Archivum Mathematicum

Robert Karpe

Die Kombinationen gegebenen Profils. II

Archivum Mathematicum, Vol. 10 (1974), No. 1, 27--53

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104815

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT; UJEP BRUNENSIS,
X: 27—54, 1974

DIE KOMBINATIONEN GEGEBENEN PROFILS II

ROBERT KARPE, Brno

(Eingegangen am 7. Juli 1973)

Dieser Aufsatz knüpft in seiner ganzen Breite an meinen vorigen Aufsatz [1] an.

1. Vereinbarung. *Bezeichnen wir einen 1. endlichen, 2. unendlichen Kettenbruch durch das Symbol:*

1. $$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots \cfrac{a_n}{b_n}}} = \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \dots + \frac{a_n \mid}{\mid b_n},$$

2. $$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}} = \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \frac{a_3 \mid}{\mid b_3} + \dots$$

Siehe [2], Paragraph 1.

2. Satz.

Die Funktion $\phi_n(x)$, siehe I-(37), kann man durch einen endlichen Kettenbruch n-ten Ranges ausdrücken.

$$(1)\quad \phi_n(x) = \frac{1 \quad \mid}{\mid (-1)^1 . x} + \frac{1 \quad \mid}{\mid (-1)^2 . x} + \dots + \frac{1 \quad \mid}{\mid (-1)^{n-1} . x} + \frac{1 \quad \mid}{\mid (-1)^n . x + 1}$$

Den Beweis durch strenge Induktion führen wir mittels der Anwendung der Formel I-(38) durch.

3. Definition. *Wir setzen fest und mit einem Symbol bezeichnen folgenden speziellen Kettenbruch:*

$$(2)\quad \phi(x) = \frac{1 \quad \mid}{\mid (-1)^1 . x} + \frac{1 \quad \mid}{\mid (-1)^2 . x} + \frac{1 \quad \mid}{\mid (-1)^3 . x} + \dots + \frac{1 \quad \mid}{\mid (-1)^k . x} + \dots$$

4. Lemma.

Wenn $\phi_n(x)$ für $x = r$ konvergiert, dann gilt folgende Identität:

$$(3)\qquad \lim_{n \to \infty} \phi_n(r) = \phi(r)$$

Die Gültigkeit dieser Identität ist offenbar.

5. Lemma.

Den Kettenbruch $\phi(x)$ kann man den folgenden zwei Umformierungen unterwerfen:

(A) $$\phi(x) = \frac{-1|}{|x} + \frac{-1|}{|x} + \frac{-1|}{|x} + \frac{-1|}{|x} + \ldots$$

(B) $$\phi(x) = \frac{1|}{|-x} + \frac{-1|}{|-x} + \frac{-1|}{|-x} + \frac{-1|}{|-x} + \ldots$$

Beweis. Wenn man auf beiden Seiten jeder ungeraden, bzw. geraden Bruchlinie des Kettenbruches (2) mit der negativen Einheit multipliziert, so bekommt man sofort seine Umformung (A), bzw. (B).

6. Lemma.

Der unendliche Kettenbruch $\phi(x)$ konvergiert in den Intervalen $x \in (-\infty, -2]$, $[2, \infty)$.

Beweis. Wir wenden den folgenden Satz an (siehe [2], Seite 244, Satz 15):

Wenn die Elemente des Kettenbruches $\frac{a_1|}{|b_2} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_2} + \ldots$ reel sind und den Ungleichungen genügen:

(P) $$\left.\begin{array}{lll} b_k \geqq |a_k| > 0, & & \\ b_k \geqq |a_k| + 1 & \text{für} & a_{k+1} < 0 \end{array}\right\} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

so ist jede der folgenden zwei Bedingungen für die Konvergenz hinreichend: (Q) Von einer gewissen Stelle an sind alle a_k negativ. (Die weitere, im Buche zitierte Bedingung führe ich nicht an.)

Also gibt man dem Kettenbruch die Form (A) bzw. (B), dann ist die Bedingung (Q) erfüllt und es gilt im Einklang mit der Bedingung (P):

$x \geqq |-1| + 1$ für $a_{k+1} < 0, k = 1, 2, 3, \ldots$, wenn gilt:

$x \in [2, \infty)$, bzw. $x \in (-\infty, -2]$; w.z.b.w.

7. Lemma.

Die Funktion $\phi(x)$ ist in den beiden Intervalen $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$ überall von Null verschieden.

Beweis. Wenn wir in der Gleichung y statt $\phi(x)$ bezeichnen, dann gilt es mit Rücksicht auf (2): $y = \cfrac{1}{-x + \cfrac{1}{x + y}} \Rightarrow y^2 + xy + 1 = 0.$

Wenn wir die Schnittpunkte dieses Kegelschnittes mit der uneigentlichen Geraden suchen, gelangen wir zu der Gleichung $y(y + x) = 0$. Daraus ist es ersichtlich, dass es sich um die Gleichung einer Hyperbel handelt, deren eine Asymptote die X-Achse darstellt. Damit ist die Gültigkeit des Lemmas erwiesen.

Bemerkungen zu der Funktion $y = \phi(x)$.

a) Mit Rücksicht auf die Konvergenz des Kettenbruches $\phi(x)$ in den Intervalen $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$, kann sein Wert immer nur durch eine der zwei verschiedenen Wurzeln der oben angeführten quadratischen Gleichung

$$1. \quad \phi(x) = \frac{-1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4}), \qquad 2. \quad \phi(x) = \frac{-1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4}),$$

ausgedrückt werden.

b) Zur Präzisierung des eben Angeführten kann man hinzufügen:

Nach dem oben zitierten Buche, siehe die Definitionen auf der Seite **166**, ist $\phi(x)$ ein reinperiodischer Kettenbruch. Deshalb ist, nach dem Satz **38** auf der Seite **276**, der Wert dieses Bruches nur durch eine der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung ausgedrückt, wofern diese Wurzeln verschieden sind. Die entsprechende Wurzel (immer für ein ganzes Intervall) kann man mittels der dort angeführten Methode bestimmen.

c) Auf dem unten angeführten Graphen ist der entsprechende Teil der Hyperbel stärker bezeichnet. Die Punkte $P(2, -1)$, $Q(-2, 1)$, sind die Berührungspunkte der zur X-Achse senkrechten Tangenten. Die zweite Asymptote hat die Gleichung $x + y = 0$.

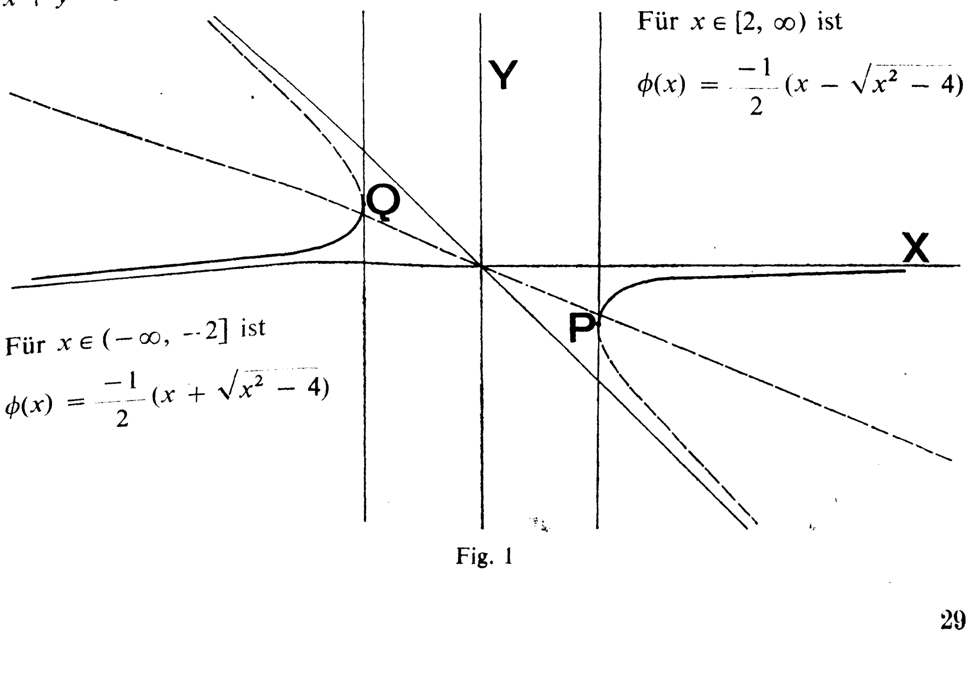


Fig. 1

8. Lemma.

Für den Index $n \geqq 2$ gilt es: Die Polynome $f_n(x), f_{n-1}(-x)$, sind teilfremd.

Den Beweis führen wir durch den Widerspruch: Wäre es möglich den Bruch mit dem gemeinsamen Teiler $z(x)$ zu kürzen, dann wäre es möglich diesen gemeinsamen Teiler aus dem Nenner dieses Bruches auszuklammern:

$$f_{n-1}(-x) : f_n(x) = f_{n-1}(-x) : [f_{n-2}(x) - x \cdot f_{n-1}(-x)]$$

Das bedeutet: Existierte ein gemeinsamer Faktor $z(x)$ bei $f_n(x)$, $f_{n-1}(-x)$, dann müsste derselbe gemeinsame Faktor auch bei den Polynomen $f_{n-1}(-x)$, $f_{n-2}(x)$ existieren, usw. Aber die Polynome $f_2(\pm x), f_1(\mp x)$, sind teilfremd.

9. Satz.

Es existiert eine solche natürliche Zahl n_0, dass es für alle Indexe $n \geqq n_0$ und für alle realen Zahlen $r \notin (-2, 2)$ gilt: $f_n(r) \neq 0$.

Beweis. Wählen wir eine beliebige Zahl $r \notin (-2, 2)$ und bilden die Folge: $\phi_1(r)$, $\phi_2(r)$, $\phi_3(r)$, ... Betrachten wir, dass diese Folge mit Rücksicht auf das Lemma 4, 6, konvergiert und nach dem Lemma 7 einen von Null verschiedenen Limes hat. Nach dem Konvergenzprinzip muss also ein solcher endlich grosser Index n_r existieren, dass für jeden Index $n \geqq n_r$ der Wert $\phi_n(r)$ begrenzt und von Null verschieden ist. Auf diese Weise kann man jeder realen Zahl $r \notin (-2, 2)$ eine gewisse natürliche n_r zuordnen. Wir bekommen damit eine Indexmenge $\{n_r\}$, die von oben begrenzt ist, weil hier die Bedingungen des Satzes 42 aus [2], Seite 285, erfült sind. So existiert ersichtlich ein Index $n_0 \geqq n_r$ für alle $r \notin (-2, 2)$. Es gilt aber: $\phi_n(r) = f_{n-1}(-r) : : f_n(r)$, wobei, mit Rücksicht auf das Lemma 8 nicht der Fall eintreten kann: $\{\phi_n(r) \neq 0$, aber $f_{n-1}(-r) = f_n(r) = 0\}$.

Aus dem Angeführten folgt der zu beweisende Satz.

10. Satz.

Das Polynom $y = f_n(x)$, $n \geqq 1$, hat alle Wurzeln real und verschieden, davon $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ positive. Dabei liegt (für $n \geqq 2$) zwischen je zwei seinen Nachbarwurzeln immer eine Wurzel des Polynoms $y = f_{n-1}(-x)$.

Den Beweis führen wir durch mittels der strengen Induktion: wir setzen zunächst voraus, dass der Satz für $k \leqq n - 1$, gilt. Wir beweisen, dass er dann auch für $k = n$ gilt.

Zuvor leiten wir Hilfsätze und Hilfsbetrachtungen ab:

Lemma (*a*): Es gilt für beliebiges natürliches m: $m = \left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m+1}{2}\right]$. *Beweis.* 1. es gelte $m = 2k$; $k = 1, 2, \ldots$; dann lautet die Gl.: $2k = k + k$. 2. es gelte $m = = 2k + 1$; $k = 0, 1, \ldots$; dann lautet die Gl.: $2k + 1 = k + k + 1$, *w.z.b.w.*

a) Es sei s_j bzw. t_j (nach der wächsenden Grösse) die j-te Wurzel des Polynoms $y = f_{n-1}(-x)$, bzw. $y = f_{n-2}(x)$, sodass es nach der Voraussetzung gilt: $s_1 < t_1 < < s_2 < t_2 < \ldots < s_{n-2} < t_{n-2} < s_{n-1}$.

b) Nach der Voraussetzung hat das Polynom $y = f_{n-1}(x) \left[\frac{n}{2}\right]$ positive Wurzeln. Das bedeutet, dass das Polynom $y = f_{n-1}(-x)$ dieselbe Anzahl von negativen Wurzeln hat. Es ist also $s_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ die letzte negative und $s_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ die erste positive Wurzel dieses Polynoms.

Nach der Voraussetzung hat das Polynom $y = f_{n-2}(x) \left[\frac{n-2}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ negative Wurzeln; es ist also $t_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ die erste positive Wurzel dieses Polynoms.

c) Nun betrachten wir die Wurzeln der Polynome von der rechten Seite der Gl. I-(36). Bezeichnen wir der Kürze halber:

(4) $$k(x) = -x \,.\, f_{n-1}(-x), \quad h(x) = f_{n-2}(x).$$

Es sei $\bar{s}_j$, bzw. t_j die nach der wächsenden Grösse j-te Wurzel des Polynoms $k(x)$, bzw. $h(x)$. Dann je nach dem Absatz a) gilt:

(5) $$\{\bar{s}_1 < t_1 < \bar{s}_2 < t_2 < \ldots < \bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]} < \bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} < t_{\left[\frac{n}{2}\right]} < \bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]+2} < $$
$$< t_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} < \bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]+3} < \ldots < t_{n-2} < \bar{s}_n\} \quad = 0$$

Diese endliche Folge hat $2(n - 1)$ Glieder. Wir ordnen ihr die Folge der Funktionswerte zu:

(6) $$k(t_j) = A_j, \qquad h(\bar{s}_i) = B_i,$$

so dass wir bekommen:

(7) $$\{B_1 \ A_1 \ B_2 \ A_2 \ \ldots \ B_{\left[\frac{n}{2}\right]} \ B_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \ A_{\left[\frac{n}{2}\right]} \ B_{\left[\frac{n}{2}\right]+2} \ A_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \ B_{\left[\frac{n}{2}\right]+3} \ldots \ A_{n-2} B_n\}$$

Um die Vorzeichen dieser Funktionswerte festzustellen, führen wir zuerst an:

Lemma (*b*). Für $x < \bar{s}_1$ und für $x > \bar{s}_n$ gilt:

$$\operatorname{sign} k(x) \neq \operatorname{sign} h(x).$$

Beweis. Die höchste Potenz des Polynoms $k(x)$, bzw. $h(x)$, hat nach I-(35) und (4) das Zeichen $(-1) \,.\, (-1)^{\binom{n}{2}} \,.\, (-1)^{n-1} = (-1)^{\binom{n}{2}+n}$, bzw. das Zeichen $(-1)^{\binom{n-1}{2}}$. Es gilt aber : $\binom{n}{2} + n = \binom{n-1}{2} + 2n - 1$.

Das bedeutet: die höchste Potenz des Polynoms $k(x)$ ist für alle Indexe n vom entgegengesetzten Vorzeichen als die höchste Potenz des Polynoms $h(x)$.

Es gilt aber ein bekannter Satz, dass für einen genügend grossen Absolutwert des Argumentes der Funktionswert des Polynoms dasselbe Vorzeichen annimmt, wie seine höchste Potenz. Wenden wir diesen Satz auf unseren Fall an, wobei die Polynome $k(x)$, $h(x)$ nach der Voraussetzung alle Wurzeln real haben und wo $[\bar{s}_1, \bar{s}_n]$ die gemeinsame Begrenzung dieser Wurzeln ist. Ersichtlich haben also beide Polynome ausserhalb dieses Intervalls nur noch einen monotonen Verlauf – und zwar immer vom entgegengesetzten Vorzeichen.

d) Aus der Stetigkeit der Funktionen $k(x)$, $h(x)$, und mit Rücksicht auf die Voraussetzung, dass die Wurzeln dieser Polynome insgesamt real und einfach sind, kann man auf Grund des Lemmas (b) die gegenseitigen Beziehungen der Vorzeichen in einzelnen Intervallen ableiten.

Siehe auch die Tafel 1.

A.
$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign} k(x) \neq \operatorname{sign} h(x) \quad \text{im Intervall} \quad (-\infty, \bar{s}_1) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \operatorname{sign} k(x) \neq \operatorname{sign} h(x) \quad \text{im Intervall} \quad (t_1, \bar{s}_2) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \operatorname{sign} k(x) \neq \operatorname{sign} h(x) \quad \text{im Intervall} \quad (t_2, \bar{s}_3) \Rightarrow \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\Rightarrow \operatorname{sign} k(x) \neq \operatorname{sign} h(x) \quad \text{im Intervall} \quad \left(t_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}, \bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right).
\end{aligned}$$

B.
$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign} k(x) \neq \operatorname{sign} h(x) \quad \text{im Intervall} \quad (\bar{s}_n, \infty) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \operatorname{sign} k(x) \neq \operatorname{sign} h(x) \quad \text{im Intervall} \quad (\bar{s}_{n-1}, t_{n-2}) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \operatorname{sign} k(x) \neq \operatorname{sign} h(x) \quad \text{im Intervall} \quad (\bar{s}_{n-2}, t_{n-3}) \Rightarrow \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\Rightarrow \operatorname{sign} k(x) \neq \operatorname{sign} h(x) \quad \text{im Intervall} \quad \left(\bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, t_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right).
\end{aligned}$$

Lemma (c). In der Folge (7) wechseln die Vorzeichen modulo 2 ab. Die Gültigkeit des Lemmas ist aus den Absätzen A), B) ersichtlich.

e) Nehmen wir jetzt Rücksicht auf die Beziehung $f_n(x) = k(x) + h(x)$ vom Standpunkt der in dem vorigen Absatz durchgeführten Betrachtungen:

Folgerung 1. In den Endpunkten jedes der Intervalle

$$\begin{gathered}
[t_1, \bar{s}_2], [t_2, \bar{s}_3], \dots, \left[t_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right], \\
\left[\bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, t_{\left[\frac{n}{1}\right]}\right], \left[\bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}, t_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\right], \dots, [\bar{s}_{n-1}, t_{n-2}]
\end{gathered} \tag{8}$$

hat das Polynom $y = f_n(x)$ Funktionswerte entgegengesetzten Vorzeichens, was bedeutet, dass in jedem dieser Intervalle wenigstens eine reale Wurzel des Polynoms $y = f_n(x)$ existiert.

Folgerung 2. Die Situation in den Intervallen $(-\infty, \bar{s}_1)$, $(\bar{s}_n, \infty)$.

Führen wir die Diskussion für das erste dieser Intervalle durch. (Die Diskussion des zweiten würde man ganz ähnlich durchführen.)

Es gilt: sign $k(x) \neq$ sign $h(x)$ für $x \in (-\infty, \bar{s}_1)$; dabei $h(\bar{s}_1) \neq 0$, $k(\bar{s}_1) = 0$. Aber die Funktion $k(x)$, bzw. $h(x)$, ist vom n-ten, bzw. $(n - 2)$-ten Grad, sodass eine Zahl r existieren muss, die im Intervall $(-\infty, \bar{s}_1)$ liegt, eine solche, dass es gilt: $f_n(r) = 0$.

Die Schlussfolgerung. Die Wurzeln des Polynoms $y = f_{n-1}(-x)$ begrenzen n Intervalle:

$$(9) \qquad (-\infty, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_{n-2}, s_{n-1}), (s_{n-1}, \infty),$$

solche, dass in jedem von ihnen (wenigstens) eine reale Wurzel des Polynoms $y = f_n(x)$ existiert. Aber das Polynom hat nach einem bekannten Satz gerade n Wurzeln. Es folgt daraus, dass in jedem Intervall (9) gerade eine Wurzel des Polynoms $f_n(x)$ existiert.

f) Jetzt werden wir feststellen, wieviele positive Wurzeln das Polynom $f_n(x)$ hat. Es ist evident, dass die kleinste positive Wurzel dieses Polynoms im Intervall $\left(\bar{s}_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, t_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)$ liegt. Weiter sieht man aus (8), dass der Index der Wurzel r_i des Polynoms $f_n(x)$ mit dem Index der Wurzel $\bar{s}_i$ des erwähnten Intervalls übereinstimmen muss, woraus folgt, dass es $\left[\frac{n}{2}\right]$ negative Wurzeln gibt und daraus gilt nach dem Lemma (a), dass es $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ positive Wurzeln gibt.

g) Schliesslich sehen wir leicht ein, dass der zu beweisende Satz für $k = 1, 2,$ gilt. Das Polynom $f_2(x) = 1 - x - x^2$ hat zwei Wurzeln: $s_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$, $s_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$. Das Polynom $f_1(-x)$ hat die Wurzel $t_1 = -1$. Das Polynom $f_2(x)$ hat $\left[\frac{2+1}{2}\right] = 1$, d.h. eine positive Wurzel; das Polynom $f_1(x)$ hat eine positive Wurzel $\left[\frac{1+1}{2}\right] = 1$.

Damit ist der Beweis des Satzes durchgeführt worden.

11. Lemma.

Es sei $J_k = [D_k, H_k]$ das kürzeste Intervall, in dem alle Wurzeln des Polynoms $y = f_k(x)$ liegen, $k \geqq 1$. Dann gilt es:

Das Intervall J_{n-2} liegt im Intervall J_n, d.h. $D_n < D_{n-2} < H_{n-2} < H_n$.

Der Beweis folgt aus dem Satz 10. Es sei r_j, bzw. s_j, bzw. t_j die nach der wachsenden Grösse j-te Wurzel des Polynoms $f_n(x)$, bzw. $f_{n-1}(-x)$, bzw. $f_{n-2}(x)$. Dann gilt:

1. $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < t_{n-2} < s_{n-1}$, **2.** $r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \dots < s_{n-1} < r_n$.

Es folgt daraus: $r_1 < t_1 < \ldots < t_{n-2} < r_n$. Wenn man nun feststellt $D_n = r_1$, $D_{n-2} = t_1$, $H_{n-2} = t_{n-2}$, $H_n = r_n$, dann gilt ersichtlich die angeführte Relation.

12. Korolar.

Es sei $J_k = [D_k, H_k]$ das kürzeste Intervall, in dem alle Wurzeln des Polynoms $f_k(x)$ liegen, $k = n - 2, n$. Dann gilt es für alle natürlichen $n > 2$:

(49) $$-2 < \ldots < D_n < D_{n-2} < \ldots < H_{n-2} < H_n \ldots < 2$$

Beweis. Im Sinne des Satzes 9 wählen wir einen beliebigen Index $n \geqq n_0$. Dann kann das Intervall $J_n = [D_n, H_n]$ nicht inzident sein mit den Intervallen $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$, weil die Zahl D_n, bzw. H_n die kleinste, bzw. die grösste Wurzel des Polynoms $f_n(x)$ ist.

Dasselbe gilt aber, nach dem Lemma 11, für die Intervalle J_{n-2k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$; $n - 2k \geqq 0$.

13. Satz.

Es sei $a_{n,i}$ die nach der wächsenden Grosse i-te Wurzel des Polynoms $f_n(x)$, und es sei $g_{n-1,i}(x) = f_n(x) : (x - a_{n,i})$. Dann gilt nach I-27:

(11) $$A_n^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{-b_{n,i}}{(a_{n,i})^{k+1}}; \qquad b_{n,i} = \frac{f_{n-1}(-a_{n,i})}{g_{n-1,i}(a_{n,i})},$$
$$1 \leqq i \leqq n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Beweis. Wie man weiss, sind alle Wurzeln $a_{n,i}$ real und gegenseitig verschieden, und zugleich verschieden von den Wurzeln des Polynoms $f_{n-1}(-x)$, so dass die Zerlegung der gebrochenen Funktion $\phi_n(x) = f_{n-1}(-x) : f_n(x)$ in Partialbrüche die folgende ist:

$$\frac{f_{n-1}(-x)}{f_n(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{n,i}}{x - a_{n,i}} \Rightarrow f_{n-1}(-x) = \sum_{i=1}^{n} b_{n,i} \cdot g_{n-1,i}(x) \Rightarrow b_{n,i} = \frac{f_{n-1}(-a_{n,i})}{g_{n-1,i}(a_{n,i})}.$$

Wir nehmen weiter in Betracht, dass es gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{f_{n-1}(-x)}{f_n(x)}\right) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_{n,i}}{x - a_{n,i}}\right) = (-1)^k \,.\, k! \,.\, \sum_{i=1}^{v} \frac{b_{n,i}}{(x - a_{n,i})^{k+1}};$$

wenn wir daher die Mac Laurinsche Entwicklung der Funktion $\phi_n(x)$ durchführen, so wird es gelten:

$$A_n^k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{\mathrm{d}x^k} (\phi_n(x))_{x=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-b_{n,i}}{(a_{n,i})^{k+1}}.$$

Zum Schluss dieses Abschnittes, der die Wurzeleigenschaften des Polynoms $f_n(x)$ behandelt, seien einige Funktionswerte angeführt, die sich bei den Polynomen $f_n(x)$ mit wachsendem Index n periodisch wiederholen.

a) Es gilt nach I-(36): 1) $f_{n+3}(x) = f_{n+1}(x) - x \,.\, f_{n+2}(-x)$, **2)** $f_{n+2}(-x) = f_n(-x) + x \,.\, f_{n+1}(x)$, so dass nach der Umformung gilt:

(12) $$f_{n+3}(x) = -x \,.\, f_n(-x) + (1 - x^2) \,.\, f_{n+1}(x)$$

Daraus: $$f_{n+3}(1) = -f_n(-1), f_{n+3}(-1) = f_n(1). \qquad (P)$$

b) Es gilt nach (12): $f_{n+4}(x) = -x \,.\, f_{n+1}(-x) + (1 - x^2) \,.\, f_{n+2}(x)$, und nach I-(36): $f_{n+2}(x) = f_n(x) - x \,.\, f_{n+1}(-x)$; daraus nach der Umf.:

(13) $$f_{n+4}(x) = (1 - x^2) \,.\, f_n(x) + x \,.\, (x^2 - 2) \,.\, f_{n+1}(-x).$$

Daraus: $$f_{n+4}(\sqrt{2}) = -f_n(\sqrt{2}), f_{n+4}(-\sqrt{2}) = -f_n(-\sqrt{2}) \qquad (Q)$$

c) Es gilt nach (13): $f_{n+6}(x) = (1 - x^2) \,.\, f_{n+2}(x) + x \,.\, (x^2 - 2) f_{n+3}(-x)$, und nach I-(36): $f_{n+3}(-x) = f_{n+1}(-x) + x \,.\, f_{n+2}(x)$; daraus nach der Umf.: $f_{n+6}(x) = (x^4 - 3x^2 + 1) \,.\, f_{n+2}(x) + x \,.\, (x^2 - 2) \,.\, f_{n+1}(-x)$, wobei nach I-(36): $f_{n+2}(x) = f(_n x) - x \,.\, f_{n+1}(-x)$; daraus, nach der Umformung, gilt:

(14) $$f_{n+6}(x) = (x^4 - 3x^2 + 1) \,.\, f_n(x) - x \,.\, (x^4 - 4x^2 + 3) \,.\, f_{n-1}(-x).$$

Daraus: $f_{n+6}(\sqrt{3}) = f_n(\sqrt{3}), f_{n+6}(-\sqrt{3}) = f_n(-\sqrt{3})$ $\qquad (R)$

d) Es gilt nach I-(35): $f_n(0) = 1$, $n \geqq 0$. $\qquad (S)$

Nach den Relationen (P), (Q), (R), (S) stellen wir jetzt eine Tafel zusammen, die von einem interessanten Zusammenhang der Polynome $f_n(x)$ aller Grade Zeugnis gibt.

$x =$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$f_1(x) =$	$-c$	a	2	1	0	$-b$	f
$f_2(x) =$	$-d$	b	1	1	-1	$-a$	$-e$
$f_3(x) =$	$-e$	-1	1	1	-1	-1	$-d$
$f_4(x) =$	d	-1	0	1	-2	-1	$\cdot g$
$f_5(x) =$	1	$-a$	-1	1	-1	b	1
$f_6(x) =$	1	$-b$	-1	1	-1	a	1
$f_7(x) =$	$-c$	1	-2	1	0	1	f
$f_8(x) =$	$-d$	1	-1	1	1	1	$-e$
$f_9(x) =$	$-e$	a	-1	1	1	$-b$	$-d$
$f_{10}(x) =$	d	b	0	1	2	$-a$	g
$f_{11}(x) =$	1	-1	1	1	1	-1	1
$f_{12}(x) =$	1	-1	1	1	1	-1	1

$f_{12+k}(x) = f_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (d.h. für diese Argumente).

Die Bedeutung der Abkürzungen:

$a = 1 + \sqrt{2}$; $b = -1 + \sqrt{2}$; $c = -1 + \sqrt{3}$; $d = 2 + \sqrt{3}$; $e = 2 - \sqrt{3}$; $f = 1 + \sqrt{3}$; $g = 3 - \sqrt{3}$.

In dem weiteren Abschnitt dieser Behandlung gebrauchen wir wieder den Entwicklungsgraphen, siehe [1], Def. 3, um neue Prinzipien der oszillierenden Kombinationen zu ersuchen: durch eine Analysis dieses Graphen werden wir zu einer neuen Art seiner Matrix gelangen und vermöge dieser werden wir weitere Formeln bei den OK entdecken.

14. Definition. *In dem Entwicklungsgraphen für die OK erster Art, die aus den Elementen I-(1) zusammengestellt werden, bezeichnen wir mit dem Symbol $P^r_{n,j}$, oder kürzer P^r_j, diejenige Teilfolge der Elemente der r-ten Spalte, die durch die Verzweigung des j-ten Elementes der ersten Spalte, d.h. des Elementes x_j, entstanden ist. Die Reihenfolge der Elemente dieser Folge bestimmen wir in der Richtung von oben nach unten.*

Es seien die (nach der Def. I-3 gegenseitig disjunktiven) Teilfolgen aus der r-ten Spalte gegeben:

$$P^r_s = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_v}), \quad P^r_{s+1} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_w}).$$

Die Vereinigung dieser Folgen definieren wir als eine neue Folge und wir bezeichnen sie folgendermassen:

$$Q^r_{s,s+1} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_v}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_w})$$

Symbolisch werde diese Operation ausgedrückt:

$$Q^r_{s,s+1} = P^r_s + P^r_{s+1}; \qquad Q^r_{s,t} + P^r_{t+1} = Q^r_{s,t+1}, \qquad t = s+1, s+2, \ldots, n-1.$$

Die Reihenfolge der Elemente der Folge $Q^r_{s,t}$ ist (im Einklang mit der Reihenfolge der zu vereinenden Folgen) in der Richtung von oben nach unten gegeben.

Es sei das Zeichen $\leqq$ bzw. $\geqq$ zwischen der r-ten und $(r+1)$-ten Spalte des Graphen. Dann, für besseren Ausdruck der Eigenschaften der Verzweigung, benützen wir folgende Bezeichnung:

a) Aus dem Element x_j entsteht die Folge $x_j(\leqq) = (x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, bzw. $x_j(\geqq) = (x_1, x_2, \ldots, x_j)$.

b) Aus der Folge $P^r_s = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_z})$ entsteht die Folge $P^{r+1}_s = P^r_s(\leqq) = (x_{i_1}(\leqq), x_{i_2}(\leqq), \ldots, x_{i_z}(\leqq))$, bzw.
$P^{r+1}_s = P^r_s(\geqq) = (x_{i_1}(\geqq), x_{i_2}(\geqq), \ldots, x_{i_z}(\geqq))$.

c) Aus der Folge $Q^r_{s,t} = P^r_s + P^r_{s+1} + \ldots + P^r_t$ entsteht die Folge

$$Q^{r+1}_{s,t} = Q^r_{s,t}(\leqq) = P^r_s(\leqq) + P^r_{s+1}(\leqq) + \ldots + P^r_t(\leqq), \qquad \text{bzw.}$$

bzw.

$$Q^{r+1}_{s,t} = Q^r_{s,t}(\geqq) = P^r_s(\geqq) + P^r_{s+1}(\geqq) + \ldots + P^r_t(\geqq).$$

15. Definition.

a) Als das inverse Element zum Element x_j nennen wir das Element x_{n+1-j}, $1 \leqq j \leqq n$.

b) Eine gleichstellige inverse Folge zu einer gegebenen Folge P_s^r entsteht dadurch, dass wir jedes Element x_j der gegebenen Folge auf derselben Stelle durch das Element x_{n+1-j} ersetzen. Die so entstandene Folge bezeichnen wir $\bar{P}_s^r$ und die Reihenfolge der Elemente in dieser neuen Folge nehmen wir entgegengesetzt in Bezug auf die Folge P_s^r, d. h. von unten nach oben.

Beispiel. Es sei $P_s^r = \overrightarrow{(x_a, x_b, x_c)}$; dann $\bar{P}_s^r = \overleftarrow{(x_{n+1-a}, x_{n+1-b}, x_{n+1-c})}$. (Die Pfeile deuten die Reihenfolge der Elemente in der Folge an.)

c) Zwei ungleichstellige Folgen nennen wir invers kongruent, wenn dem k-ten Element in der Richtung von oben der einen Folge das k-te Element in der Richtung von unten der zweiten Folge entspricht, und zwar so, dass die Summe der Indizes beider Elemente $n + 1$ ergibt; $k = 1, 2, \dots s$, wobei s die Anzahl der Elemente in jeder der beiden Folgen ist.

16. Lemma.

x_j, x_{n+1-j} seien zwei gegenseitig inverse Elemente. Dann sind

a) $x_j(\leqq)$, $x_{n+1-j}(\geqq)$, b) $x_j(\geqq)$, $x_{n+1-j}(\leqq)$ zwei invers kongruente Folgen.

Beweis. Nach der Def. I-1 gilt:

a) $x_j(\leqq) = (x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}, x_n)$,
$x_{n+1-j}(\geqq) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-j}, x_{n+1-j})$

b) $x_j(\geqq) = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j)$,
$x_{n+1-j}(\leqq) = (x_{n+1-j}, x_{n+2-j}, \dots, x_{n-1}, x_n)$.

17. Lemma.

Es seien $P = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k})$ und $Q = (x_{n+1-j_k}, \dots, x_{n+1-j_2}, x_{n+1-j_1})$ zwei invers kongruente Folgen.

Dann sind die Folgen a) $P(\leqq) = (x_{j_1}(\leqq), x_{j_2}(\leqq), \dots, x_{j_k}(\leqq))$,

$$Q(\geqq) = (x_{n+1-j_k}(\geqq), \dots, x_{n+1-j_2}(\geqq), x_{n+1-j_1}(\geqq)),$$

$$b)\ P(\geqq) = (x_{j_1}(\geqq), x_{j_2}(\geqq), \dots, x_{j_k}(\geqq)),$$

$Q(\leqq) = (x_{n+1-j_k}(\leqq), \dots, x_{n+1-j_2}(\leqq), x_{n+1-j_1}(\leqq))$, *auch zwei invers kongruente Folgen.*

Beweis *ad a)* Betrachten wir, dass dem Element $x_{j_r} \in P$, bzw. dem Element $x_{n+1-j_r} \in Q$, die Teilfolge $x_{j_r}(\leqq) \supset P(\leqq)$, bzw. die Teil-Folge $x_{n+1-j_r}(\geqq) \subset Q(\geqq)$ entspricht, $r = 1, 2, \dots, k$, wobei diese Teilfolgen – nach dem Lemma 16 – invers kongruent sind.

Den Beweis ad b) führten wir ganz ähnlich durch.

18. Vereinbarung.

a) Um unsere Betrachtungen nicht unnötig zu komplizieren, setzen wir im weiteren Text zwischen die erste und zweite Spalte des Entwicklungsgraphen für die *OK* der ersten Art immer das Zeichen $\leqq$. Aus dem Satz I-28 ist ersichtlich, dass diese Massnahme keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit bedeuten wird.

b) Zwei endliche Folgen $A = \{a_k\}$, $B = \{b_k\}$, nennen wir untereinander gleich, wenn beide die gleiche Gliederzahl s haben und wenn ihre Glieder von demselben Ordnungsindex gleich sind: $a_k = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Diesen Tatbestand bezeichnen wir $A = B$.

19. Satz.

In dem Entwicklungsgraphen für OK der ersten Art, die aus den Elementen I-(1) *zusammengestellt werden, gilt folgende Gleichung*:

$$\bar{P}_j^{r+1} = Q_{1,n+1-j}^r; \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Den Beweis führen wir mittels der strengen Induktion:

1. Weil wir zwischen der ersten und der zweiten Spalte des Graphen das Zeichen $\leqq$ betrachten, so gilt es: $P_j^2 = P_j^1(\leqq) = x_j(\leqq) = (x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, so dass es nach der Def. 15-b) gilt: $\bar{P}_j^2 = (x_{n+1-j}, x_{n-j}, \ldots, x_2, x_1)$. Anderseits, nach der Def. 14, gilt es: $Q_{1,n+1-j}^1 = P_1^1 + P_2^1 + \ldots + P_{n+1-j}^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1-j})$.
Also nach der Vereinbarung 18-b), gilt der zu beweisende Satz für $r = 1$.

2. Setzen wir voraus, dass die Folgen $\bar{P}_j^{r+1}$, $Q_{1,n+1-j}^r$ untereinander gleich sind. Dann sind die Folgen P_j^{r+1}, $Q_{1,n+1-j}^r$ (nach der Def. 15-b) invers kongruent. Dann aber (da es sich hier um die *OK* erster Art handelt), sind die Folgen P_j^{r+2}, $Q_{1,n+1-j}^{r+1}$ (nach dem Lemma 17) auch invers kongruent, (siehe auch die Def. 14-b, -c) und daraus geht es (nach der Def. 15-b und der Vereinbarung 18-b) hervor, dass die Folgen $\bar{P}_j^{r+2}$, $Q_{1,n+1-j}^{r+1}$ untereinander gleich sind. Siehe auch die Tafel 2.

20. Definition.

Die Matrix eines Entwicklungsgraphen für die OK der ersten Art, die wir mit dem Symbol $\mathfrak{M}$ bezeichnen, besteht aus den Elementen S_j^r, die in n Zeilen und k Spalten angeordnet sind, wobei n bzw. k die Anzahl aller gegebenen (voneinander verschiedenen) Elemente, bzw. aller Spalten des Graphen bedeutet.

Die Zahl S_j^r gibt die Anzahl aller Elemente der Folge P_j^r (bzw. $\bar{P}_j^r$) an, d.h. diese Zahl ergibt, wieviel Elemente diejenige Teilfolge aus der r-ten Spalte des Graphen enthält, die mit dem Element x_j in der ersten Spalte beginnt.

21. Satz.

Für die Elemente S_j^r aus einer n-zeilen und k-spalten Matrix $\mathfrak{M}$ gilt die Rekurrenz:

(16) $$S_j^{r+1} = \sum_{i=1}^{n+1-j} S_i^r, \qquad j = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei $S_j^1 = 1, j = 1, 2, \ldots, n.$

Beweis. Nach der Def. 14 kann man die Relation (15) schreiben: $P_j^{r+1} = P_1^r + P_2^r + \ldots + P_{n+1-j}^r$, so dass nach der Def. 20 geht unser Satz sofort hervor.

Der eben angeführte Satz hat eine Schlüsselbedeutung für die folgenden Betrachtungen.

22. Satz.

Für die Elemente S_j^r *aus einer n-zeilen und k-spalten Matrix* $\mathfrak{M}$ *gilt:*

(17) $$A_n^r = \sum_{j=1}^{n} S_j^r$$

Beweis – siehe den Beweis des Satzes I-8.

23. Bemerkung. Auch für die Matrix $\mathfrak{M}$ könnten wir ihr Vektorfeld definieren, und zwar ganz ähnlich wie für die Matrix M, siehe die Definition I-10. Die Lage und die Orientierung der gebundenen Vektoren wird hier durch die Relation (16) angegeben.

Es ist interessant, die Vektorfelder der beiden Matrixtypen zu vergleichen. (Beispiel: $n = 3$).

Das Vektorfeld für M:

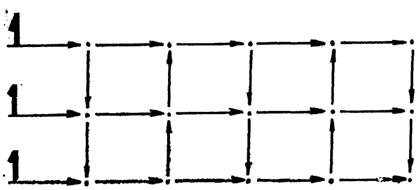


Fig. 2

Das Vektorfeld für $\mathfrak{M}$:

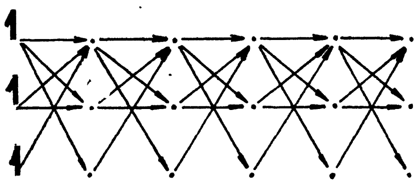


Fig. 3

Den angeführten Vektorfeldern entsprechen die folgenden Elementenwerte:

1	1	6	6	31	31
1	2	5	11	25	56
1	3	3	14	14	70

1	3	6	14	31	70
1	2	5	11	25	56
1	1	3	6	14	31

Es ist ersichtlich, dass die Folgen in den Spalten vom gleichen Index kongruent sind, bzw, bis auf die Richtung ihrer Reihenfolge, die in den Spalten vom ungeraden (geraden) Index kongruent (entgegengerichtet) ist.

Jetzt werden wir uns mit den erzeugenden Funktionen für die Zahlen S_j^r beschäftigen, die in einer gemeinsamen Zeile, bzw. Spalte einer Matrix $\mathfrak{M}$ liegen.

24. Definition. *Wir setzen die Form der erzeugenden Funktion für die Elemente der j-ten Zeile der Matrix $\mathfrak{M}$ fest, und bezeichnen sie:*

$$V_{n,j}(x) = S_1^1 \,.\, x + S_j^2 \,.\, x^2 + S_j^3 \,.\, x^3 + \ldots, \qquad 1 \leqq j \leqq n. \tag{18}$$

25. Satz.

Die erzeugenden Funktionen $V_{n,j}(x)$, $1 \leqq j \leqq n$, kann man aus dem folgenden Gleichungsystem ableiten:

$$\begin{aligned} V_{n,1}(x) &= x \,.\, \big(1 + V_{n,1}(x) + V_{n,2}(x) + \ldots + V_{n,n}(x)\big) \\ V_{n,2}(x) &= x \,.\, \big(1 + V_{n,1}(x) + V_{n,2}(x) + \ldots + V_{n,n-1}(x)\big) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{n,n}(x) &= x \,.\, \big(1 + V_{n,1}(x)\big) \end{aligned} \tag{19}$$

Beweis. Nach (18) und nach dem Satz 21 gilt es:

$$\begin{aligned} V_{n,j}(x) &= S_j^1 \,.\, x + S_j^2 \,.\, x^2 + S_j^3 \,.\, x^3 + \ldots = \\ &= 1 \,.\, x + \Big(\sum_{i=1}^{n+1-j} S_i^1\Big) \,.\, x^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n+1-j} S_i^2\Big) \,.\, x^3 + \ldots = \\ &= x + x \,.\, \sum_{i=1}^{n+1-j} (S_i^1 \,.\, x + S_i^2 \,.\, x^2 + S_i^3 \,.\, x^3 + \ldots) = \\ &= x \,.\, \Big(1 + \sum_{i=1}^{n+1-j} V_{n,i}(x)\Big); \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Das Gleichungsystem (19) kann man in einer Matrixform schreiben. Der Kürze halber bezeichnen wir V_i statt $V_{n,i}(x)$:

$$\begin{bmatrix} x-1, & x, & x, & \ldots, & x, & x, & x \\ x, & x-1, & x, & \ldots, & x, & x, & 0 \\ x, & x, & x-1, & \ldots, & x, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x, & x, & 0, & \ldots, & 0, & -1, & 0 \\ x, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -x \\ -x \\ \vdots \\ -x \\ -x \end{bmatrix} \tag{20}$$

Führen wir die Analyse der angeführten Systemmatrix:

26. Definition.

$$(21)\quad \mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & \cdot & & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{F}_n$ *bezeichnet eine Quadratmatrix n-ter Ordnung, unterhalb deren Nebendiagonale Nullen liegen und die übrigen Elemente Einser sind.* $\mathbf{E}_n$ *bedeutet die Einheitmatrix n-ter Ordnung.*

27. Lemma.

Die Matrix des Systems von linearen Gleichungen (20) *kann man folgenderweise ausdrücken:*

$$(22)\qquad x\,.\,\mathbf{F}_n - \mathbf{E}_n$$

Die Gültigkeit des Lemmas ist ersichtlich aus (59) und der Def. **14**.

28. Lemma.

Für ein beliebiges natürliches n gilt:

$$(23)\qquad V_{n,1}(x) = \frac{x\,.\,f_{n-1}(-x)}{f_n(x)}$$

Beweis. Nach (18) und gemäss dem Satz 21 gilt es: $V_{n,1}(x) = S_1^1\,.\,x + S_1^2\,.\,x^2 + {}$
$+ S_1^3\,.\,x^3 + \ldots = x + (\sum_{j=1}^{n} S_j^1)\,.\,x^2 + (\sum_{j=1}^{n} S_j^2)\,.\,x^3 + \ldots.$

Das kann man aber gemäss dem Satz 22 schreiben:

$V_{n,1}(x) = A_n^0\,.\,x + A_n^1\,.\,x^2 + A_n^2\,.\,x^3 + \ldots = x\,.\,(A_n^0 + A_n^1\,.\,x + A_n^2\,.\,x^2 + \ldots) =$
$= x\,.\,\varphi_n$, siehe I-(27). Daraus folgt nach I-(39) unsere Relation.

29. Definition.

Das Symbol $D_n(x)$ *ist die Bezeichnung für die Determinante des Systems von linearen Gleichungen* (20). *Seine Matrizenform lautet nach dem Lemma* 27*:*

$$(24)\qquad D_n(x) = |\,x\,.\,\mathbf{F}_n - \mathbf{E}_n\,|$$

30. Satz.

Für $n \geqq 1$ *gilt:*

$$(25)\qquad f_n(x) = (-1)^n\,.\,D_n(x)$$

Beweis. Wenn wir aus dem System (20) die Unbekannte $V_1 = V_{n,1}(x)$ mittels der Cramer'schen Regel ausdrücken, bekommen wir:

$$(26)\qquad V_{n,1}(x) = x\,.\,A(x) : D_n(x)$$

wobei für $A(x)$ gilt:

(27)
$$A(x) = \begin{vmatrix} -1, & x, \ldots, & x, & x \\ -1, & x-1, \ldots, & x, & 0 \\ -1, & x, \ldots, & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1, & x, \ldots, & -1, & 0 \\ -1, & 0, \ldots, & 0, & -1 \end{vmatrix}$$

Es gilt also nach (23) und (26) die Identität:

(28)
$$x \,.\, f_{n-1}(-x) : f_n(x) = x \,.\, A(x) : D_n(x)$$

Weil nach dem Lemma 8 die Polynome $f_{n-1}(-x)$, $f_n(x)$ teilfremd sind und weil das Polynom, das den Wert der Determinante $D_n(x)$, bzw. $A(x)$ ausdrückt, ersichtlich nicht höheren als des n-ten Grades, bzw. des $(n-1)$-ten Grades sein kann, so muss es gelten:

(29)
$$f_n(x) = K_n \,.\, D_n(x), \qquad f_{n-1}(-x) = K_n \,.\, \mathrm{A}(x),$$

wobei K_n eine von Null verschiedene Konstante ist.

Es bleibt also übrig zu untersuchen, ob und wie die Grösse bzw. das Vorzeichen dieses Koeffizienten vom Index n abhängt.

Die Determinante (24) kann man folgendermassen zerlegen:

$$\begin{vmatrix} x-1, & x, \ldots, & x, & x \\ x, & x-1, \ldots, & x, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x, & x, \ldots, & -1, & 0 \\ x, & 0, \ldots, & 0, & -1 \end{vmatrix} = -x \,.\, \begin{vmatrix} -1, & x, \ldots, & x, & x \\ -1, & x-1, \ldots, & x, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1, & x, \ldots, & -1, & 0 \\ -1, & 0, \ldots, & 0, & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1, & x, \ldots, & x, & x \\ 0, & x-1, \ldots, & x, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & x, \ldots, & -1, & 0 \\ 0, & 0, \ldots, & 0, & -1 \end{vmatrix}$$

Wir haben ersichtlich die Gleichung bekommen: $D_n(x) = -x \,.\, A(x) + D_{n-2}(x)$, die man mit Rücksicht auf (29), wenn man $(K_n)^{-1} = L_n$ bezeichnet, schreiben kann: $L_n \,.\, f_n(x) = -x \,.\, L_n \,.\, f_{n-1}(-x) + D_{n-2}(x)$. Daraus, wenn wir $D_j(x) = L_j \,.\, f_j(x)$ bezeichnen, erhalten wir: $L_n \,.\, f_n(x) = -x \,.\, L_n \,.\, f_{n-1}(-x) + L_{n-2} \,.\, f_{n-2}(x)$. Es gilt aber gleichzeitig: $f_n(x) = -x \,.\, f_{n-1}(-x) + f_{n-2}(x)$, siehe I-(36). Aus dem Vergleich der letzten zwei Gleichungen geht also hervor: $L_n = L_{n-2}$, oder $K_n = K_{n-2}$, wobei n ein gerader oder ungerader Index sein kann.

Weil es nach I-(35) und (22) gilt: $D_1(x) = |\, x \,.\, \mathbf{F}_1 - \mathbf{E}_1 \,| = x - 1 = -f_1(x)$; $D_2(x) = \begin{vmatrix} x-1, & x \\ x, & -1 \end{vmatrix} = 1 - x - x^2 = +f_2(x)$, so folgt, auf Grund der Rekursionsbeziehung $K_n = K_{n-2}$, die Relation: $K_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

31. Lemma.

Für eine Determinante beliebiger Ordnung n gilt es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{nn} \dots a_{n1} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{1n} \dots a_{11} \end{vmatrix} \tag{30}$$

Die Gültigkeit dieser Relation ist elementar bekannt.

32. Vereinbarung.

Führen wir die Bezeichnung für die bei der Lösung des Systems (20) mittels der Cramer'schen Regel angewandten Determinanten ein:

Es sei die i-te Spalte der Determinante $D_n(x)$ durch eine aus den Elementen $-x$ gebildete Spalte ersetzt. Die so entstandene Determinante werden wir $D_{n,i}(x)$ bezeichnen; $i = 1, 2, \dots, n$.

33. Lemma.

Für die Determinanten $D_{n,j}(x)$, $1 \leqq j \leqq n$, gelten folgende Beziehungen:

(31) $D_{n,1}(x) = -x \,.\, D_{n-1}(-x)$; *für* $j = 1$.

(32) $D_{n,j}(x) = D_{n-1,n+1-j}(-x)$, *für* $2 \leqq j \leqq n$.

Beweis *ad* (31). Die erste aus den folgenden Determinanten ist, gemäss der Vereinbarung 32, die $D_{n,1}(x)$. Addieren wir in dieser Determinante ihre erste Spalte zu allen weiteren Spalten; dann erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} -x, & x, & x, & \dots, & x, & x, & x \\ -x, & x-1, & x, & \dots, & x, & x, & 0 \\ -x, & x, & x-1, & \dots, & x, & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x, & x, & x, & \dots, & -1, & 0, & 0 \\ -x, & x, & 0, & \dots, & 0, & -1, & 0 \\ -x, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x, & 0, & 0, \dots, & 0, & 0, & 0 \\ -x, & -1, & 0, \dots, & 0, & 0, & -x \\ -x, & 0, & -1, \dots, & 0, & -x, & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x, & 0, & 0, \dots, & -x-1, & -x, & -x \\ -x, & 0, & -x, \dots, & -x, & -x-1, & -x \\ -x, & -x, & -x, \dots, & -x, & -x, & -x-1 \end{vmatrix} =$$

Entwickeln wir jetzt diese Determinante nach den Elementen ihrer ersten Zeile; damit erhalten wir:

$$= -x \,.\, \begin{vmatrix} -1, & 0, \dots, & 0, & 0, & -x \\ 0, & -1, \dots, & 0, & -x, & -x \\ \vdots & \vdots \quad \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, \dots, & -x-1, & -x, & -x \\ 0, & -x, \dots, & -x, & -x-1, & -x \\ -x, & -x, \dots, & -x, & -x, & -x-1 \end{vmatrix},$$

so dass mit Rücksicht auf das Lemma 31 ersichtlich die Relation ad (31) gilt.

Beweis *ad* (32). In der folgenden Determinante addieren wir ihre j-te Spalte zu allen übrigen Spalten:

$$D_{n,j}(x) = \begin{vmatrix} x-1, & x, & x, & \dots, & -x, & \dots, & x, & x, & x \\ x, & x-1, & x, & \dots, & -x, & \dots, & x, & x, & 0 \\ x, & x, & x-1, & \dots, & -x, & \dots, & x, & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x, & x, & x, & \dots, & -x, & \dots, & -1, & 0, & 0 \\ x, & x, & 0, & \dots, & -x, & \dots, & 0, & -1, & 0 \\ x, & 0, & 0, & \dots, & -x, & \dots, & 0, & 0, & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{\hphantom{x,\quad 0,\quad 0,\quad \dots,\quad -x}}_{j}$$

$$\overbrace{\hphantom{-1,\quad 0,\quad 0,\quad \dots,\quad -x}}$$

$$= \begin{vmatrix} -1, & 0, & 0, & \dots, & -x, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & \dots, & -x, & \dots, & 0, & 0, & -x \\ 0, & 0, & -1, & \dots, & -x, & \dots, & 0, & -x, & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & -x, & \dots, & -x-1, & -x, & -x \\ 0, & 0, & -x, & \dots, & -x, & \dots, & -x, & -x-1, & -x \\ 0, & -x, & -x, & \dots, & -x, & \dots, & -x, & -x, & -x-1 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{\hphantom{-x,\quad \dots,\quad -x,\quad -x,\quad -x-1}}_{n+1-j}$$

Entwicklen wir jetzt die Determinante nach den Elementen ihrer ersten Spalte; dadurch bekommen wir:

$$D_{nJ,}(x) = (-1)\,. \begin{vmatrix} -1, & 0, & \dots, & -x, & \dots, & 0, & 0, & -x \\ 0, & -1, & \dots, & -x, & \dots, & 0, & -x, & -x \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & -x, & \dots, & -x-1, & -x & -x \\ 0, & -x, & \dots, & -x, & \dots, & -x, & -x-1, & -x \\ -x, & -x, & \dots, & -x, & \dots, & -x, & -x, & -x-1 \end{vmatrix}$$

Wenn wir in dieser Determinante ihre $(j-1)$-te Spalte von links mit der ausgeklammerten negativen Einheit multiplizieren, dann gilt ersichtlich mit Rücksicht auf das Lemma 31 und mit Rücksicht darauf, dass die $(j-1)$-te Spalte von links hier die $(n+1-j)$-te Spalte von rechts ist, die Relation (32).

34. Satz.

Die erzeugende Funktion $V_{n,i}(x)$, $1 \leqq i \leqq n$, lautet in ihrer endlichen (unentwickelten) Form folgendermassen:

(33) $\quad V_{n,1+k}(x) = x\,.f_{n-1-2k}(-x) : f_n(x); \quad n-1-2k \geqq 0, \; k = 0, 1, 2, \dots$

(34) $\quad V_{n,n-k}(x) = x\,.f_{n-2-2k}(x) : f_n(x); \quad n-2-2k \geqq 0, \; k = 0, 1, 2, \dots$

wo es $f_0(x) = f_0(-x) = 1$ gilt.

Beweis.

a) Nach der Formel (31) gilt es: $D_{m,1}(x) = -x \,.\, D_{m-1}(-x)$; dabei gilt es nach dem Satz 30: $D_{m-1}(-x) = (-1)^{m-1} \,.\, f_{m-1}(-x)$, so dass gilt:

$$D_{m,1}(x) = (-1)^m \,.\, x \,.\, f_{m-1}(-x). \tag{35}$$

b) Nach der Formel (32) gilt es: $D_{m,m}(x) = D_{m-1,1}(-x)$; dabei gilt es nach (35): $D_{m-1,1}(-x) = (-1)^{m-1} \,.\, (-x) \,.\, f_{m-2}(x)$, so dass gilt:

$$D_{m,m}(x) = (-1)^m \,.\, x \,.\, f_{m-2}(x). \tag{36}$$

c) Nach der Formel (32) gilt es: $D_{r,j}(x) = D_{r-1,r+1-j}(-x)$; dabei gilt es nach derselben Formel: $D_{r-1,r+1-j}(-x) = D_{r-2,r-(r-j+1)}(x)$, so dass es $D_{r,j}(x) = D_{r-2,j-1}(x)$ gilt, oder, wenn wir $r - 2 = m$, $j - 1 = i$ bezeichnen, dann gilt es:

$$D_{m,i}(x) = D_{m+2,i+1}(x). \tag{37}$$

d) Durch die Verbindung der Formeln (35), (37), bekommen wir: $(-1)^m \,.\, x \,.\, f_{m-1}(-x) = D_{m,1}(x) = D_{m+2,2}(x) = D_{m+4,3}(x) = \ldots$, oder: $(-1)^m \,.\, x \,.\, f_{m-1}(-x) = D_{m+2k,1+k}(x)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$

Daraus, wenn wir $m + 2k = n$ bezeichnen, bekommen wir:

$$(-1)^n \,.\, x \,.\, f_{n-2k-1}(-x) = D_{n,1+k}(x); \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{38}$$

e) Durch die Verbindung der Formeln (36), (37), bekommen wir:

$$(-1)^m \,.\, x \,.\, f_{m-2}(x) = D_{m,m}(x) = D_{m+2,m+1}(x) = D_{m+4,m+2}(x) = \ldots,$$

oder:

$$(-1)^m \,.\, x \,.\, f_{m-2}(x) = D_{m+2k,m+k}(x); \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Daraus, wenn wir $m + 2k = n$ bezeichnen, bekommen wir:

$$(-1)^n \,.\, x \,.\, f_{n-2k-2}(x) = D_{n,n-k}(x); \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{39}$$

f) Wenn wir schliesslich beachten, dass für das Gleichungssystem (20) nach der Cramer'schen Regel $V_{n,i}(x) = D_{n,i}(x) : D_n(x)$; $1 \leqq i \leqq n$, gilt, oder mit Rücksicht auf den Satz 30:

$$V_{n,i}(x) = D_{n,i}(x) : (-1)^n \,.\, f_n(x), \qquad 1 \leqq i \leqq n, \tag{40}$$

dann, wenn wir in der Formel (40) $i = 1 + k$, bzw. $i = n - k$ setzen, so bekommen wir in Verbindung mit der Formel (38), bzw. (39), sofort die zu beweisende Formel (33), bzw. (34). W.z.b.w.

Es werden zwei Anwendungen des interessanten Satzes 34 angeführt:

$$\begin{array}{llll}
V_{4,1}(x) = x \,.\, f_3(-x) : f_4(x) & 3 & V_{3,1}(x) = x \,.\, f_2(-x) : f_3(x) & 2 \\
V_{4,2}(x) = x \,.\, f_1(-x) : f_4(x) & 1 & V_{3,2}(x) = x \,.\, f_0(-x) : f_3(x) & 0 \\
V_{4,3}(x) = x \,.\, f_0(x) : f_4(x) & 0 & V_{3,3}(x) = x \,.\, f_1(x) : f_3(x) & 1 \\
V_{4,4}(x) = x \,.\, f_2(x) : f_4(x) & 2 & \text{(Der oszillierende Zählersindex.)} &
\end{array}$$

Weiter führen wir zwei Beziehungen zwischen der erzeugenden Funktion $\varphi_n(x)$, siehe I-(27), und der Gesamtheit der Funktionen $V_{n,j}(x)$.

35. Satz.

$$\varphi_n(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} V_{n,j}(x), \qquad n \geqq 1. \tag{41}$$

Der Beweis folgt sofort durch die Durchführung der Summe aller n untereinandergeschriebenen Reihen:

$$V_{n,j}(x) = S_j^1 \,.\, x + S_j^2 \,.\, x^2 + S_j^3 \,.\, x^3 + \ldots, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

wobei wir den Satz 22 anwenden.

36. Lemma.

$$\sum_{j=1}^{n} S_j^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) \,.\, S_i^k, \qquad k \geqq 1. \tag{42}$$

Beweis. Nach dem Satz 21 gilt:

$$\begin{aligned} S_1^{k+1} &= S_1^k + S_2^k + \ldots + S_{n-1}^k + S_n^k \\ S_2^{k+1} &= S_1^k + S_2^k + \ldots + S_{n-1}^k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n^{k+1} &= S_1^k \end{aligned}$$

Durch die Summierung der n Gleichungen folgt sofort das Lemma.

37. Satz.

$$\varphi_n(x) = 1 + n \,.\, x + x \,.\, \sum_{j=1}^{n} (n + 1 - j) \,.\, V_{n,j}(x), \qquad n \geqq 1. \tag{43}$$

Beweis. Nach der Def. I-27 und gemäss dem Satz 19 gilt:

$\varphi_n(x) = A_n^0 + A_n^1 \,.\, x + A_n^2 \,.\, x^2 + \ldots = 1 + n \,.\, x + \sum_{j=1}^{n} S_j^2 \,.\, x^2 + \sum_{j=1}^{n} S_j^3 \,.\, x^3 + \ldots =$
$= 1 + n \,.\, x + x \,.\, \sum_{j=1}^{n} (S_j^2 \,.\, x + S_j^3 \,.\, x^2 + \ldots)$, sodass nach (42) gilt: $\varphi_n(x) = 1 +$
$+ n \,.\, x + x \,.\, \sum_{j=1}^{n} (n + 1 - j) \,.\, (S_j^1 \,.\, x + S_j^2 \,.\, x^2 + \ldots) = 1 + n \,.\, x + x \,.\, \sum_{j=1}^{n} (n + 1 - j) \,.$
$. \, V_{n,j}(x)$, w. z. b. w.

In den vorangehenden Absätzen wurden die erzeugenden Funktionen $V_{n,j}(x)$ für die Zahlen S_j^k, die in einer gemeinsamen Zeile der Matrix des zweiten Typs (d. h. der Matrix $\mathfrak{M}$ für OK) liegen, behandelt.

Nun versuchen wir die erzeugenden Funktionen für die Zahlen S_j^k, die in einer gemeinsamen Spalte der betreffenden Matrix liegen, festzustellen.

38. Definition. *Die erzeugende Funktion für die Zahlen S_j^k derselben Spalte der Matrix $\mathfrak{M}$, die wir mit dem Symbol $L_n^k(x)$ bezeichnen, ist folgendes spezielle Polnom:*

$$L_n^k(x) = S_1^k \,.\, x + S_2^k \,.\, x^2 + \ldots + S_n^k \,.\, x^n; \qquad n \geqq 1,\ k \geqq 1. \tag{44}$$

39. Satz.

Um eine erzeugende Funktion $L_n^k(x)$ festzustellen, $k > 1$, gebrauchen wir folgende Rekurrenz:

$$L_n^{k+1}(x) = \frac{x}{x-1} \cdot \left[x^{n+1} \,.\, L_n^k\left(\frac{1}{x}\right) - L_n^k(1)\right]; \qquad k \geqq 1, \tag{45}$$

wobei:

$$L_n^1(x) = x \,.\, \frac{x^n - 1}{x - 1} \tag{46}$$

Beweis. Subtrahieren wir voneinander die Reihen $L_n^{k+1}(x)$ und $\frac{1}{x} \,.\, L_n^{k+1}(x)$, und bestimmen die Differenzreihe nach dem Satz 21:

$$L_n^{k+1}(x) = \qquad S_1^{k+1} \,.\, x + S_2^{k+1} \,.\, x^2 + \ldots + S_{n-1}^{k+1} \,.\, x^{n-1} + S_n^{k+1} \,.\, x^n$$

$$-\frac{1}{x} L_n^{k+1}(x) = -S_1^{k+1} - S_2^{k+1} \,.\, x - S_3^{k+1} \,.\, x^2 - \ldots - S_n^{k+1} \,.\, x^{n-1}$$

Wir bekommen:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) . L_n^{k+1}(x) = -S_1^{k+1} + S_n^k \,.\, x + S_{n-1}^k \,.\, x^2 + \ldots + S_2^k \,.\, x^{n-1} + S_1^k \,.\, x^n,$$

oder mit Rücksicht auf die Definition 38:

$\left(1 - \frac{1}{x}\right) . L_n^{k+1}(x) = -S_1^{k+1} + x^{n+1} \,.\, L_n^k\left(\frac{1}{x}\right)$. Es gilt weiter nach dem Satz **21** und nach der Def. 38: $S_1^{k+1} = S_1^k + S_2^k + \ldots + S_n^k = L_n^k(1)$.

Es bleibt übrig, die Funktion $L_n^1(x)$ festzustellen. Wir wissen, dass es $S_j^1 = 1$; $j = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Deshalb gilt es nach der Def. **38**: $L_n^1(x) = x + x^2 + \ldots. + x^n = x \,.\, \frac{x^n - 1}{x - 1}$, w. z. b. w.

Die Bedeutung des Satzes 39*:* Es gilt mit Rücksicht auf den Satz 22 und auf die Def. 38:

$$A_n^k = L_n^k(1), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,\ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{47}$$

wo wir den Wert $L_n^k(1)$ durch die Anwendung der L'Hospitale'schen Regel bestimmen.

Die Darstellung der ersten drei erzeugenden Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&L_n^1(x) = \frac{x}{x-1} \cdot (x^n - 1), \\
(48) \qquad &L_n^2(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} \cdot (x^n - 1) - n \cdot \frac{x}{x-1}, \\
&L_n^3(x) = \frac{n \cdot x^{n+2}}{(x-1)^2} - \frac{x^2}{(x-1)^3} \cdot (x^n - 1) - \binom{n+1}{2} \cdot \frac{x}{x-1}.
\end{aligned}
$$

40. Bemerkung. Es ist nicht ausgeschlossen, dass es möglich wäre, durch die Anwendung des Satzes 39 die Riordan'schen hypothetischen Formeln (siehe den letzten Abschnitt des III. Teiles) zu beweisen.

41. Satz.

Zwischen den Zahlen S_j^r einer n-zeilen und k-spalten Matrix $\mathfrak{M}$ gilt folgende Relation:

$$(49) \qquad A_n^k = \sum_{j=1}^{n} S_j^{k+1-r} \cdot S_j^r; \qquad k \geqq r \geqq 1, \quad n \geqq 1.$$

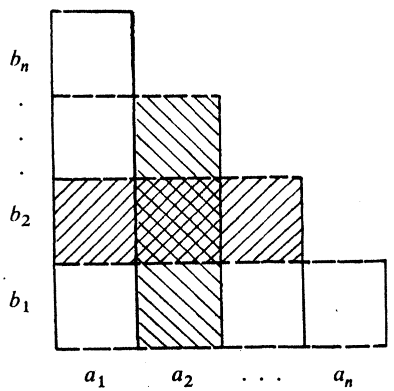
Den Beweis führen wir mittels der strengen Induktion.

a) Wir beweisen, dass es gilt:

$$(50) \qquad \sum_{j=1}^{n} S_j^p \cdot S_j^q = \sum_{j=1}^{n} S_j^{p+1} \cdot S_j^{q-1}, \qquad p \geqq 1, \quad q > 1.$$

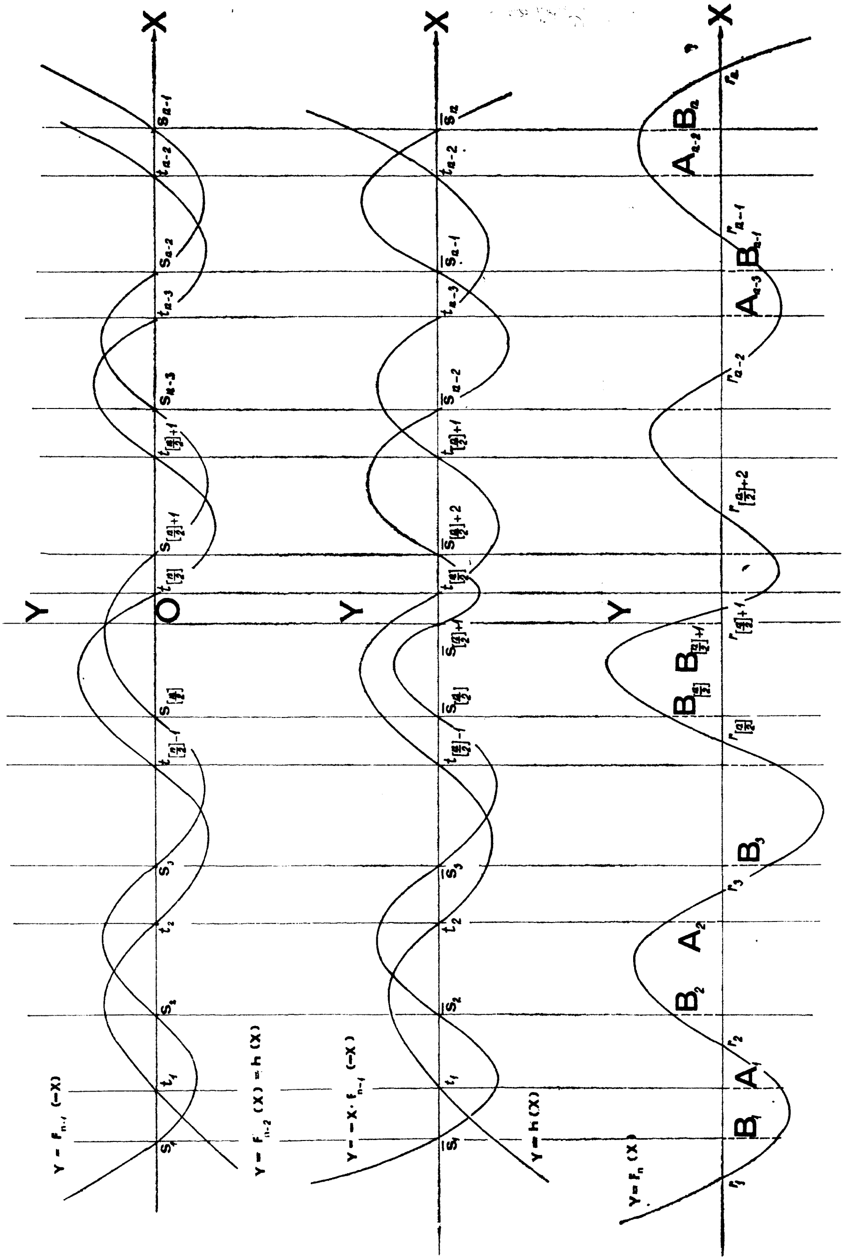
Bezeichnen wir $S_j^p = a_j$, $S_j^{q-1} = b_j$; dann lautet die Gleichung (50) nach dem Satz 21 folgendermassen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \sum_{i=1}^{n+1-j} b_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \sum_{i=1}^{n+1-j} a_i.$$



Aber die Gültigkeit dieser Gleichung ist ersichtlich: bei der geometrischen Interpretation – siehe die Figur 6 – sehen wir, dass beide Seiten der Gleichung die Fläche derselben Figur ausdrücken: bei der auf der linken (rechten) Gleichungsseite angeführten Summation wird diese Fläche aus den vertikalen (horizontalen) Zonen zusammengestellt.

Fig. 4



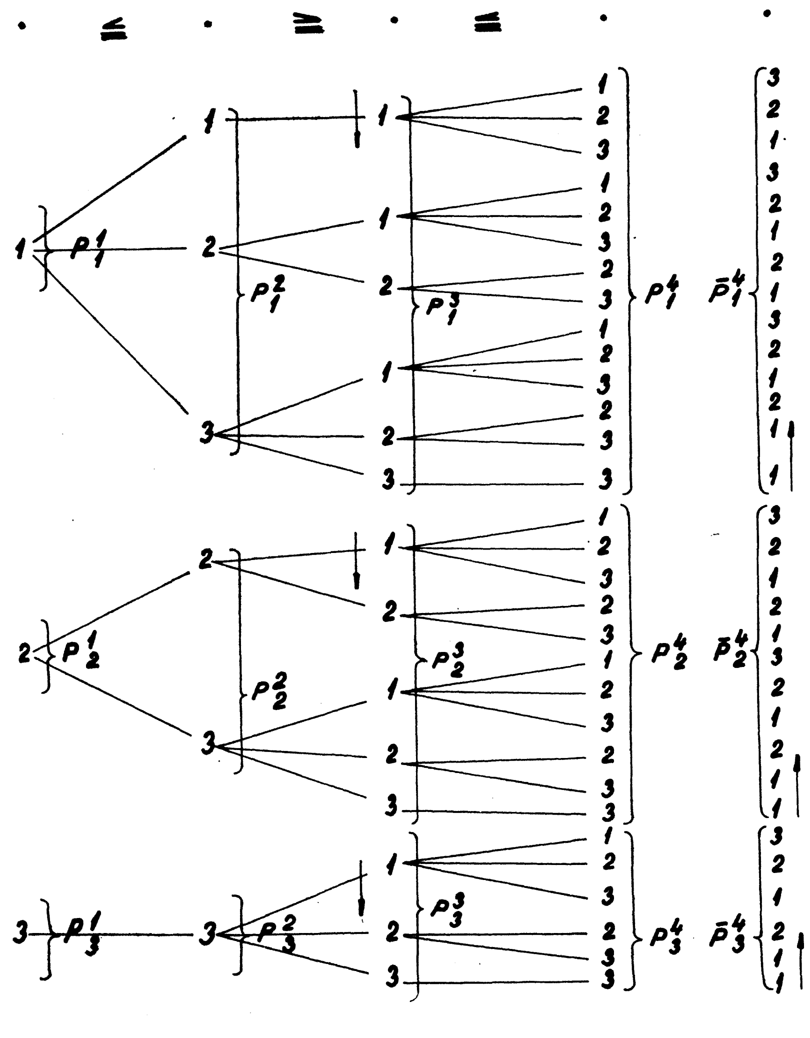
Tafel 1, die das Schema zum Beweis des Satzes 10 darstellt

Die Illustration des Satzes 19. Es sind die Elemente $\{1, 2, 3\}$ gegeben. Festzustellen ist der Graph für die oszillierenden Kombinationen 1-ter Art bis zu der 4-ten Spalte incl. und zu zeigen, dass es gilt:

$$\bar{P}_j^4 = Q^3_{1,4-j}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Wir beobachten, dass es gilt:

$$\bar{P}_1^4 = P_1^3 + P_2^3 + P_3^3, \quad \bar{P}_2^4 = P_1^3 + P_2^3, \quad \bar{P}_3^4 = P_1^3.$$



$\bar{P}_1^4 = P_1^3 + P_2^3 + P_3^3$. $\bar{P}_2^4 = P_1^3 + P_2^3$. $\bar{P}_3^4 = P_1^3$.

Tafel 2

Die Folge lesen wir in der mit dem Pfeil bezeichneten Richtung.

b) Weil $S_j^1 = 1, j = 1, 2, \ldots, n$, so gilt es nach dem Satz 21: $\sum_{j=1}^{n} S_j^1 \,.\, S_j^k = \sum_{j=1}^{n} S_j^k =$ $= A_n^k$. Damit ist der Beweis durchgeführt worden. Siehe auch die Tafel Nr. 9, in III.

42. Bemerkung. Wir führen den interessanten Umstand an, dass man den Satz 21 und 22 unmittelbar zur Ableitung der erzeugenden Funktion $\varphi_n(x)$ anwenden kann, wenn man die Zahlenwerte A_k^j, $j = 0, 1, \ldots, k - 1$, im voraus kennt. Führen wir z. B. die Ableitung der Funktion $\varphi_3(x)$ an:

a) $A_3^k = S_1^k + S_2^k + S_3^k = (S_1^{k-1} + S_2^{k-1} + S_3^{k-1}) + (S_1^{k-1} + S_2^{k-1}) + S_1^{k-1} =$ $= 2 \,.\, (S_1^{k-1} + S_2^{k-1} + S_3^{k-1}) + S_1^{k-1} - S_3^{k-1} = 2 \,.\, A_3^{k-1} + (S_1^{k-2} + S_2^{k-2} + S_3^{k-2}) -$ $- S_1^{k-2} = 2 \,.\, A_3^{k-1} + A_3^{k-2} - (S_1^{k-2} + S_2^{k-3} + S_3^{k-3}) = 2 \,.\, A_3^{k-1} + A_3^{k-2} - A_3^{k-3}$.

b) Ausserdem wissen wir von vornherein, dass es gilt: $A_3^0 = 1$, $A_3^1 = 3$, $A_3^2 = 6$, und wir benützen die Reihe I-(27) für $n = 3$. Dann geben die Gleichungen:

$$\begin{array}{rlllll}
2 \,.\, \varphi_3(x) = & 2 \,.\, A_3^0 + & 2 \,.\, A_3^1 \,.\, x + & 2 \,.\, A_3^2 \,.\, x^2 + & 2 \,.\, A_3^3 \,.\, x^3 + & 2 \,.\, A_3^4 \,.\, x^4 + \ldots \\
x \,.\, \varphi_3(x) = & & A_3^0 \,.\, x + & A_3^1 \,.\, x^2 + & A_3^2 \,.\, x^3 + & A_3^3 \,.\, x^4 + \ldots \\
-x^2 \,.\, \varphi_3(x) = & & - & A_3^0 \,.\, x^2 - & A_3^1 \,.\, x^3 - & A_3^2 \,.\, x^4 - \ldots
\end{array}$$

die Summe:

$$\varphi_3(x) \,.\, (2 + x - x^2) = 2A_3^0 + x \,.\, (2A_3^1 + A_3^0) + A_3^3 \,.\, x^2 + A_3^4 \,.\, x^3 + A_3^5 \,.\, x^4 + \ldots$$

oder nach dem Einsetzen von bekannten Werten:

$$\varphi_3(x) \,.\, (2 + x - x^2) = 2 + 7x + \frac{1}{x} \,.\, (A_3^3 \,.\, x^3 + A_3^4 \,.\, x^4 + A_3^5 \,.\, x^5 + \ldots),$$

$$\varphi_3(x) \,.\, (2 + x - x^2) = 2 + 7x + \frac{1}{x} \,.\, (\varphi_3(x) - 1 - 3x - 6x^2)$$

und daraus:

$$\varphi_3(x) = \frac{1 + x - x^2}{1 - 2x - x^2 + x^3} \,.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens für $k = 2, 3, 4, \ldots$ habe ich die Gestalt der allgemeinen Formel erfasst. Ihren Beweis habe ich jedoch mittels einer anderen Methode durchführen müssen, siehe *KOK*.

43. Bemerkung. Die Zahlen S_j^k kann man auch als Ausdrücke, die aus den Kombinationszahlen $\binom{n}{k}$ gebildet werden, ausdrücken. Durch Anwendung des Satzes 21 sowie der Formel 11 aus dem Buche [3], Seite 248, kann man leicht beglaubigen, dass in den ersten 6 Spalten der n-zeilen Matrix Werte liegen, die auf der Seite angeführt werden.

Damit haben wir die Studien beendet, die die Elemente S_j^k der n-zeilen Matrix $\mathfrak{M}$ betreffen. Ausser anderem haben wir in diesem Kapitel die eingehenderen Zusammenhänge des Polynoms $f_n(x)$ mit den oszillierenden Kombinationen gefunden:

Den Entwicklungsgraphen kann man nämlich als eine Gesamtheit von n orientierten Stämmen auffassen, wobei der j-te orientierte Stamm zu seiner Wurzel das Element x_j hat, das sich in der ersten Spalte befindet; $j = 1, 2, \ldots, n$. (Siehe die Tafel Nr. 5.) *Also, nicht nur die Funktion $\varphi_n(x)$, sondern auch die Funktion $V_{n,j}(x)$, die die Verzweigung des j-ten Stammes des Entwicklungsgraphen ausdrückt, ist — nach dem Satz* 34 *— durch das Verhältnis von zwei erwähnten Polynomen gewisser Indexe, ausdrückbar.*

44. Nachtrag. Die Elemente S_j^k der Matrix $\mathfrak{M}$ kann man als Ausdrücke, die aus den Zahlen $\binom{n}{k}$ gebildet werden, ausdrücken. Ich führe die Darstellung der ersten sechs Matrixspalten an.

Wir haben die Abkürzung benützt:

$$P = \binom{n+1}{2}^2 - \binom{n+2}{4}.$$

Bemerkung a) Aus formalen Gründen wird hier der Ausdruck $\binom{n}{k}$ auch dann angeführt, wenn es gilt $n < k$. Ein solches Glied ist allerdings gleich Null. b) Die Verfolgung der Entwickelung der Folge: $S_1^2, S_n^3, S_1^4, S_n^5, \ldots$, siehe die in den Rechtecken eingefassten Ausdrücke, hat zu der Formel III-(1) geführt.

Spalte	1.	2.	3.	4.
Zeile				
1.	$\binom{0}{0}$	$\boxed{\binom{n}{1}}$	$\binom{n+1}{2} - \binom{1}{2}$	$\boxed{\binom{n}{1} \cdot \binom{n+1}{2} - \binom{n+1}{3}}$
2.	$\binom{1}{0}$	$\binom{n-1}{1}$	$\binom{n+1}{2} - \binom{2}{2}$	$\binom{n-1}{1}\binom{n+1}{2} - \binom{n}{3}$
3.	$\binom{2}{0}$	$\binom{n-2}{1}$	$\binom{n+1}{2} - \binom{3}{2}$	$\binom{n-2}{1}\binom{n+1}{2} - \binom{n-1}{3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2.$	$\binom{n-3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{n+1}{2} - \binom{n-2}{2}$	$\binom{3}{1} \cdot \binom{n+1}{2} - \binom{4}{3}$
$n-1.$	$\binom{n-2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{n+1}{2} - \binom{n-1}{2}$	$\binom{2}{1} \cdot \binom{n+1}{2} - \binom{3}{3}$
$n.$	$\binom{n-1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\boxed{\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2}}$	$\binom{1}{1} \cdot \binom{n+1}{2} - \binom{2}{3}$

Spalte	5.	6.
Zeile		
1.	$P - \binom{1}{2} \cdot \binom{n+1}{2} + \binom{2}{4}$	$\boxed{\binom{n}{1} . P - \binom{n+1}{3}\binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{5}}$
2.	$P - \binom{2}{2} \cdot \binom{n+1}{2} + \binom{3}{4}$	$\binom{n-1}{1} P - \binom{n}{3} \cdot \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{5}$
3.	$P - \binom{3}{2} \cdot \binom{n+1}{2} + \binom{4}{4}$	$\binom{n-2}{1} P - \binom{n-1}{3}\binom{n+1}{2} + \binom{n}{5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2.$	$P - \binom{n-2}{2}\binom{n+1}{2} + \binom{n-1}{4}$	$\binom{3}{1} . P - \binom{4}{3} \cdot \binom{n+1}{2} + \binom{5}{5}$
$n-1.$	$P - \binom{n-1}{2}\binom{n+1}{2} + \binom{n}{4}$	$\binom{2}{1} . P - \binom{3}{3} \cdot \binom{n+1}{2} + \binom{4}{5}$
$n.$	$\boxed{P - \binom{n}{2} \cdot \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4}}$	$\binom{1}{1} . P - \binom{2}{3} \cdot \binom{n+1}{2} + \binom{3}{5}$

LITERATUR

[1] Karpe R., *Die Kombinationen gegebenen Profils. I.*, Brno, Archivum mathematicum, 1973.
[2] Perron O., *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig und Berlin, 1913.
[3] Netto E., *Lehrbuch der Combinatorik*, Berlin und Leipzig, 1927.

R. Karpe,
602 00 Brno, Gorkého 13,
Tschechoslowakei