в [1], [2].

Краевые задачи для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений зависящих от малого параметра имеют применение в многих областях математики и механики. К задаче подобного типа приводятся задачи на условный экстремум в вариационном исчислении. Начальные и краевые задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром применяются и в теории вязко-упругости.

Надо отметить, что метод усреднения для решения задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений был обоснован А. Н. Филатовым [3].

В настоящей работе рассматриваются три варианта метода усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon f\left(t, x, y, \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,\mathrm{d}s\right), \\ \dot{y} &= f_1\left(t, x, y, \int_0^t \varphi_1(t, s, x(s), y(s))\,\mathrm{d}s\right) \end{aligned} \tag{1}$$

с краевым условием

$$x(0) = x^\circ, \qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0, \tag{2}$$

где $x, f \in R_n, y, f_1, R \in R_m, \varphi \in R_q, \varphi_1 \in R_\tau, \lambda \in \Lambda \subset R_m, T = L\varepsilon^{-1}, L = \text{const.} > 0$ а $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Наряду с системой (1) рассматривается вырожденная ($\varepsilon = 0$) по отношению к ней система

$$x = \text{const}, \;\; \dot{y} = f_1\left(t, x, y, \int_0^t \varphi_1(t, s, x, y(s))\,\mathrm{d}s\right), \tag{3}$$

с краевым условием

$$R[\lambda, y(0), y(T)] = 0. \tag{4}$$

Пусть решение краевой задачи (3), (4) известно и имеет вид

$$y = \psi(t, x, \lambda, T), \qquad x = \text{const}.$$

Предположим, что в элементарных или специальных функциях можно вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \varphi[t, s, x, \psi(s, x, \lambda, T)]\, \mathrm{d}s = \varphi_2(t, x, \lambda, T).$$

Рассмотрим следующие схемы усреднения:

Первая схема усреднения. Пусть вдоль интегральных кривых $y = \psi(t, x, \lambda, T)$ краевой задачи (3), (4), где λ рассматривается как векторный параметр, существует независящее от λ среднее значение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, \psi(t, x, \lambda, T), \varphi_2(t, x, \lambda, T))\, \mathrm{d}t = \bar{f}(x). \tag{5}$$

Тогда усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (1) назовем уравнение

$$\dot{\xi} = \varepsilon \bar{f}(\xi) \tag{6}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x^\circ. \tag{7}$$

Отметим, что если $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ *и* $A = (a_{ij})_{k,l}$, то по определению

$$\| x \| = [\sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad \| A \| = [\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} a_{ij}^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Имеет место следующая теорема о близости компонент $x(t)$ решения $\{x(t), y(t)\}$ краевой задачи (1), (2) и решения $\xi(t)$ задачи Коши (6), (7).

Теорема 1. Пусть:

1. *Функции* $f(t, x, y, u)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(t, x, y, u)$, $\frac{\partial}{\partial u} f(t, x, y, u,)$ *определены и непрерывны для всех* $t \in \Delta = [0, \infty)$ *и* $(x, y, u) \in \Omega = \Omega(x, y, u) = \Omega(x)\, x\Omega(y)\, x\Omega(u)$, *где* $\Omega(x)$, $\Omega(y)$ *некоторые открытые области пространств* R_n *и* R_m *соответственно,* $\Omega(u) \equiv R_q$.

Функции $\varphi(t, s, x, y)$ *и* $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(t, s, x, y)$ *определены и непрерывны для всех* $t, s \in \Delta_1$ *и* $(x, y) \in \Omega(x, y)$.

В соответствующих проекциях области $\Omega(t, s, x, y, u) = \Delta x \Delta x \Omega$ *выполняются неравенства*

$$\| f(t, x, y, u) - f(t, x', y', u') \| \leqq \lambda_1 \| x - x' \| + \theta_1(t) \| y - y' \| + \nu_1 \| u - u' \|,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} f(t, x, y, u) \right\| \leqq \theta_2(t), \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial u} f(t, x, y, u) \right\| \leqq \theta_3(t),$$

$$\| \varphi(t, s, x, y) - \varphi(t, s, x', y') \| \leqq \sigma_1(t, s) [\| x - x' \| + \| y - y' \|],$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} \varphi(t, s, x, y) \right\| \leqq \sigma_2(t, s),$$

$$\left\| \int_t^\infty \varphi(t, s, x, y) \, ds \right\| \leqq \theta_4(t),$$

где функции $\theta_1(t)$, $\theta_4(t)$ *и* $\sigma_1(t, s)$ *удовлетворяют условиям*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \theta_i(\tau) \, d\tau \to 0 \qquad (i = 1, 4) \text{ при } t \to \infty,$$

$$\int_0^\infty \sigma_1(t, s) \, ds \leqq N,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \sigma_1(\tau, s) \, ds \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty,$$

а λ_1, ν_1 *и* N *— положительные постоянные.*

2. *Через каждую точку области* $\Omega(t, x, y)$ *проходит единственная интегральная кривая краевой задачи* (3), (4), *соответствующая некоторому значению параметра* λ, *причем*

а) эта кривая определена и лежит внутри области $\Omega(y)$ *при всех* $t \geqq 0$;

б) решение $y = \psi(t, x, \lambda, T)$ *краевой задачи* (3), (4) *и* $\frac{\partial}{\partial T}\psi(t, x, \lambda, T)$ *— непрерывные по совокупности всех переменных* t, x, λ, T *вектор-функции, удовлетворяющие в области* $\{T \geqq 0, \Omega(t, x) \times \Lambda\}$ *неравенствам*

$$\| \psi(t, x, \lambda, T) \| \leqq K,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial T} \psi(t, x, \lambda, T) \right\| \leqq g(t, T),$$

где K *— положительная постоянная.*

3. *Функции* $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$, $\sigma_2(t, s)$ *и* $g(t, T)$ *удовлетворяют в области* $\{T \geqq 0, \Omega(t, s)\}$ *условиям*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \theta_2(s)\, g(s, \tau)\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \mathrm{d}l \int_0^\infty \theta_3(l)\, \sigma_2(l, s)\, g(s, \tau)\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

4. *Система* (1) *имеет единственное, ограниченное и непрерывное решение* $\{x(t), y(t)\}$ ($\| x(t) \| \leqq b_1 = \text{const.}$, $\| y(t) \| \leqq b_2 = \text{const.}$) *удовлетворяющее условиям*

$$x(0) = x^\circ, \qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0 \tag{8}$$

(*в* (8) *под* λ *подразумевается некоторое фиксированное значение параметра* λ *из области* Λ).

5. *Для всех* $(x, \lambda) \in \Omega(x) \times \Lambda$ *существует независящий от параметра* λ *предел* (5), *причем предельный переход в* (5) *происходит равномерно относительно совокупности* $(x, \lambda) \in \Omega(x)\, x\Lambda$. *Функция* $\bar{f}(x)$ *определена, непрерывна и ограничена* ($\| \bar{f}(x) \| \leqq M$, $M = \text{const.}$), *для всех* $x \in \Omega(x)$.

6. *Решение* $\xi(t)$ *задачи Коши* (6), (7) *определено, непрерывно и ограничено* ($\| \xi(t) \| \leqq d$, $d = \text{const.}$) *для всех* $t \geqq 0$ *и лежит в области* $\Omega(x)$ *вместе с некоторой* ϱ – *окрестностью* ($\varrho = \text{const.} > 0$).

Тогда, если $\{x(t), y(t)\}$ – *решение краевой задачи* (1), (2), *а* $\xi(t)$ – *решение задачи Коши* (6), (7), *то для любых* $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon^\circ > 0$, *что при* $0 > \varepsilon \leqq \varepsilon^\circ$ *на отрезке* $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство*

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \eta.$$

Доказательство. Введем функцию

$$v(t, x) =$$
$$= \int_{\Omega(x)} \Delta_a(x - x') \left\{ \int_0^t \left[f\left(\tau, x', \psi(\tau, x', \lambda, t), \int_0^\infty \varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', \lambda, t))\, \mathrm{d}s \right) - \bar{f}(x') \right] \mathrm{d}\tau \right\} \mathrm{d}x',$$

где

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} A_a\left(1 - \dfrac{\| x \|^2}{a^2}\right)^2 & \text{при } \| x \| \leqq a, \\ 0 & \text{при } \| x \| > a, \end{cases}$$

$$\int_{R_n} \Delta_a(x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

В силу условий теоремы существует такая монотонно убывающая функция $\alpha(t)$ $[\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty]$, что для всех $x \in \Omega(x)$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t \left\langle f\left[\tau, x, \psi(\tau, x, \lambda, t), \int_0^\infty \varphi(\tau, s, x, \psi[s, x, \lambda, t])\,\mathrm{d}s\right] - \bar{f}(x) \right\rangle \mathrm{d}\tau \right\| \leqq \alpha(t).$$

Следовательно для всех точек x, a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x)$ и для всех $t \geqq 0$ выполняются неравенства

$$\| v(t, x) \| \leqq t\alpha(t), \tag{9}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \right\| \leqq I_a t\alpha(t), \tag{10}$$

где

$$I_a = \int_{R_n} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \Delta_a(x) \right\| \mathrm{d}x.$$

Рассмотрим выражение

$$P(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) - f\left[t, x, \psi(t, x, \lambda, t), \int_0^t \varphi\{t, s, x, \psi(s, x, \lambda, t)\}\,\mathrm{d}s\right] + \bar{f}(x).$$

Для всех x, a — окрестность которых принадлежит $\Omega(x)$ и при $t \geqq 0$ получаем

$$\| P(t, x) \| \leqq [2\lambda_1 a + 2K\theta_1(t) + \nu_1 (a + 2K) \int_0^t \sigma_1(t, s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \theta_2(\tau)\, g(\tau, t)\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\infty \theta_3(\tau)\, \sigma_2(\tau, s)\, g(s, t)\,\mathrm{d}s + \nu_1\theta_4(t). \tag{11}$$

Положим

$$\tilde{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon v(t, \xi(t)).$$

Так как по предположению $\xi(t)$ при $t \geqq 0$ лежит в области $\Omega(x)$, то выполняются неравенства (9)—(11). Следовательно на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$, если ε достаточно мало, справедливо неравенство

$$\| \varepsilon v(t, \xi(t)) \| \leqq \varepsilon t\alpha(t) \leqq A(\varepsilon) < \frac{1}{2} \min\{\varrho, \eta\},$$

где

$$A(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leqq L} | \tau\alpha(\tau\varepsilon^{-1}) | \to 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0$$

Из этого неравенства следует, что на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}\tilde{x}(t)$ принадлежит области $\Omega(x)$ вместе со своей ϱ_1 – окрестностью $(0 < \varrho_1 < \varrho)$ и $\| \tilde{x}(t) \| \leqq d_1 (d_1 = \text{const.})$.

Оценим разность

$$Q(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt} - \varepsilon f\left(t, \tilde{x}, y, \int_0^t \varphi(t, s, \tilde{x}(s), y(s))\, ds\right), \tag{12}$$

где $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, а $y = y(t)$ – функция, входящая в решение $\{x(t), y(t)\}$ краевой задачи (1), (2).

Имеем

$$\begin{aligned}
\| Q(t) \| \leqq{} & 2\varepsilon \lambda_1 a + 2\varepsilon K\theta_1(t) + \varepsilon\nu_1(a + 2K)\sigma_{10}(t) + \varepsilon \int_0^t \theta_2(\tau)\, g(\tau, t)\, d\tau + \\
& + \varepsilon \int_0^t d\tau \int_0^\infty \theta_3(\tau)\, \sigma_2(\tau, s)\, q(s, t)\, ds + \varepsilon\nu_1\theta_4(t) + \\
& + \varepsilon^2(\lambda_1 + I_a M)\, t\alpha(t) + \varepsilon(K + b_2)\,\theta_1(t) + \\
& + \varepsilon\nu_1(2d + K + b_2)\,\sigma_{10}(t) + \varepsilon^2\nu_1 t\delta(t),
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\sigma_{10}(t) = \int_0^t \sigma_1(t, s)\, ds,$$

$$\delta(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_1(t, s)\, s\alpha(s)\, ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

Пусть $x(t)$ компонент решения $\{x(t), y(t)\}$ краевой задачи (1), (2) совпадающий при $t = 0$ с $\xi(t)$. Предположим, что на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}x(t)$ не покидает области $\Omega(x)$. Тогда на этом интервале из (1) и (12) получаем

$$\left\| \frac{d(x - \tilde{x})}{dt} \right\| \leqq \varepsilon\lambda_1 \| x - \tilde{x} \| + \varepsilon\nu_1(b_1 + d_1)\,\sigma_{10}(t) + \| Q(t) \|,$$

откуда, учитывая что $\tilde{x}(0) \neq x(0)$ находим

$$\| x - \tilde{x} \| \leqq \int_0^t [\varepsilon\nu_1(b_1 + d_1)\,\sigma_{10}(\tau) + \| Q(\tau) \|] \exp\{\varepsilon\lambda_1(t - \tau)\}\, d\tau. \tag{14}$$

Введем функции

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_{10}(\tau)\,d\tau, \qquad \gamma_5(t) = \frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau dl \int_0^\infty \theta_3(l)\,\sigma_2(l, s)\,g(s, \tau)\,ds,$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \theta_1(\tau)\,d\tau, \qquad \gamma_6(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \tau\alpha(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \theta_4(\tau)\,d\tau, \qquad \gamma_7(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \tau\delta(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma_4(t) = \frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \theta_2(s)\,g(s, \tau)\,ds, \qquad \gamma_i(t) \to 0 \qquad (i = \overline{1, 7}) \text{ при } t \to \infty.$$

На отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$, имея ввиду (14), получаем следующую оценку

$$\int_0^t [\varepsilon\nu_1(b_1 + d_1)\,\sigma_{10}(\tau) + \| Q(\tau) \|]\exp\{\varepsilon\lambda_1(t - \tau)\}\,d\tau \leqq$$

$$\leqq \exp\{\lambda_1 L\}\{\nu_1(b_1 + d_1)\,L\gamma_1(L\varepsilon^{-1}) + 2\lambda_1 La + 2K\,L\gamma_2(L\varepsilon^{-1}) +$$
$$+ \nu_1(a + 2K)\,L\gamma_1(L\varepsilon^{-1}) + L\gamma_4(L\varepsilon^{-1}) + L\gamma_5(L\varepsilon^{-1}) + \nu_1 L\gamma_3(L\varepsilon^{-1}) +$$
$$+ (\lambda_1 + I_a M)\,L^2\gamma_6(L\varepsilon^{-1}) + (K + b_2)\,L\gamma_2(L\varepsilon^{-1}) +$$
$$+ \nu_1(2d + K + b_2)\,L\gamma_1(L\varepsilon^{-1}) + \nu_1 L^2\gamma_7(L\varepsilon^{-1})\}.$$

Отсюда видно, что всегда можно выбрать параметры a и ε так, чтобы на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ выполнялось неравенство

$$\| x(t) - \tilde{x}(t) \| < \frac{1}{2}\min\{\varrho, \eta\}.$$

Следовательно на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqq \| x(t) - \tilde{x}(t) \| + \| \tilde{x}(t) - \xi(t) \| < \min\{\varrho, \eta\}.$$

Покажем теперь, что $x(t) \in \Omega(x)$ на всем отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$.

Действительно [3], так как начальная точка $x(0)$ находится внутри области $\Omega(x)$, то на некотором отрезке $0 \leqq t \leqq t^*(t^* \leqq L\varepsilon^{-1})$ решение $x(t)$ будет находиться внутри области $\Omega(x)$.

Тогда, если выберем a и ε достаточно малые, то на всем отрезке $0 \leqq t \leqq t^*$ на котором $x(t) \in \Omega(x)$ будем иметь

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \frac{1}{2}\varrho.$$

Если предположить, что $t^* < L\varepsilon^{-1}$, то тогда на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ в силу непрерывности $x(t)$ и $\xi(t)$ найдется такая точка t^{**}, в которой будет выполняться неравенство

$$\varrho > \| x(t^{**}) - \xi(t^{**}) \| > \frac{\varrho}{2}.$$

Но из этого неравенства видно, что при $t = t^{**}$ решение $x(t)$ еще не покинуло области $\Omega(x)$. Поэтому $t^{**} \in [0, t^*]$ и следовательно

$$\| x(t^{**}) - \xi(t^{**}) \| < \frac{\varrho}{2}.$$

Полученное противоречие показывает, что $t^* \geqq L\varepsilon^{-1}$.

Этим теорема 1 доказана.

Вторая схема усреднения. Пусть вдоль интегральных кривых $y = \psi(t, x, \lambda, T)$ краевой задачи (3), (4), где λ рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от λ средние значения

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, \psi(t, x, \lambda, T), u)\, dt = \bar{f}(x, u), \tag{15}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty \varphi[t, s, x, \psi(s, x, \lambda, T)]\, ds = \lim_{T\to\infty} \frac{\varphi_2(t, x, \lambda, T)}{T} = \bar{\varphi}_2(t, x). \tag{16}$$

Тогда усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (1) назовем уравнение

$$\dot{\xi} = \varepsilon \bar{f}\left(\xi, \int_0^t \bar{\varphi}_2(t, \xi(s))\, ds\right) \tag{17}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x^\circ. \tag{18}$$

Теорема 2. *Пусть:*

1. ***Функции** $f(t, x, y, u)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(t, x, y, u)$ **определены и непрерывны для всех** $t \in \Delta = [0, \infty)$ **и** $(x, y, u) \in \Omega = \Omega(x, y, u) = \Omega(x) \times \Omega(y) \times \Omega(u)$, **где** $\Omega(x)$ **и** $\Omega(y)$ **некоторые открытые области пространств** R_n **и** R_m **соответственно,** $\Omega(u) \equiv R_n$.*

***Функция** $\varphi(t, s, x, y)$ **определена и непрерывна для всех** $t \in \Delta$, $s \in \Delta$ **и** $(x, y) \in \Omega(x, y)$.*

В соответствующих проекциях области** $\Omega(t, s, x, y, u) = \Delta \times \Delta \times \Omega$ **выполняются неравенства

$$\| f(t, x, y, u) - f(t, x', y', u') \| < \lambda_1 \| x - x' \| + \theta_1(t) \| y - y' \| + \nu_1 \| u - u' \|,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} f(t, x, y, u) \right\| \leqq \theta_2(t),$$

$$\| \varphi(t, s, x, y) - \varphi(t, s, x', y') \| \leqq \sigma(t, s) [\| x - x' \| + \| y - y' \|],$$

$$\left\| \int\limits_t^{\infty} \varphi(t, s, x, y) \, ds \right\| \leqq \theta_3(t),$$

где λ_1 и ν_1 — положительные постоянные, а функции $\theta_1(t)$, $\theta_3(t)$ и $\sigma(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t} \int\limits_0^t \theta_i(\tau) \, d\tau \to 0 \qquad (i = 1, 3) \qquad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$\int\limits_0^t \sigma(t, s) \, ds = \sigma_0(t) \leqq \text{const.},$$

$$\frac{1}{t} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{\tau} \sigma(\tau, s) \, ds \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Функция $\theta_3(t)$ ограничена и монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$.

2. *Выполнены условия 2. и 4. теоремы 1.*

3. *Функции $\theta_2(t)$ и $g(t, T)$ удовлетворяют в области $\{t \geqq 0, \ T \geqq 0\}$ условию*

$$\frac{1}{t} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{\tau} \theta_2(s) \, g(s, \tau) \, ds \to 0 \qquad \textit{при} \quad t \to \infty.$$

4. *Для всех $(x, u, \lambda) \in \Omega(x, u) \times \Lambda$ и для всех $(t, x, \lambda) \in \Omega(t, x) \times \Lambda$ существуют независящие от параметра λ пределы (15) и (16), причем предельные переходы в (15) и (16) происходят равномерно относительно совокупностей $(x, u, \lambda) \in \Omega(x, u) \times \Lambda$ и $(t, x, \lambda) \in \Omega(t, x) \times \Lambda$. Средние значения $\bar{f}(x, u)$, $\bar{\varphi}_2(t, x)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \bar{\varphi}_2(t, x)$ определены и непрерывны соответственно для всех $(x, u) \in \Omega(x, u)$ и $(t, x) \in \Omega(t, x)$. В области $\Omega(t, x, u)$ функции $\bar{f}(x, u)$, $\bar{\varphi}_2(t, x)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \bar{\varphi}_2(t, x)$ ограничены*

$$\| \bar{f}(x, u) \| \leqq M = \text{const.},$$

$$\| \bar{\varphi}_2(t, x) \| \leqq N = \text{const.},$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \bar{\varphi}_2(t, x) \right\| \leqq N_1 = \text{const.}$$

5. *В силу условия* 4. *существуют такие монотонно убывающие функции* $\alpha_1(\tau)$ *и* $\alpha_2(t)$ $[\alpha_1(t) \to 0,\ \alpha_2(t) \to 0$ *при* $t \to \infty]$, *что для всех* $(x, u) \in \Omega(x, u)$ *выполняются неравенства*

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\infty \varphi(t, s, x, \psi(s, x, \lambda, \tau))\, ds - \overline{\varphi}_2(t, x) \right\| \leqq \alpha_1(\tau),$$

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t [f(\tau, x, \psi(\tau, x, \lambda, t), u) - \bar{f}(x, u)]\, d\tau \right\| \leqq \alpha_2(t).$$

Будем предполагать, что $\alpha_1(t)$ *и* $\alpha_2(t)$ *удовлетворяют еще условиям*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \tau \alpha_1(\tau)\, d\tau \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \tau^2 \alpha_2(\tau)\, d\tau \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

6. *Решение задачи Коши* (17), (18) *определено, непрерывно и ограничено* ($\| \xi(t) \| \leqq d$, $d = \text{const.}$) *для всех* $t \geqq 0$ *и лежит в области* $\Omega(x)$ *вместе с некоторой* ϱ *— окрестностью* ($\varrho = \text{const}$, $\varrho > 0$).

Тогда, если $\{x(t), y(t)\}$ *— решение краевой задачи* (1), (2), *а* $\xi(t)$ *— решение задачи Коши* (17), (18), *то для любых* $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon^\circ > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^\circ$ *на отрезке* $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство*

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \eta.$$

Доказательство. Введем функцию

$$v(t, x, u) =$$

$$= \int_{\Omega(x,u)} \Delta_a(x - x', u - u') \left\{ \int_0^t [f(\tau, x', \psi(\tau, x', \lambda, t), u') - \bar{f}(x', u')]\, d\tau \right\} dx'\, du',$$

где

$$\Delta_a(x, u) = \begin{cases} A_a\left(1 - \dfrac{\| x \|^2 + \| u \|^2}{a^2}\right)^2 & \text{при} \quad \| x \|^2 + \| u \|^2 \leqq a^2 \\ 0 & \text{при} \quad \| x \|^2 + \| u \|^2 > a^2. \end{cases}$$

Положительная постоянная A_a определяется из равенства

$$\int_{R_{n+q}} \Delta_a(x, u)\, dx\, du = 1, \qquad R_{n+q} = R_q(x) \times R_n(u).$$

В силу условий теоремы, для всех точек (x, u) a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x, u)$ и для всех $t \geqq 0$ выполняются неравенства

$$\| v(t, x, u) \| \leqq t\alpha_2(t), \tag{19}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} v(t, x, u) \right\| \leqq I_a t\alpha_2(t), \tag{20}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} v(t, x, u) \right\| \leqq I_a t\alpha_2(t), \tag{21}$$

где

$$I_a = \max \left\{ \int\limits_{R_{n+q}} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \Delta_a(x, u) \right\| \mathrm{d}x\, \mathrm{d}u, \quad \int\limits_{R_{n+q}} \left\| \frac{\partial}{\partial u} \Delta_a(x, u) \right\| \mathrm{d}x\, \mathrm{d}u \right\}.$$

Оценим выражение

$$P(t, x, u) = \frac{\partial}{\partial t} v(t, x, u) - f(t, x, \psi(t, x, \lambda, t), u) + \bar{f}(x, u).$$

Для всех точек (x, u), a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x, u)$ и при $t \geqq 0$ получаем

$$\| P(t, x, u) \| \leqq 2(\lambda_1 + \nu_1) a + 2K\theta_1(t) + \int\limits_0^t \theta_2(\tau)\, g(\tau, t)\, \mathrm{d}\tau. \tag{22}$$

Положим

$$\tilde{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon v(t, \xi(t), \zeta(t)),$$

где

$$\zeta(t) = \int\limits_0^t \bar{\varphi}_2(t, \xi(s))\, \mathrm{d}s.$$

В силу условий теоремы множество $\{\xi(t)\}$ при изменении t в интервале $[0, \infty)$ принадлежит области $\Omega(x)$ вместе со своей ϱ — окрестностью, так что при $a < \varrho$ для функции $v(t, \xi(t), \zeta(t))$ выполняются неравенства (19)–(22). Следовательно на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$, если ε достаточно мало, справедливо неравенство

$$\| \varepsilon v(t, \xi(t), \zeta(t)) \| \leqq \varepsilon t\alpha_2(t) \leqq A(\varepsilon) < \frac{1}{2} \min \{\varrho, \eta\},$$

где

$$A(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leqq L} | \tau\alpha_2(\tau\varepsilon^{-1})| \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Это неравенство показывает, что на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}\tilde{x}(t)$ принадлежит области $\Omega(x)$ вместе со своей ϱ_1 — окрестностью $(0 < \varrho_1 < \varrho)$ и $\| \tilde{x}(t) \| \leqq d_1$, $d_1 = \text{const}$.

Оценим разность

$$Q(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt} - \varepsilon f\left(t, \tilde{x}, y, \int_0^t \varphi(t, s, \tilde{x}(s), y(s))\, ds\right),$$

где $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, а $y = y(t)$ – функция, входящая в решение $\{x(t), y(t)\}$ краевой задачи (1), (2).

Принимая во внимание (19)–(22) получаем

$$\| Q(t) \| \leqq \varepsilon \| P(t, \xi, \zeta) \| + \varepsilon^2(\lambda_1 + I_a M)\, t\alpha_2(t) + \varepsilon(K + b_2)\, \theta_1(t) +$$
$$+ \varepsilon\nu_1 \left\| \int_0^t [\bar{\varphi}_2(t, \xi(s)) - \varphi(t, s, \xi(s)), \psi(s, \xi(s), \lambda, t)]\, ds \right\| +$$
$$+ \varepsilon^2\nu_1 \int_0^t \sigma(t, s)\, s\alpha_2(s)\, ds + \varepsilon\nu_1(k + b_2) \int_0^t \sigma(t, s)\, ds + \varepsilon I_a(N_1 t + N)\, t\alpha_2(t).$$

В силу условий теоремы следует, что существует такая монотонно убывающая функция $\alpha(t)\left[\alpha(t) = \alpha_1(t) + \frac{1}{t}\theta_3(t),\ \alpha(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty\right]$, что при всех $x \in \Omega(x)$ выполняется неравенство

$$\left\| \int_0^t [\bar{\varphi}_2(t, x) - \varphi(t, s, x, \psi(s, x, \lambda, t))]\, ds \right\| \leqq t\alpha(t).$$

Следовательно

$$\| Q(t) \| \leqq \varepsilon \| P(t, \xi, \zeta) \| + \varepsilon^2(\lambda_1 + I_a M)\, t\alpha_2(t) + \varepsilon(K + b_2)\, \theta_1(t) +$$
$$+ \varepsilon\nu_1 t\alpha(t) + \varepsilon^2\nu_1 t\delta(t) + \varepsilon\nu_1(K + b_2)\, \sigma_0(t) + \varepsilon I_a N_1 t^2\alpha_2(t) + \varepsilon I_a N t\alpha_2(t),$$

где

$$\delta(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(t, s)\, s\alpha_2(s)\, ds \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Пусть $\{x(t), y(t)\}$ решение краевой задачи (1), (2). Предположим, что на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ $x(t)$ не покидает области $\Omega(x)$. (Этот факт доказывается вполне аналогично как в теореме 1). Тогда на этом отрезке имеем

$$\left\| \frac{d(x - \tilde{x})}{dt} \right\| \leqq \varepsilon\lambda_1 \| x - \tilde{x} \| + \varepsilon\nu_1(b_1 + d_1)\, \sigma_0(t) + \| Q(t) \|,$$

откуда, если учесть, что $x(0) = \tilde{x}(0)$, следует

$$\| x - \tilde{x} \| \leqq \int_0^t [\varepsilon\nu_1(b_1 + d_1)\, \sigma_0(\tau) + \| Q(\tau) \|] \exp\{\varepsilon\lambda_1(t - \tau)\}\, d\tau.$$

Введя функции

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \gamma_5(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \tau\alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \theta_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \gamma_6(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \tau\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^\tau \theta_2(s)\,g(s,\tau)\,\mathrm{d}s, \qquad \gamma_7(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \tau^2\alpha_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\gamma_4(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \tau\alpha_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \gamma_8(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \tau\alpha_2^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\gamma_i(t) \to 0 \quad (i = \overline{1,8}) \qquad \text{при} \quad t \to \infty,$$

аналогично как и при доказательстве теоремы 1 находим, что при достаточно малых a и ε $(0 < a, \varepsilon \leqq \varepsilon^\circ)$ на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ будут справедливы неравенства

$$\| x(t) - \tilde{x}(t) \| < \frac{1}{2}\min\{\varrho, \eta\}$$

и

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \min\{\varrho, \eta\}.$$

Этим теорема 2 доказана.

Третья схема усреднения. Пусть можно вычислить

$$\int_0^\infty \varphi(t, s, x, \psi(s, x, \lambda, T))\,\mathrm{d}t = \varphi_3(s, x, \lambda, T)$$

и пусть вдоль интегральных кривых $y = \psi(t, x, \lambda, T)$ краевой задачи (3), (4), где λ рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от λ средние значения

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, \psi(t, x, \lambda, T), u)\,\mathrm{d}t = \bar{f}(x, u), \tag{23}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^\infty \varphi[t, s, x, \psi(s, x, \lambda, T)]\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{\varphi_3(s, x, \lambda, T)}{T} = \bar{\varphi}_3(s, x). \tag{24}$$

Тогда усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (1) назовем уравнение

$$\dot{\xi} = \varepsilon \bar{f}\left(\xi, \int_0^t \bar{\varphi}_3(s, \xi(s))\,\mathrm{d}s\right) \tag{25}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x^0. \tag{26}$$

Теорема 3. *Пусть:*

1. *Функции* $f(t, x, y, u)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(t, x, y, u)$ *определены и непрерывны для всех* $t \in \Delta = [0, \infty)$ *и* $(x, y, u) \in \Omega = \Omega(x, y, u) = \Omega(x) \times \Omega(y) \times \Omega(u)$, *где* $\Omega(x)$ *и* $\Omega(y)$ *некоторые открытые области пространств* R_n *и* R_m *соответственно,* $\Omega(u) \equiv R_n$.

Функция $\varphi(t, s, x, y)$ *определена и непрерывна для всех* $t \in \Delta$, $s \in \Delta$ *и* $(x, y) \in \Omega(x, y)$.

В соответствующих проекциях области $\Omega(t, s, x, y, u) = \Delta \times \Delta \times \Omega$ *выполняются неравенства*

$$\| f(t, x, y, u) - f(t, x', y', u') \| \leqq \lambda_1 \| x - x' \| + \theta_1(t) \| y - y' \| + \nu_1 \| u - u' \|,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} f(t, x, y, u) \right\| \leqq \theta_2(t),$$

$$\| \varphi(t, s, x, y) - \varphi(t, s, x', y') \| \leqq \sigma(t, s) \left[\| x - x' \| + \| y - y' \| \right],$$

где λ_1 *и* ν_1 *— положительные постоянные, а функции* $\theta_1(t)$ *и* $\sigma(t, s)$ *удовлетворяют условиям*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \theta_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$\int_0^t \sigma(t, s)\,\mathrm{d}s \leqq \text{const.},$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \sigma(\tau, s)\,\mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

2. *Выполнены условия* 2. *и* 4. *теоремы* 1.
3. *Функции* $\theta_2(t)$ *и* $g(t, T)$ *удовлетворяют в области* $\{t \geqq 0, T \geqq 0\}$ *условию*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \theta_2(s)\, g(s, \tau)\,\mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

4. *Для всех* $(x, u, \lambda) \in \Omega(x, u) \times \Lambda$ *и для всех* $(s, x, \lambda) \in \Omega(s, x) \times \Lambda$ *существуют независящие от параметра* λ *пределы* (23) *и* (24), *причем предельные переходы в* (23) *и* (24) *происходят равномерно относительно совокупности* $(x, u, \lambda) \in \Omega(x, u) \times \Lambda$ *и* $(s, x, \lambda) \in \Omega(s, x) \times \Lambda$. *Средние значения* $\bar{f}(x, u)$ *и* $\bar{\varphi}_3(s, x)$ *определены, непрерывны и ограничены* $[\| \bar{f}(x, u) \| \leqq M = \text{const.}, \| \bar{\varphi}_3(s, x) \| \leqq N = \text{const.})$ *для всех* $(x, u) \in \Omega(x, u)$ *и* $(s, x) \in \Omega(s, x)$.

Функции $\varphi(t, s, x, y)$ *и* $\bar{\varphi}_3(s, x)$ *удовлетворяют в области* $\Omega(t, s, x, y)$ *условию*

$$\| \varphi(t, s, x, y) - \bar{\varphi}_3(s, x) \| \leqq \sigma_1(t, s)$$

и

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \sigma_1(\tau, s)\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

5. *В силу условия* 4. *всегда можно найти такую монотонно убывающую функцию* $\alpha(t)\,[\alpha(t) \to 0$ *при* $t \to \infty]$, *что для всех* $t \geqq 0$ *и для всех* $(x, u) \in \Omega(x, u)$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t [f(\tau, x, \psi(\tau, x, \lambda, t), u) - \bar{f}(x, u)]\, \mathrm{d}\tau \right\| \leqq \alpha(t).$$

Будем предполагать кроме того, что функция $\alpha(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \tau\alpha(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

6. *Решение* $\xi = \xi(t)$ *задачи Коши* (25), (26) *определено, непрерывно и ограничено* $[\| \xi(t) \| \leqq d, d = \text{const.}]$ *для всех* $t \geqq 0$ *и принадлежит области* $\Omega(x)$ *вместе с некоторой* ϱ *— окрестностью* ($\varrho = \text{const.} > 0$).

Тогда, если $\{x(t), y(t)\}$ *— решение краевой задачи* (1), (2), *а* $\xi(t)$ *— решение задачи Коши* (26), (27), *то для любых* $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon^\circ > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^\circ$, *на отрезке* $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство*

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \eta.$$

Доказательство. Введем как и при доказательстве теоремы 2 функицю

$$v(t, x, u) = \int_{\Omega(x, u)} \Delta_a(x - x', u - u') \left\{ \int_0^t [f(\tau, x', \psi(\tau, x', \lambda, t), u') - \bar{f}(x', u')]\, \mathrm{d}\tau \right\} \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}u',$$

где

$$\Delta_a(x, u) = \begin{cases} A_a\left(1 - \dfrac{\|x\|^2 + \|u\|^2}{a^2}\right)^2 & \text{при} \quad \|x\|^2 + \|u\|^2 \leqq a^2 \\ 0 & \text{при} \quad \|x\|^2 + \|u\|^2 > a^2, \end{cases}$$

$$\int\limits_{R_{n+q}} \Delta_a(x, u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u = 1, \qquad R_{n+q} = R_q(x) \times R_n(u).$$

В силу условий теоремы, для всех точек (x, u) a – окрестность которых принадлежит области $\Omega(x, u)$ и для всех $t \geqq 0$ выполняются неравенства

$$\| v(t, x, u) \| \leqq t\alpha(t), \tag{27}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} v(t, x, u) \right\| \leqq I_a t\alpha(t), \tag{28}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} v(t, x, u) \right\| \leqq I_a t\alpha(t), \tag{29}$$

где

$$I_a = \max\left(\int\limits_{R_{n+q}} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \Delta_a(x, u) \right\| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u, \quad \int\limits_{R_{n+q}} \left\| \frac{\partial}{\partial u} \Delta_a(x, u) \right\| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \right).$$

Для выражения

$$P(t, x, u) = \frac{\partial}{\partial t} v(t, x, u) - f(t, x, \psi(t, x, \lambda, t), u) + \bar{f}(x, u)$$

при условии, что (x, u) произвольная точка, которая принадлежит области $\Omega(x, u)$ вместе со своей a – окрестностью, получаем при $t \geqq 0$ оценку

$$\| P(t, x, u) \| \leqq 2(\lambda_1 + v_1)\, a + 2K\theta_1(t) + \int\limits_0^t \theta_2(\tau)\, g(\tau, t)\,\mathrm{d}\tau. \tag{30}$$

Положим

$$\tilde{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon v(t, \xi(t), \zeta(t)),$$

где

$$\zeta(t) = \int\limits_0^t \bar{\varphi}_3(s, \xi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Функция $v(t, \xi(t), \zeta(t))$ удовлетворяет неравенствам (27)–(29).

Легко проверяется, что на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$, если ε достаточно мало, справедливо неравенство

$$\| \varepsilon v(t, \xi(t), \zeta(t)) \| \leqq \varepsilon t\alpha(t) \leqq A(\varepsilon) < \frac{1}{2} \min\{\varrho, \eta\},$$

где

$$A(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leqq L} |\tau\alpha(\tau\varepsilon^{-1})| \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Следовательно на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ $\tilde{x}(t)$ принадлежит области $\Omega(x)$ вместе со своей ϱ_1 — окрестностью $(0 < \varrho_1 < \varrho)$ и $\| \tilde{x}(t) \| \leqq d_1$, $d_1 = \text{const}$.

Для разности

$$Q(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt} - \varepsilon f\left(t, \tilde{x}, y, \int_0^t \varphi(t, s, \tilde{x}(s), y(s))\, ds\right),$$

где $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, а $y = y(t)$ — функция входящая в решение $\{x(t), y(t)\}$ краевой задачи (1), (2), ввиду (27)—(30) получаем оценку

$$\| Q(t) \| \leqq 2(\lambda_1 + \nu_1)a + 2K\theta_1(t) + \varepsilon \int_0^t \theta_2(\tau)\, g(\tau, t)\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon^2(\lambda_1 + I_a M)\, t\alpha(t) + \varepsilon(K + b_2)\,\theta_1(t) + \varepsilon\nu_1 \int_0^t \sigma_1(t, s)\, ds +$$

$$+ \varepsilon^2 \nu_1 \int_0^t \sigma(t, s)\, s\alpha(s)\, ds + \varepsilon I_a N t\alpha(t).$$

Пусть $\{x(t), y(t)\}$ решение краевой задачи (1), (2). Предполагая, что на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ $x(t)$ не покидает области $\Omega(x)$ (этот факт доказывается таким же образом как и в теореме 1) находим, что на этом отрезке

$$\left\| \frac{d(x - \tilde{x})}{dt} \right\| \leqq \varepsilon\lambda_1 \| x - \tilde{x} \| + \varepsilon\nu_1(b_1 + d_1)\,\sigma_0(t) + \| Q(t) \|,$$

где

$$\sigma_0(t) = \int_0^t \sigma(t, s)\, ds.$$

Если учесть, что $x(0) = \tilde{x}(0)$, то получаем

$$\| x - \tilde{x} \| \leqq \int_0^t [\varepsilon\nu_1(b_1 + d_1)\,\sigma_0(\tau) + \| Q(\tau) \|] \exp\{\varepsilon\lambda_1(t - \tau)\}\, d\tau.$$

Введя функции

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_0(\tau)\, d\tau, \qquad \gamma_5(t) = \frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \sigma_1(\tau, s)\, ds,$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \theta_1(\tau)\,d\tau, \qquad \gamma_6(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \sigma(\tau, s)\, s\alpha(s)\, ds,$$

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \theta_2(s)\, g(s, \tau)\, ds, \qquad \gamma_7(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \tau\alpha(\tau)\, d\tau,$$

$$\gamma_4(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \tau\alpha(\tau)\, d\tau,$$

$$\gamma_i(t) \to 0\, (i = \overline{1, 7})$$

$$\text{при } t \to \infty,$$

аналогично как и при доказательстве теоремы 1 находим, что если a и ε достаточно малые ($0 < a,\ \varepsilon \leqq \varepsilon^\circ$), на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ будут справедливы неравенства

$$\| x(t) - \tilde{x}(t) \| < \frac{1}{2}\min\{\varrho, \eta\}$$

и

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \min\{\varrho, \eta\}.$$

Этим теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Байнов Д. Д. *Метод усреднения для одной двухточечной краевой задачи.* Математички весник, 5 (20), Св. 2, 1968.

[2] Байнов Д. Д. *Асимптотические формулы для одной краевой задачи.* Труды У международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 1, Киев, 1970.

[3] Филатов А. Н. *Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.* Изд-во „ФАН", Ташкент, 1971.

Д. Байнов
София-4, Оборище 23
Болгария

С.Милушева
София-8, Деде агач № 11
Болгария