Archivum Mathematicum

Věra Radochová

Das Iterationsverfahren für eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

Archivum Mathematicum, Vol. 9 (1973), No. 1, 1--8

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104785`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
IX: 1—8 1973

DAS ITERATIONSVERFAHREN FÜR EINE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG VIERTER ORDNUNG

VĚRA RADOCHOVÁ

(Eingegangen am 17. April 1972)

Das Ableiten der partiellen Differentialgleichung der Längs- oder Torsionsschwingungen von Stäben führt bei der Benutzung der energetischen Methode und wenn wir dabei die Deformation des Querschnittes in seiner Ebene in Erwägung ziehen, zu einer partiellen Differentiagleichung vierter Ordnung [1], die man in der Form

$$u_{xxtt} = A(t, x)\, u_{xx} + B(t, x)\, u_{tt} \tag{1}$$

schreiben kann.

Diese Differentialgleichung wurde für gewisse Nebendingungen gelöst [3], [4], wobei das Iterationsverfahren benützt wurde. In den folgenden Absätzen ist für eine allgemeinere Form der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung unter gewissen Nebenbedingungen ein Existenzsatz mittles des Iterationsverfahrens bewiesen und die Eindeutigkeit der Lösung bestimmt, wobei die Differentialgleichung (1) ein Sonderfall dieser Differentialgleichung ist.

Satz 1. Der Existenzsatz.

Es sei die Differentialgleichung

$$u_{xxtt} = f(t, x, u, u_{xx}, u_{tt}) \tag{2}$$

gegeben. Die Funktion $f(t, x, u, v, w)$ *sei in dem Gebiete* $D = \{\alpha < x < \beta;\ \gamma < t < \delta\}$ *und für beliebige* u, v, w *stetig und erfülle in jedem kompakten Teilgebiete* $D_0 \subset D$ *in Bezug auf* u, v, w *die Lipschitz-Bedingung*

$$\begin{aligned} &| f(t, x, u_2, v_2, w_2) - f(t, x, u_1, v_1, w_1) | \leqq \\ &\leqq M(| u_2 - u_1 | + | v_2 - v_1 | + | w_2 - w_1 |). \end{aligned} \tag{3}$$

Fener sei $\alpha < \xi_0 \leqq \xi_1 < \beta$, $\gamma < \tau < \delta$, *und die Nebenbedingungen seien längs der Charakteristiken* $t = \tau$, $x = \xi_0$, $x = \xi_1$, *so vorgeschrieben, dass die partielle Differentialgleichung*

$$u_{xxtt} = 0 \tag{4}$$

genau eine Lösung in dem Gebiete D *hat, die diese Nebenbedingungen erfüllt, die der Funktionenklasse* $C^2(D)$ *gehört und die wir* $u_0(t, x)$ *bezeichnen.*

Dann existiert mindestens eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2), *die den vorgeschriebenen Nebenbedingungen genügt und man erhält diese Lösung mittels des Iterationsverfahrens von Picard als den Grenzwert der Folge*

(5) $$u_n(t, x) = u_0(t, x) + F_{n-1}(t, x),$$

wo die Bezeichnung

(6) $$F_k(t, x) = \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f\left(t_2, x_2, u_k, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial t_2^2}\right) dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1$$

benützt wurde.

Beweis. Als erste Annäherung wählen wir die Funktion $u_0(t, x)$, die den Voraussetzungen nach gegebene Nebenbedingungen erfüllt und der Funtionenklasse $C^2(D)$ gehört.

Sei $u_{n-1}(t, x)$ die $(n-1)$-te Näherungsfunktion der gesuchten Lösung, die der Klasse $C^2(D)$ gehört. Dann gehört wegen der Stetigkeit des Integranden auch die n-te Näherungsfunktion

$$u_n(t, x) = u_0(t, x) + F_{n-1}(t, x)$$

der Klase $C^2(D)$.

Beweisen wir, dass die Folge von Näherungsfunktionen $u_n(t, x)$ in jedem kompakten Teilgebiete $D_0 \subset D$, wo $D_0 = \{\alpha_0 \leqq x \leqq \beta_0;\ \gamma_0 \leqq t \leqq \delta_0\}$ ist und $\alpha_0 \leqq \leqq \xi_0 \leqq \xi_1 \leqq \beta_0$, $\gamma_0 \leqq \tau \leqq \delta_0$ gilt, gleichmässig konvergiert.

Die Funktion $f\left(t, x, u_0, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\right)$ ist in D_0 stetig und damit auch beschränkt. Es sei $|f| \leqq A$; dann ist für $n = 1$:

$$|u_1(t, x) - u_0(t, x)| = |F_0(t, x)| \leqq \frac{1}{4} A\, |t - \tau|^2\, |x - \xi_0|\, |x - \xi_1|,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right| = |F_{0xx}(t, x)| \leqq \frac{1}{2} A\, |t - \tau|^2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\right| = |F_{0tt}(t, x)| \leqq \frac{1}{2} A\, |x - \xi_0|\, |x - \xi_1|,$$

wo die Bezeichnung

(7) $$F_{kxx}(t, x) = \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} f\left(t_2, x, u_k, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial t_2^2}\right) dt_2\, dt_1$$
$$F_{ktt}(t, x) = \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^x f\left(t, x_2, u_k, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\right) dx_2\, dx_1$$

benützt wurde.

Es sei entweder $\xi = \xi_0$ wenn $|x - \xi_0| \geqq |x - \xi_1|$,
oder $\xi = \xi_1$ wenn $|x - \xi_0| \leqq |x - \xi_1|$

für $\alpha_0 \leqq x \leqq \beta_0$.

Dann ist $|x - \xi_1|\, |x - \xi_0| \leqq |x - \xi|^2$.

Es sei ferner $2K = \max\{2, [(\beta_0 - \alpha_0) + (\delta_0 - \gamma_0)]^2\}$. Dann ist

(8) $$(|x - \xi| + |t - \tau|)^2 \leqq 2K$$

und gelten die Beziehungen

$$
| u_1(t, x) - u_0(t, x) | \leqq \frac{1}{2} AK(| t - \tau | + | x - \xi |)^2
$$

$$
(9) \qquad \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right| \leqq \frac{1}{2} AK(| t - \tau | + | x - \xi |)^2
$$

$$
\left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right| \leqq \frac{1}{2} AK(| t - \tau | + | x - \xi |)^2
$$

Wir beweisen nun, dass für beliebige natürliche Zahl n folgende Beziehungen

$$
| u_n(t, x) - u_{n-1}(t, x) | \leqq \frac{A}{3M} \frac{(3MK)^n}{(2n)!} (| t - \tau) + | x - \xi |)^{2n}
$$

$$
(10) \qquad \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} \right| \leqq \frac{A}{3M} \frac{(3MK)^n}{(2n)!} (| t - \tau | + | x - \xi |)^{2n}
$$

$$
\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2} \right| \leqq \frac{A}{3M} \frac{(3MK)^n}{(2n)!} (| t - \tau | + | x - \xi |)^{2n}
$$

gelten, wobei M die Lipschitz-Konstante ist.
Für $n = 1$ ist die Gültigkeit der Beziehungen (10) wahr, da sie mit den Beziehungen (9) übereinstimmen.

Nehmen wir an, dass (10) für $n = m$ gilt; dann ist für $n = m + 1$:

$$
| u_{m+1} - u_m | = | F_m(t, x) - F_{m-1}(t, x) |
$$

$$
\leqq M \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} \left\{ | u_m - u_{m-1} | + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_2^2} \right| + \right.
$$

$$
\left. + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t_2^2} \right| \right\} \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1
$$

$$
\leqq \frac{A}{3M} \frac{(3MK)^m}{(2m)!} . 3M \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} (| t_2 - \tau | + | x_2 - \xi |)^{2m} \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1
$$

$$
\leqq \frac{A}{3M} \frac{(3MK)^{m+1}}{(2m+2)!} (| t - \tau | + | x - \xi |)^{2m+2}
$$

Ferner ist für die zweite partielle Ableitung nach x:

$$
\left| \frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right| = | F_{mxx}(t, x) - F_{m-1, xx}(t, x) |
$$

$$
\leqq M \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \left\{ | u_m - u_{m-1} | + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t_2^2} \right| \right\} \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1
$$

$$
\leqq \frac{A}{3M} \frac{(3MK)^{m+1}}{(2m+2)!} (| t - \tau | + | x - \xi |)^{2m+2}
$$

Ähnlich erhalten wir für die zweite partielle Ableitung nach t:

$$\left| \frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \right| = | F_{mtt}(t, x) - F_{m-1, tt}(t, x) |$$

$$\leqq \frac{A}{3M} \frac{(3MK)^m}{(2m)!} \cdot 3M \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} (| t - \tau | + | x_2 - \xi |)^{2m} \, dx_2 \, dx_1$$

$$\leqq \frac{A}{3M} \frac{(3MK)^{m+1}}{(2m+2)!} (| t - \tau | + | x - \xi |)^{2m+1}$$

Die Folge der Funktionen

$$u_n(t, x) = u_0(t, x) + [u_1(t, x) - u_0(t, x)] + [u_2(t, x) - u_1(t, x)] + \ldots + [u_n(t, x) - u_{n-1}(t, x)]$$

und die Folgen ihrer zweiten partiellen Ableitungen nach x und t konvergieren also für $n \to \infty$ gleichmässig in jedem kompakten Teilgebiete $D_0 \subset D$ gegen eine Funktion $u(t, x)$ und gegen ihre partielle Ableitungen $u_{xx}(t, x)$, $u_{tt}(t, x)$. Da D_0 ein beliebiges Teilrechteck ist, ist die Funktion $u(t, x)$ in dem ganzen Gebiete D vorhanden und einschliesslich ihrer zweiten partiellen Ableitungen nach x und t stetig.

Wenn wir in (5) zum Grenzwert für $n \to \infty$ übergehen, erhalten wir

$$u(t, x) = u_0(t, x) + \int_{\tau}^{t} \int_{\tau}^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, u, u_{xx}, u_{tt}) \, dx_2 \, dx_1 \, dt_2 \, dt_1. \tag{11}$$

Wegen der Voraussetzungen über die Funktion $f(t, x, u, v, w)$ existiert auch die vierte partielle Ableitung u_{xxtt}, ist stetig und genügt der Differentialgleichung (2). Da die Funktion $u_0(t, x)$ die vorgeschriebenen Nebenbedingungen längs der Charakteristiken $t = \tau$, $x = \xi_0$, $x = \xi_1$ erfüllt, erfüllt sie auch die Funktion $u(t, x)$, wie aus der Beziehung (11) klar ist.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1. gibt es in dem Gebiete D genau eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2), die den vorgeschriebenen Nebenbedingungen längs der Charakteristiken $x = \xi_0$, $x = \xi_1$, $t = \tau$ genügt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die Differentialgleichung (2) zwei Lösungen $u(t, x)$ und $\bar{u}(t, x)$ hat, die als Grenzwert der Folge der Näherungsfunktionen von **Picard** (5) mit derselben Anfangsfunktion $u_0(t, x)$ geschaffen sind.

Es ist also

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(t, x) + \int_{\tau}^{t} \int_{\tau}^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, u, u_{xx}, u_{tt}) \, dx_2 \, dx_1 \, dt_2 \, dt_1, \\ \bar{u}(t, x) &= u_0(t, x) + \int_{\tau}^{t} \int_{\tau}^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, \bar{u}, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{tt}) \, dx_2 \, dx_1 \, dt_2 \, dt_1. \end{aligned} \tag{12}$$

Wir werden beweisen, dass diese Lösungen in jedem kompakten Teilrechteck $D_0 \subset D$, in dem die Charakteristiken $t = \tau$, $x = \xi_0$, $x = \xi_1$ liegen, übereinstimmen.

Wegen der Lipschitz-Bedingung ist

$$(13) \quad |f(t, x, u, u_{xx}, u_{tt}) - f(t, x, \bar{u}, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{tt})| \leqq M(u - \bar{u}| + |u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + \\ + |u_{tt} - \bar{u}_{tt}|).$$

Wir führen die Funktion

$$(14) \quad \omega(t, x) = (|u - \bar{u}| + |u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + |u_{tt} - \bar{u}_{tt}|)\, e^{-E}$$

ein, wobei $E = K(|x - \xi| + |t - \tau|)$ ist, ξ dieselbe Bedeutung wie in dem Beweise des Satzes 1. hat, und $K = \left(\frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{1 + 2M} - \sqrt{2M}}\right)^{1/2}$ ist.

Wenn wir dieselbe Bezeichnung wie in dem Satze 1. benützen, wobei der Querstrich den Wert mit der Funktion $\bar{u}(t, x)$ bedeutet, gelten wegen (12) und (13) die Beziehungen

$$\omega(t, x) = e^{-E}\{|F(t, x) - \bar{F}(t, x)| + |F_{xx}(t, x) + \bar{F}_{xx}(t, x)| + \\ + |F_{tt}(t, x) - \bar{F}_{tt}(t, x)|\}$$

$$\leqq Me^{-E}\{\int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} e^E \omega(t_2, x_2)\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 + \\ + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} e^E \omega(t_2, x)\, dt_2\, dt_1 + \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} e^E \omega(t, x_2)\, dx_2\, dx_1\}$$

Wenn wir $\mu = \max\limits_{(t,x) \in D_0} \omega(t, x)$ bezeichnen, ist

$$\omega(t, x) \leqq M\, e^{-E} \mu \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} e^E\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} e^E\, dt_2\, dt_1 + \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} e^E\, dx_2\, dx_1\}$$

$$\leqq M\, e^{-E}\mu \,.\left(\frac{2\, e^E}{K^2} + \frac{e^E}{K^4}\right) = \frac{1}{2}\mu.$$

Weil $\omega(t, x) \leqq \frac{1}{2}\mu$ in ganzem Gebiete D_0 gilt, ist auch $\max\limits_{(t,x) \in D_0} \omega(t, x) = \mu \leqq \frac{1}{2}\mu$. Daraus folgt, dass $\mu = 0$, damit auch $\omega(t,x) = 0$ und in beliebigem kompaktem Teilrechteck D_0 auch $u(t, x) = \bar{u}(t, x)$ gilt.

Nehmen wir nun an, dass die Funktion f auf der rechten Seite der Differentialgleichung (2) nicht von u abhängt. Dann gelten folgende zwei Sätze, wobei wir dieselbe Bezeichnungen wie in den vorangehenden Absätzen benützen.

Satz 3. *Es sei die Differentialgleichung*

$$(15) \quad u_{xxtt} = f(t, x, u_{xx}, u_{tt})$$

gegeben. Die Funktion $f(t, x, v, w)$ sei in dem Gebiete D und für beliebige v, w stetig und erfülle in jedem kompakten Teilgebiete $D_0 \subset D$ in Bezug auf v, w die Lipschitz-Bedingung

$$(16) \quad |f(t, x, v_2, w_2) - f(t, x, v_1, w_1)| \leqq M(|v_2 - v_1| + |w_2 - w_1|).$$

Ferner seien die Voraussetzungen über die Lösung $u_0(t, x)$ der Differentialgleichung (4) des Satzes 1. erfüllt.

Dann existiert mindestens eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (15), die den vorgeschriebenen Nebenbedingungen längs der Charakteristiken $t = \tau$, $x = \xi_0$, $x = \xi_1$ genügt und die der Grenzwert der Folge von Näherungsfunktionen

$$(17) \qquad u_n(t, x) = u_0(t, x) + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} f\left(t_2, x_2, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t_2^2}\right) \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1$$

ist.

Der Beweis dieses Satzes ist durchaus derselbe, wie des Satzes 1., nur anstatt der Beziehungen (10) beweisen wir, dass für die n-te Näherungsfunktion die Beziehungen

$$(18) \qquad \begin{aligned} | u_n(t, x) - u_{n-1}(t, x) | &\leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^n}{(2n)!} (| x - \xi | + | t - \tau |)^{2n} \\ \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} \right| &\leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^n}{(2n)!} (| x - \xi | + | t - \tau |)^{2n} \\ \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2} \right| &\leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^n}{(2n)!} (| x - \xi | + | t - \tau |)^{2n} \end{aligned}$$

gelten.

Weil wir für die Funktion f die Lipschitz-Bedingung nur in Bezug auf v und w voraussetzen, gilt für die Eindeutigkeit der Lösung folgender Satz:

Satz 4. *Mittels der Anfangs- und Randbedingungen längs der Charakteristiken $t = \tau$, $x = \xi_0$, $x = \xi_1$ seien die Werte $u(\tau, x)$, $u_t(\tau, x)$, $u(t, \xi_0)$, $u_x(t, \xi_0)$ in den Intervallen $I_1 = \{\alpha < x < \beta\}$, $I_2 = \{\gamma < t < \delta\}$ eindeutig gegeben und so, dass diese Funktionen der Klasse $C^2(I_1)$ und $C^2(I_2)$ gehören. Dann erfüllt die Funktion $u_0(t, x)$, die das Integral der Differentialgleichung (4) ist, das diesen Anfangs- und Randbedingungen genügt, die Voraussetzungen des Satzes 1.*

Es seien ferner die Voraussetzungen des Satzes 3. über die Funktion $f(t, x, v, w)$ erfüllt. Dann hat die Differentialgleichung (15) genau eine Lösung, die als Grenzwert der Funktionen $u_n(t, x)$ in (17) für $n \to \infty$ gegeben ist und die den vorgeschriebenen Anfangs- und Randbedingungen genügt.

Beweis. Wie in dem Satze 2. nehmen wir an, dass die Differentialgleichung (15) zwei Lösungen

$$(19) \qquad \begin{aligned} u(t, x) &= u_0(t, x) + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, u_{xx}, u_{tt}) \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1 \\ \bar{u}(t, x) &= u_0(t, x) + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{tt}) \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1 \end{aligned}$$

hat, für welche wegen der Voraussetzungen über die Anfangs- und Randbedingungen in dem Gebiete D gilt:

$$(20) \qquad \begin{aligned} u(\tau, x) &= \bar{u}(\tau, x); \qquad & u_t(\tau, x) &= \bar{u}_t(\tau, x) \\ u(t, \xi_0) &= \bar{u}(t, \xi_0); \qquad & u_x(t, \xi_1) &= \bar{u}_x(t, \xi_1) \end{aligned}$$

Wir führen die Funktion

$$(21) \qquad \omega(t, x) = (| u - \bar{u} | + | u_{xx} - \bar{u}_{xx} | + | u_{tt} - \bar{u}_{tt} |) \, \mathrm{e}^{-E}$$

ein, wobei $E = K(|x - \xi| + |t - \tau|)$, ξ dieselbe Bedeutung wie in dem Satze 1. hat und $K = 2\sqrt{M}$ ist.

Aus den Beziehungen (19), (21), und aus der Lipschitz-Bedingung (16) erhalten wir für die Funktion $\omega(t, x)$ die Beziehung

$$\omega(t, x) \leqq M\, e^{-E} \{ \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{\xi_1} (|u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + |u_{tt} - \bar{u}_{tt}|)\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 +$$

$$+ \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} (|u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + |u_{tt} - \bar{u}_{tt}|)\, dt_2\, dt_1 +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} (|u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + |u_{tt} - \bar{u}_{tt}|)\, dx_2\, dx_1$$

Mit Rücksicht auf (20) ist

$$\omega(t, x) \leqq M\, e^{-E} \{ \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \omega(t_2, x)\, e^E\, dt_2\, dt_1 + \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} \omega(t, x_2)\, e^E\, dx_2\, dx_1 \}$$

Wenn wir $\mu = \max\limits_{(t,x) \in D_0} \omega(t, x)$ bezeichnen, erhalten wir, dass in dem ganzen kompakten Teilrechteck D_0 die Beziehung

$$\omega(t, x) \leqq M\mu \frac{2}{K^2} = \frac{1}{2}\mu$$

gilt. Wie in dem Satze 2. folgt daraus, dass $\omega(t, x) = 0$ in beliebigem kompaktem Gebiete D_0 ist und damit auch $u(t, x) = \bar{u}(t, x)$ in dem ganzen Gebiete D gilt.

Satz 5. *Es seien die Funktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ und $\psi_0(t)$, die der Klasse $C^2(I_1)$ und $C^2(I_2)$ gehören, und in dem Intervalle I_2 stetige Funktion $\psi_1(t)$ gegeben. Ferner sei $\alpha < \xi_0 < \xi_1 < \beta$, $\gamma < \tau < \delta$ und so, dass*

$$\varphi_0(\xi_0) = \psi_0(\tau), \qquad \varphi_1(\xi_0) = \psi_0'(\tau)$$

gilt, und die Funktion $A(t, x)$ für $x = \xi_1$ in dem Intervalle I_2 stetig ist.
Dann gibt es in dem Gebiete D genau eine Lösung $u_0(t, x)$ der Differentialgleichung (4), die längs der Charakteristiken $t = \tau$, $x = \xi_0$, $x = \xi_1$ die Anfangsbedingungen

$$u(\tau, x) = \varphi_0(x), \qquad u_t(\tau, x) = \varphi_1(x) \tag{22}$$

und die Randbedingungen

$$u(t, \xi_0) = \psi_0(t) \tag{23}$$

$$u_{xtt}(t, \xi_1) - A(t, \xi_1)\, u_x(t, \xi_1) = \psi_1(t) \tag{24}$$

erfüllt. Diese Lösung erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 1.
Ferner seien die übrigen Voraussetzungen des Satzes 3. über die Funktion

$$f(t, x, u_{xx}, u_{tt}) = A(t, x)\, u_{xx} + B(t, x)\, u_{tt}$$

erfüllt. Dann gibt es in dem Gebiete D genau eine Lösung der Differentialgleichung (1), die die Anfangsbedingungen (22) und die Randbedingungen (23), (24) erfüllt. Diese

Lösung erhalten wir als Grenzwert der Folge der Näherungsfunktionen (17), wo die Funktion $u_0(t, x)$ in der Form

$$\begin{aligned} u_0(t, x) = \varphi_0(x) + \psi_0(t) - \psi_0(\tau) + (t - \tau)\,[\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi_0)] + \\ + (x - \xi_0)\,[g(t) - \varphi_0'(\xi_1)] - (x - \xi_0)\,(t - \tau)\,\varphi_1'(\xi_1) \end{aligned} \tag{25}$$

gegeben ist, wobei die Funktion $g(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$g''(t) - A(t, \xi_1)\,g(t) = \psi_1(t) \tag{26}$$

ist, welche den Anfangsbedingungen

$$g(\tau) = \varphi_0'(\xi_1), \qquad g'(\tau) = \varphi_1'(\xi_1) \tag{27}$$

genügt.

Beweis. Durch direkte Integration der Differentialgleichung (4) erhalten wir, dass die Funktion $u_0(t, x)$, die in der Form (25) gegeben ist, die einzige Lösung dieser Gleichung ist, die die Nebenbedingungen (22), (23), (24) erfüllt. Wegen der Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $A(t, \xi_1)$ ist diese Lösung der Funktionenklasse $C^2(D)$.

Da auch die übrigen Voraussetzungen der Sätze 3. und 4. erfüllt sind, gibt es genau eine Lösung der Differentialgleichung (1), die den Nebenbedingungen (22), (23), (24) genügt und die wir als Grenzwert der Folge der Näherungsfunktionen (17) erhalten, wobei für $u_0(t, x)$ die Funktion (25) gesetzt wird.

LITERATUR

[1] Love A. E. H., *A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge 1952.*

[2] Kamke E., *Differentialgleichungen II, Leipzig 1962.*

[3] Radochová V., *Eigenschaften der Lősung einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung Arch. Math. Brno,* 2, VIII; 99-111 1972,

[4] Radochová V., *Die Lősung der partiellen Differentialgleichung* $u_{xxtt} = A(t, x)\,u_{xx} + B(t, x)\,u_{tt}$ *mit gewissen Nebenbedingungen, Čas. pro pěst. mat.* 1973.

Věra Radochová

Matematický ústav ČSAV
Brno, Janáčkovo nám. 2a
Czechoslovakia