Vítězslav Novák

Über Erweiterungen geordneter Mengen

Archivum Mathematicum, Vol. 9 (1973), No. 3, 141--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104804

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
IX: 141—146, 1973

ÜBER ERWEITERUNGEN GEORDNETER MENGEN

VÍTĚZSLAV NOVÁK, BRNO

(Eingegangen am 26. März 1973)

Sei G eine Menge. Unter einer *Ordnung* auf G verstehen wir, wie üblich, eine areflexive und transitive binäre Relation auf G; diese Relation wird $<$ oder $\prec$, eventuell noch mit Indices bezeichnet. Die Menge G mit der Ordnung $<$ heißt *geordnete Menge* und wird als $G\,(<)$ bezeichnet; wenn kein Mißverständnis droht, schreiben wir kurz G statt $G\,(<)$. Eine Untermenge einer geordneten Menge fassen wir immer auch als eine geordnete Menge mit der induzierten Ordnung. Für $x,\ y \in G$ schreiben wir $x \leqq y$, wenn $x < y$ oder $x = y$ gilt; die Relation $\leqq$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. Wenn $x,\ y \in G$ und $x \leqq y$ oder $y \leqq x$ gilt, dann heissen die Elemente x, y *vergleichbar;* sonst nennen wir sie *unvergleichbar* und schreiben dafür $x \parallel y$. Eine Ordnung auf G heißt *linear*, wenn es keine unvergleichbare Elemente in G gibt; G heißt dann eine *linear geordnete Menge* oder eine *Kette.* Umgekehrt nennen wir eine geordnete Menge G *Antikette*, wenn es in G keine verschiedene vergleichbare Elemente gibt. Eine geordnete Menge G heißt *gerichtet*, wenn folgendes gilt: $x,\ y \in G \Rightarrow$ es existiert $z \in G$ so, daß $x \leqq z,\ y \leqq z$.

Da eine Ordnung auf G eine binäre Relation ist, also eine Untermenge des kartesischen Quadrats G^2, können wir verschiedene Ordnungen auf G durch die mengentheoretische Inklusion vergleichen. Wenn wir im weiteren zwei (oder mehr) Ordnungen auf G vergleichen, dann bedeutet es immer eine Vergleichung durch die Inklusion. Auch können wir zu Ordnungen auf G mengentheoretische Operationen anwenden. Während der Durchschnitt einer beliebigen Menge von Ordnungen auf G wieder eine Ordnung auf G ist, gilt dieses nicht für die Vereinigung. Im weiteren werden wir jedoch die folgende, übrigens allgemein bekannte Behauptung brauchen.

Lemma. *Sei $\{<_i \mid i \in I\}$ eine gerichtete Menge der Ordnungen auf G. Dann ist $\bigcup_{i \in I} <_i$ wieder eine Ordnung auf G.*

Beweis. Bezeichnen wir $\bigcup_{i \in I} <_i$ als ϱ. Die Relation ϱ ist offenkundig areflexiv. Seien $x,\ y,\ z \in G$, $x\,\varrho\,y$, $y\,\varrho\,z$. Dann existieren $i,\ j \in I$ so, daß $x <_i y,\ y <_j z$. Da $\{<_i \mid i \in I\}$ eine gerichtete Menge ist, existiert ein Index $k \in I$ so, daß $<_i \subseteq <_k$, $<_j \subseteq <_k$. Also $x <_k y$, $y <_k z$ und da $<_k$ transitiv ist, $x <_k z$. Daraus $x\,\varrho\,z$, ϱ ist transitiv und also eine Ordnung auf G.

Da eine Kette immer eine gerichtete Menge ist, bekommen wir die

Folgerung. *Sei $\{<_i \mid i \in I\}$ eine Kette der Ordnungen auf G. Dann ist $\bigcup_{i \in I} <_i$ wieder eine Ordnung auf G.*

Eine duale Relation zu einer Ordnung auf G ist wieder eine Ordnung auf G; G mit dieser Relation heißt *dual geordnet*. Das Element a einer geordneten Menge G heißt das *kleinste Element*, wenn $a \leqq x$ für jedes $x \in G$ gilt. $a \in G$ heißt *minimales Element*, wenn es kein $x \in G$ mit $x < a$ gibt. Dual dazu werden das *größte Element* und ein *maximales Element* definiert. Eine geordnete Menge heißt *wohlgeordnet*, wenn jede nicht leere Untermenge von G das kleinste Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge nennen wir eine *wachsende Kette;* eine dual wohlgeordnete Menge heißt eine *fallende Kette*.

Eine geordnete Menge G erfüllt die *Minimalbedingung*, wenn jede fallende Kette in G endlich ist. Äquivalent damit ist die Bedingung, daß jede nicht leere Untermenge von G ein minimales Element besitzt.

Im folgenden werden wir noch den Begriff der *Ordinalsumme* ([1]) brauchen. Seien G, H disjunkte geordnete Mengen.

Die Ordinalsumme $G \oplus H$ ist die Menge $G \cup H$ mit dieser Ordnungsrelation: $x, y \in G \cup H$, $x < y \Leftrightarrow x, y \in G$ und $x < y$ in G oder $x, y \in H$ und $x < y$ in H oder $x \in G$, $y \in H$.

Sei G eine Menge, seien $<$, $\prec$ Ordnungen auf G. Wenn $< \subseteq \prec$, dann nennen wir die Ordnung $\prec$ *Erweiterung* der Ordnung $<$. Auch $G\ (\prec)$ heißt dann eine Erweiterung von $G\ (<)$. $G(\prec)$ ist also eine Erweiterung von $G\ (<)$, wenn folgendes gilt: $x, y \in G$, $x < y \Rightarrow x \prec y$. Eine Erweiterung $\prec$ der Ordnung $<$ auf G heißt *linear*, wenn $G\ (\prec)$ eine linear geordnete Menge ist. Diese Erweiterung heißt *Wohlerweiterung*, wenn $G(\prec)$ eine wohlgeordnete Menge ist.

Die Existenz einer linearen Erweiterung für jede geordnete Menge wurde zuerst von E. Szpilrajn in [6] bewiesen. Seitdem sind viele andere Beweise dieses Satzes publiziert worden; siehe etwa [2], [3], [4], [5]. In Wirklichkeit hat E. Szpilrajn folgendes bewiesen: *Ist $G(<)$ eine geordnete Menge und sind x, y beliebige unvergleichbare Elemente in G, dann existiert eine linerare Erweiterung $\prec$ der Ordnung $<$ auf G, für die $x \prec y$ gilt.* Dieser Satz kann wie folgt verallgemeinert werden.

Satz. 1. *Sei $G\ (<)$ eine geordnete Menge, sei $H \subseteq G$. Ist $\prec$ eine beliebige Erweiterung der Ordnung $<$ auf H, dann existiert eine lineare Erweiterung der Ordnung $<$ auf G, die auch Erweiterung der Ordnung $\prec$ auf H ist.*

Beweis. Definieren wir eine Relation ϱ auf G folgenderweise:

für $x, y \in H$ setzen wir $x\varrho y$ dann und nur dann, wenn $x \prec y$ gilt

für $x \in H$, $y \in G - H$ setzen wir $x\varrho y$ dann und nur dann, wenn es ein solches $u \in H$ gibt, für das $x \preceq u$ und $u < y$ gilt

für $x \in G - H$, $y \in H$ setzen wir $x\varrho y$ dann und nur dann, wenn es ein solches $u \in H$ gibt, für das $x < u$ und $u \preceq y$ gilt

für $x, y \in G - H$ setzen wir $x\varrho y$ dann und nur dann, wenn entweder $x < y$ oder es solche $u, v \in H$ gibt, für die $x < u$, $u \prec v$, $v < y$ gilt.

Die Relation ϱ ist areflexiv: ist $x \in H$, dann $x\bar{\varrho}x$, denn $\prec$ ist areflexiv; ist $x \in G - H$ und wäre $x\varrho x$, dann entweder $x < x$ oder gäbe es $u, v \in H$ mit $x < u$, $u \prec v$, $v < x$. Der erste Fall ist unmöglich und der zweite gibt $v < x < u$, also $v < u$, was ein Widerspruch mit $u \prec v$ ist, denn $\prec$ ist eine Erweiterung von $<$ auf H.

Wir beweisen weiter, daß die Relation ϱ transitiv ist. Seien also $x, y, z \in G$, $x\varrho y$, $y\varrho z$. Es können folgende Möglichkeiten eintreten:

(1) $x, y, z \in H$. Dann $x \prec y$, $y \prec z$, also $x \prec z$ und auch $x\varrho z$.

(2) $x, y \in H$, $z \in G - H$. Dann $x \prec y$ und es gibt $u \in H$ so, daß $y \preceq u$, $u < z$. Daraus folgt $x \prec u$, $u < z$ und also $x\varrho z$.

(3) $x \in H$, $y \in G - H$, $z \in H$. In diesem Fall gibt es $u \in H$ mit $x \preceq u$, $u < y$ und $v \in H$ mit $y < v$, $v \preceq z$. Aus $u < y$, $y < v$ folgt $u < v$, also auch $u \prec v$ und wir haben $x \preceq u \prec v \preceq z$, deshalb $x \prec z$ und auch $x\varrho z$.

(4) $x \in G - H$, $y, z \in H$. Dann existiert $u \in H$ mit $x < u$, $u \preceq y$ und es gilt $y \prec z$. Also haben wir $u \prec z$ und $x < u$, $u \prec z$ impliziert $x\varrho z$.

(5) $x \in H$, $y, z \in G - H$. Dann gibt es $u \in H$ mit $x \leqq u$, $u < y$ und es gilt entweder $y < z$ oder existieren v, $w \in H$ mit $y < v$, $v \prec w$, $w < z$. Im ersten Fall $x \leqq u$, $u < z$, also $x \varrho z$; im zweiten haben wir $u < v$, also auch $u \prec v$, woraus $u \prec w$ folgt. Im ganzen gilt es $x \leqq u$, $u \prec w$, $w < z$, also $x \prec w$, $w < z$ und $x \varrho z$.

(6) $x \in G - H$, $y \in H$, $z \in G - H$. In diesem Fall existiert $u \in H$ mit $x < u$, $u \leqq y$ und $v \in H$ mit $y \leqq v$, $v < z$. Ist $u = v$, dann $x < u$, $u < z$ und $x < z$. Ist $u \prec v$, dann $x < u$, $u \prec v$, $v < z$. In beiden Fällen haben wir $x \varrho z$.

(7) x, $y \in G - H$, $z \in H$. Dann gibt es $w \in H$ mit $y < w$, $w \leqq z$ und entweder $x < y$ oder existieren u, $v \in H$ so, daß $x < u$, $u \prec v$, $v < y$. Im ersten Fall gilt $x < w$, $w \leqq z$, woraus $x \varrho z$; im zweiten haben wir $v < w$, also auch $v \prec w$ und $u \prec v$, $v \prec w$, $w \leqq z \Rightarrow u \prec z$. Dann $x < u$, $u \prec z$ und das impliziert $x \varrho z$.

(8) x, y, $z \in G - H$. Dann $x < y$ oder gibt es u, $v \in H$ mit $x < u$, $u \prec v$, $v < y$ und $y < z$ oder gibt es w, $t \in H$ mit $y < w$, $w \prec t$, $t < z$. Gilt $x < y$ und $y < z$, dann $x < z$ und $x \varrho z$. Gilt $x < y$ und gibt es w, $t \in H$ mit $y < w$, $w \prec t$, $t < z$, dann haben wir $x < w$, $w \prec t$, $t < z$, also $x \varrho z$. Gilt $y < z$ und gibt es u, $v \in H$ mit $x < u$, $u \prec v$, $v < y$, dann haben wir $x < u$, $u \prec v$, $v < z$, also $x \varrho z$.

Im letzten Fall gibt es u, v, w, $t \in H$ mit $x < u$, $u \prec v$, $v < y$, $y < w$, $w \prec t$, $t < z$. Dann $v < w$, also auch $v \prec w$ und aus $u \prec v$, $v \prec w$, $w \prec t$ folgt $u \prec t$. Daraus $x < u$, $u \prec t$, $t < z$ und $x \varrho z$.

Die Relation ϱ auf G ist also auch transitiv und deshalb ist sie eine Ordnung auf G. Aus ihrer Definition folgt gleich, daß sie eine Erweiterung der Ordnung $<$ auf G ist und daß sie auf der Menge H mit $\prec$ übereinstimmt. Wenn wir also jetzt eine beliebige lineare Erweiterung der Ordnung ϱ auf G konstruieren, dann hat diese lineare Erweiterung die erwünschten Eigenschaften.

In [4] wird es bewiesen: *Eine geordnete Menge hat eine Wohlerweiterung dann und nur dann, wenn sie die Minimalbedingung erfüllt.* Im Zusammenhang damit entsteht folgende Frage: Welche ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede lineare Erweiterung der geordneten Menge G eine Wohlerweiterung ist? Die Antwort gibt folgender Satz.

Satz 2. *Sei G eine geordnete Menge. Jede lineare Erweiterung der Menge G ist eine Wohlerweiterung dann und nur dann, wenn G die Minimalbedingung erfüllt und wenn jede Antikette in G endlich ist.*

Beweis. 1. Seien beide Bedingungen für die Menge G erfüllt. Nehmen wir an, daß es eine lineare Erweiterung $\prec$ der Ordnung $<$ auf G gibt, die keine Wohlerweiterung ist. Also gibt es in G ($\prec$) eine unendliche fallende Kette $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n \succ \ldots$ Wir bezeichnen $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Die geordnete Menge $C(<)$ erfüllt die Minimalbedingung, also hat sie ein minimales Element x_{n_1}. Da wir $x_n \prec x_{n_1}$ für jedes $n > n_1$ haben und da $\prec$ eine Erweiterung von $<$ ist, gilt es $x_n < x_{n_1}$ oder $x_n \parallel x_{n_1}$*) für alle solche n. Die erste Möglichkeit ist ausgeschlossen, denn x_{n_1} ist ein minimales Element in C ($<$). Also $x_n \parallel x_{n_1}$ für jedes $n > n_1$. Bezeichnen wir jetzt $C_1 = \{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots\}$. Die Menge C_1 ($<$) erfüllt die Minimalbedingung und hat also ein minimales Element x_{n_2}($n_2 > n_1$). Aus demselben Grund wie oben gilt $x_n \parallel x_{n_2}$ für jedes $n > n_2$. Bezeichnen wir jetzt $C_2 = \{x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \ldots\}$ und finden ein minimales Element x_{n_3} in C_2 ($<$). Durch die vollständige Induktion können wir ein Element x_{n_k} für jedes natürliche k so finden, daß $x_{n_k} \parallel x_n$ für alle $n > n_k$ gilt. Dann ist $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$ eine unendliche Antikette in G ($<$), was ein Widerspruch ist.

*) Das Symbol $\parallel$ bedeutet hier die Unvergleichbarkeit im Bezug auf die Ordnung $<$.

2. Seien die Bedingungen des Satzes für eine geordnete Menge G $(<)$ nicht erfüllt. Erfüllt G $(<)$ nicht die Minimalbedingung, dann ist keine lineare Erweiterung von G $(<)$ eine Wohlerweiterung. Enthält G $(<)$ eine unendliche Antikette H (wir können voraussetzen, daß H abzählbar ist), dann wählen wir auf H eine beliebige lineare Ordnung $\prec$, die keine Wohlordnung ist (z. B. eine Ordnung in den Typ η aller rationalen Zahlen). Nach dem Satz 1. gibt es eine lineare Erweiterung der Ordnung $<$ auf G, die zugleich eine Erweiterung der Ordnung $\prec$ auf H ist; diese lineare Erweiterung ist dann keine Wohlerweiterung der Menge G $(<)$.

In [4] wird eine Konstruktion beschrieben, die die *Konstruktion* (K) genannt wird. Diese Konstruktion ist folgende: Sei G $(<)$ eine geordnete Menge. Schreiben wir diese Menge in der Form einer wachsenden Folge des Typs β (β eine Ordnungszahl): $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_\lambda, \ldots \mid \lambda < \beta\}$ und bezeichnen $G_\alpha = \{g_0, g_1, \ldots, g_\lambda, \ldots \mid \lambda < \alpha\}$ für jedes $\alpha \leqq \beta$. Auf G_α definieren wir jetzt eine Ordnung $\prec$ durch die transfinite Induktion so:

G_0 ist leer, also geordnet. Wenn die Relation $\prec$ auf jeder Menge G_λ $(\lambda < \alpha)$ definiert wird, dann setzen wir:

1) ist α eine isolierte Ordnungszahl dann

$$g_{\alpha-1} \prec g_\lambda (\lambda < \alpha - 1) \Leftrightarrow \text{es existiert}$$

eine Ordnungszahl $\lambda_{\alpha-1} < \alpha - 1$ mit $g_{\alpha-1} < g_{\lambda_{\alpha-1}}$ und $g_{\lambda_{\alpha-1}} \leqq g_\lambda$ in $G_{\alpha-1}$ $(\prec)$

$$g_\lambda \prec g_{\alpha-1} (\lambda < \alpha - 1) \quad \text{anders}$$

$$g_\lambda \prec g_\mu (\lambda, \quad \mu < \alpha - 1) \Leftrightarrow g_\lambda \prec g_\mu \quad \text{in} \quad G_{\alpha-1}(<).$$

2) Ist α eine Limeszahl und sind $g_\lambda, g_\mu \in G_\alpha$ $(\lambda, \mu < \alpha)$, dann $g_\lambda \prec g_\mu \Leftrightarrow g_\lambda \prec g_\mu$ in G_ν $(\prec)$ für ein passendes $\nu < \alpha$, $\nu > \lambda$, $\nu > \mu$.

Zugleich wird in [4] bewiesen: *Ist G $(<)$ eine geordnete Menge und G_β $(\prec)$ eine Kette, die man aus G $(<)$ durch die Konstruktion (K) bekommt, dann is G_β $(\prec)$ eine lineare Erweiterung von G $(<)$. Wenn überdies G $(<)$ die Minimalbedingung erfüllt, dann ist G_β $(\prec)$ eine Wohlerweiterung von G $(<)$.* Dieser Satz kann wie folgt ergänzt werden:

Satz 3. *Sei G eine geordnete Menge, die die Minimalbedingung erfüllt. Jede Wohlerweiterung der Menge G kann man durch die Konstruktion (K) bekommen.*

Beweis. Sei $\prec$ eine beliebige Wohlerweiterung der Ordnung $<$ auf G, also $G = \{g_0 \prec g_1 \prec \ldots \prec g_\lambda \prec \ldots \mid \lambda < \beta\}$. Wenden wir die Konstruktion (K) zu G $(<)$ an und zwar so, daß wir G in der Form der oben gewähnten Folge schreiben, d. h. $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_\lambda, \ldots \mid \lambda < \beta\}$. Sei $G_\alpha = \{g_0, g_1, \ldots, g_\lambda, \ldots \mid \lambda < \alpha\}$ $(\alpha \leqq \beta)$ und bezeichnen wir die durch diese Konstruktion bekommene Wohlerweiterung als ϱ. Wir beweisen durch die transfinite Induktion, daß die Ordnungen $\prec$ und ϱ auf G_α für jedes $\alpha \leqq \beta$ identisch sind. Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung klar. Sei $\alpha > 0$, $\alpha \leqq \beta$ und nehmen wir an, daß diese Behauptung für jedes $\lambda < \alpha$ richtig ist. Wenn α eine isolierte Ordnungszahl ist, dann sind $\prec$ und ϱ identisch auf $G_{\alpha-1}$. Nehmen wir an, daß sie auf G_α nicht identisch sind. Also ist $g_{\alpha-1}$ nicht das größte Element in G_α (ϱ), d. h. $g_{\alpha-1} \varrho g_\lambda$ für ein $\lambda < \alpha - 1$. Das bedeutet, daß es ein $\lambda_{\alpha-1} < \alpha - 1$ gibt mit $g_{\alpha-1} < g_{\lambda_{\alpha-1}}$ und $g_{\lambda_{\alpha-1}} \varrho g_\lambda$ oder $\lambda_{\alpha-1} = \lambda$. Daraus $g_{\alpha-1} \prec g_{\lambda_{\alpha-1}}$ und da die Ordnung $\prec$ mit der Ordnung der Indices übereinstimmt, $\alpha - 1 < \lambda_{\alpha-1}$, was ein Widerspruch ist. Wenn α eine Limeszahl ist, dann sind $\prec$ und ϱ identisch auf G_λ für jedes $\lambda < \alpha$. Seien $g_\mu, g_\nu \in G_\alpha$, d. h. $\mu < \alpha$, $\nu < \alpha$. Es existiert ein $\lambda < \alpha$ mit $\mu < \lambda$, $\nu < \lambda$. Dann $g_\mu, g_\nu \in G_\lambda$ und deshalb $g_\mu \prec g_\nu \Leftrightarrow g_\mu \varrho g_\nu$. Die Ordnungen $\prec$ und ϱ sind also identisch auch auf G_α. Für $\alpha = \beta$ bekommen wir die Behauptung des Satzes.

In [5] beschreibt V. Sedmak eine andere Konstruktion einer linearen Erweiterung. Wir geben hier diese Konstruktion in einer ein wenig modifizierten Form an und werden sie *Konstruktion* (S) nennen.

Ist G eine Menge mit einer beliebigen Ordnung $<$ und $a \in G$, dann setzen wir A (a) $= \{x \in G \mid x \leqq a\}$ und bezeichnen $<_a$ die Ordnung, die zu der Ordinalsumme $A(a) \oplus [G - A(a)]$ zugehört. Es ist klar, daß diese Ordnung eine Erweiterung der Ordnung $<$ ist und daß das Element a vergleichbar mit allen $x \in G$ in $<_a$ ist. Die Konstruktion (S) ist jetzt folgende.

Sei $G\ (<)$ eine geordnete Menge. Schreiben wir G in der Form einer wachsenden Folge des Typs β: $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_\lambda, \ldots \mid \lambda < \beta\}$ und definieren wir die Ordnung $<_\lambda$ für jedes $\lambda < \beta$ durch die transfinite Induktion so: $<_0 = <_{g_0}$ und $<_\lambda = (\bigcup\limits_{\mu<\lambda} <_\mu) g_\lambda$ für $\lambda > 0$. Aus der Definition folgt gleich, daß $<_\lambda$ Erweiterung von $<_\mu$ ist, wenn $\mu < \lambda$ gilt. Die konstruierende lineare Erweiterung ist dann $\prec\ = \bigcup\limits_{\lambda<\beta} <_\lambda$. V. Sedmak hat bewiesen, daß die Konstruktion (S) eine lineare Erveiterung liefert. Sein Resultat kann wie folgt ergänzt werden.

Satz 4. *Sei G eine geordnete Menge, die die Minimalbedingung erfüllt. Dann ist jede mit der Konstruktion (S) gewonnene lineare Erweiterung eine Wohlerweiterung der Menge G und man kann jede Wohlerweiterung von G mit der Konstruktion (S) gewinnen.*

Beweis. Schreiben wir G in der Form $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_\lambda, \ldots \mid \lambda < \beta\}$ und bezeichnen die durch die Konstruktion (S) bekommene lineare Erweiterung als $\prec$. Nehmen wir an, daß sie keine Wohlerweiterung ist, d. h. daß es eine unendliche fallende Kette $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ in $G\ (<)$ gibt. Für jedes n existiert ein Index λ_n so, daß $x_n = g_{\lambda_n}$. In der Folge $\{\lambda_n\}$ gibt es eine wachsende Teilfolge; also existieren in $G\ (\prec)$ unendliche fallende Ketten $\{g_{\lambda_n}\}$, für die $\{\lambda_n\}$ eine wachsende Folge ist. Wählen wir eine solche Kette folgenderweise: λ_1 ist die kleinste Ordnungzsahl mit der Eigenschaft: in $G\ (\prec)$ gibt es eine unendliche fallende Kette der Elemente, deren Indices eine wachsende Folge bilden und mit dem größten Element g_{λ_1}; $\lambda_2 > \lambda_1$ ist die kleinste Ordnungszahl mit der Eigenschaft: in $G\ (\prec)$ gibt es eine unendliche fallende Kette der Elemente, deren Indices eine wachsende Folge bilden und mit dem größten und zweitgrößten Elemente $g_{\lambda_1}, g_{\lambda_2}$ usw. Wir haben also $g_{\lambda_1} \succ g_{\lambda_2} \succ \ldots \succ g_{\lambda_n} \succ \ldots$ und da $\prec$ eine Eeweiterung von $<$ ist, gilt $g_{\lambda_n} > g_{\lambda_{n+1}}$ oder $g_{\lambda_n} \parallel g_{\lambda_{n+1}}$ für jedes n. Es ist unmöglich $g_{\lambda_n} > g_{\lambda_{n+1}}$ für jedes n, denn $G\ (<)$ erfüllt die Minimalbedingung. Deshalb existiert die kleinste natürliche Zahl k mit $g_{\lambda_k} \parallel g_{\lambda_{k+1}}$. Da $g_{\lambda_k} \succ g_{\lambda_{k+1}}$, existiert die kleinste Ordnungszahl $\mu < \beta$, für die $g_{\lambda_{k+1}} <_\mu g_{\lambda_k}$; dabei ist $\mu \leqq \lambda_k$, denn in $<_{\lambda_k}$ ist g_{λ_k} vergleichbar mit allen Elementen aus G.

(1) Sei $\mu = \lambda_k$. Dann ist $g_{\lambda_k} \parallel g_{\lambda_{k+1}}$ in $<_\nu$ für jedes $\nu < \lambda_k$, also auch $g_{\lambda_k} \parallel g_{\lambda_{k+1}}$ in $\bigcup\limits_{\nu<\lambda_k} <_\nu$. Daraus folgt $g_{\lambda_k} <_{\lambda_k} g_{\lambda_{k+1}}$, denn $g_{\lambda_{k+1}} \in G - A(g_{\lambda_k})$ in $G\ (\bigcup\limits_{\nu<\lambda_k} <_\nu)$ und das ist ein Widerspruch.

(2) Sei $\mu < \lambda_k$. Wir haben wieder $g_{\lambda_k} \parallel g_{\lambda_{k+1}}$ in $<_\nu$ für jedes $\nu < \mu$, also auch $g_{\lambda_k} \parallel g_{\lambda_{k+1}}$ in $\bigcup\limits_{\nu<\mu} <_\nu$. Wenn jetzt $g_{\lambda_k}, g_{\lambda_{k+1}} \in A(g_\mu)$ oder $g_{\lambda_k}, g_{\lambda_{k+1}} \in G - A(g_\mu)$ in $G(\bigcup\limits_{\nu<\mu} <_\nu)$ wäre, dann $g_{\lambda_k} \parallel g_{\lambda_{k+1}}$ in $<_\mu$, was ein Widerspruch ist. Ebenso ist unmöglich $g_\lambda \in A(g_\mu)$, $g_{\lambda_{k+1}} \in G - A(g_\mu)$, denn dann $g_{\lambda_k} <_\mu g_{\lambda_{k+1}}$, ein Widerspruch. Es muß also $g_{\lambda_k} \in G - A(g_\mu)$, $g_{\lambda_{k+1}} \in A(g_\mu)$ in $G\ (\bigcup\limits_{\nu<\mu} <_\nu)$ gelten, woraus $g_{\lambda_{k+1}} <_\mu g_\mu$,

$g_\mu <_\mu g_{\lambda_k}$, also auch $g_{\lambda_{k+1}} \prec g_\mu$, $g_\mu \prec g_{\lambda_k}$ folgt. Finden wir das größte n mit $\lambda_n < \mu$, dann ist $n \leqq k - 1$ und $g_{\lambda_1} \succ \ldots \succ g_{\lambda_n} \succ g_\mu \succ g_{\lambda_{k+1}} \succ \ldots$ ist eine unendliche fallende Kette mit der wachsenden Folge der Indices. Das ist aber ein Widerspruch mit der Minimalität von λ_{n+1}. Sei jetzt $\prec$ eine beliebige Wohlerweiterung von $<$ auf G, also $G = \{g_0 \prec g_1 \prec \ldots \prec g_\lambda \prec \ldots \mid \lambda < \beta\}$. Wenden wir die Konstruktion (S) zu $G\,(<)$ an und zwar so, daß wir setzen $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_\lambda, \ldots \mid \lambda < \alpha\}$. Wir zeigen, daß $\prec$ eine Erweiterung von $<_\lambda$ für jedes $\lambda < \beta$ ist.

Der Beweis wird mit der transfiniten Induktion durchgeführt.

Sei $\lambda = 0$. Das Element g_0 muß minimal in $G\,(<)$ sein; also $A(g_0) = \{g_0\}$ und g_0 ist das kleinste Element in $G\,(<_0)$; zugleich $(G - \{g_0\})\,(<_0) = (G - \{g_0\})\,(<)$. Da $\prec$ eine Erweiterung von $<$ auf G, also auch auf $G - \{g_0\}$ ist, folgt daraus, daß sie auch eine Erweiterung von $<_0$ ist.

Sei $\lambda > 0$, $\lambda < \beta$ und nehmen wir an, daß die Behauptung für jedes $\mu < \lambda$ richtig ist. Also ist $\prec$ eine Erweiterung von $<_\mu$ für jedes $\mu < \lambda$ und deshalb ist sie auch eine Erweiterung von $\bigcup\limits_{\mu<\lambda} <_\mu$. Bezeichnen wir die Ordnung $\bigcup\limits_{\mu<\lambda} <_\mu$ als ϱ. Setzen wir jetzt voraus, daß $\prec$ keine Erweiterung von $<_\lambda$ ist. Dann existieren ν, $\varkappa < \beta$, $\nu < \varkappa$ so, daß $g_\varkappa <_\lambda g_\nu$. Wenn $g_\nu, g_\varkappa \in A(g_\lambda)$ in $G(\varrho)$ wäre, dann häten wir einen Widerspruch, denn $<_\lambda$ ist identisch mit ϱ auf $A(g_\lambda)$; ebenso ist unmöglich g_ν, $g_\varkappa \in G - A(g_\lambda)$. Also $g_\varkappa \in A(g_\lambda)$, $g_\nu \in G - A(g_\lambda)$. Daraus folgt $g_\varkappa \varrho g_\lambda$ oder $g_\varkappa = g_\lambda$, also auch $g_\varkappa \preceq g_\lambda$, d. h. $\varkappa \leqq \lambda$. Ist jetzt $g_\lambda \varrho g_\nu$, dann $g_\lambda \prec g_\nu$ und $\lambda < \nu$. Ist $g_\lambda \parallel g_\nu$ in ϱ, dann auch $\lambda < \nu$, denn aus $\nu < \lambda$ folgt, daß die Elemente g_ν, g_λ vergleichbar in $<_\nu$, also auch in $\varrho = \bigcup\limits_{\mu<\lambda} <_\mu$ sind. In jedem Fall gilt also $\lambda < \nu$, sodaß $\varkappa \leqq \lambda < \nu \Rightarrow \varkappa < \nu$, was ein Widerspruch mit der Voraussetzung $\nu < \varkappa$ ist.

Die Ordnung $\prec$ ist also eine Erweiterung von $<_\lambda$ für jedes $\lambda < \beta$, also auch eine Erweiterung von $\bigcup\limits_{\lambda<\beta} <_\lambda$. Da $\bigcup\limits_{\lambda<\beta} <_\lambda$ linear ist, gilt $\prec = \bigcup\limits_{\lambda<\beta} <_\lambda$ und der Satz wird bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. Birkhoff: *Generalized Arithmetic.* Duke Math. Journ. 9 (1942), 283–302.

[2] T. Hiraguchi: *On the Dimension of Partially Ordered Sets.* Sci. Rep. of the Kanazawa Univ. 1 (1951), 77–94.

[3] J. Łoś–G. Ryll–Nardzewski: *On the Application of Tychonoff's Theorem in Mathematical Proofs.* Fund. Math. 38 (1951), 233–237.

[4] V. Novák: *On the Lexicographic Product of Ordered Sets.* Czech. Math. Journ. 15 (90) (1965) 270–282.

[5] V. Sedmak: *Dimenzija djelomično uredenih skupova pridruženih poligonima i poliedrima,* Glasnik mat.-fiz. i astr. 7 (1952), 169–182.

[6] E. Szpilrajn: *Sur l'extension de l'ordre partiel.* Fund. Math. 16 (1930), 386–389.

V. Novák
Mathematisches Institut
J. E. Purkyně Universität
Brno, Janáčkovo nám. 2a
Tschechoslowakei