Karel Svoboda

Sur une classe de congruences de droites dans un espace projectif de dimension paire

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 3, 157--165

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104694`

SUR UNE CLASSE DE CONGRUENCES DE DROITES DANS UN ESPACE PROJECTIF DE DIMENSION PAIRE

Par Karel Svoboda, Brno

A M. O. Borůvka à l'occasion de son jubilé scientifique

Présenté le 28 Avril 1969

---

1. Soit L une congruence de droites plongée dans un espace projectif P_{2n} ($n \geqq 2$) à $2n$ dimensions. Supposons que L soit une congruence non-parabolique possédant deux surfaces focales douées, l'une et l'autre, précisément d'un réseau conjugué qui est déterminé, sur chacune de ces surfaces, par les développables contenues dans L. Faisons correspondre, à une droite quelconque de L, un repère ponctuel R formé de $2n + 1$ points analytiques linéairement indépendants A_i ($i = 1, \ldots, 2n + 1$) assujetis à la condition $[A_1 \ldots A_{2n+1}] = 1$ ainsi que le repère hyperplanaire correspondant R^* engendré par $2n + 1$ hyperplans analytiques linéairement indépendants

$$E^i = (-1)^i [A_1 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_{2n+1}] \; (i = 1, \ldots, 2n + 1).$$

On a alors les équations fondamentales

$$(1) \qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^j A_j, \; \mathrm{d}E^i = -\omega_j^i E^j \; (i, j = 1, \ldots, 2n + 1)$$

et les formules de structure

$$(2) \qquad \mathrm{d}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \; (i, j, k = 1, \ldots, 2n + 1).$$

Rappelons que l'espace osculateur $S^{(h)}$ d'ordre h le long d'une droite p de L est défini comme l'union linéaire des espaces osculateurs d'ordre h des surfaces focales de L aux points situés sur p et qu'il est, en général, à $2h + 1$ dimensions. Les considérations suivantes seront consacrées aux congruences L pour lesquelles $\mathbf{dim}\, S^{(h)} = 2h + 1$ ($h = 1, \ldots, n - 1$) et $\mathbf{dim}\, S^{(n)} \leqq 2n$. On dit dans ce cas, d'après [1], que L est une *congruence d'indice* $n - 1$.

Cela étant, on peut choisir le repère ponctuel R associé à une droite p de L de manière que A_1, A_2 coïncident avec les foyers situés sur p et $[A_1 \ldots A_{2h} A_{2h+1}]$ resp. $[A_1 \ldots A_{2h} A_{2h+2}]$ soit l'espace osculateur d'ordre h ($h = 1, \ldots, n - 1$) de la surface focale (A_1) resp. (A_2) au point A_1 resp. A_2. En vertu du choix considéré du repère R, on a évidemment $S^{(h)} = [A_1 \ldots A_{2h+2}]$ ($h = 1, \ldots, n - 1$) tandis que $S^{(n)} = [A_1 \ldots A_{2n+1}]$.

Les suppositions faites au sujet du choix du repère ponctuel R se traduisent (v. [1]) par les équations qui prennent, après une particularisation convenable des paramètres secondaires, la forme suivante

$$
\begin{array}{llll}
(3) & \omega_1^2 = \alpha_1\omega_2, & \omega_2^1 = \alpha_2\omega_1, & \\
 & \omega_{2i-1}^{2i+2} = 0, & \omega_{2i}^{2i+1} = 0 & (i = 1, \ldots, n-1), \\
 & \omega_{2i-1}^{j} = 0, & \omega_{2i}^{j} = 0 & (i = 1, \ldots, n-1; \\
 & & & j = 2i+3, \ldots, 2n+1), \\
 & \omega_{2i-1}^{2i+1} = \omega_1, & \omega_{2i}^{2i+2} = \omega_2 & (i = 2, \ldots, n-1), \\
 & \omega_{2i-1}^{2i} = 0, & \omega_{2i}^{2i-1} = 0 & (i = 2, \ldots, n-1), \\
(4) & \omega_{2n-1}^{2n} = \beta_2\omega_1, & \omega_{2n}^{2n-1} = \beta_1\omega_2, & \\
 & \omega_{2n-1}^{2n+1} = a\omega_1, & \omega_{2n}^{2n+1} = b\omega_2, &
\end{array}
$$

où

$$\omega_1 = \omega_1^3,\ \omega_2 = \omega_2^4 \tag{5}$$

sont les formes principales linéairement indépendantes et le groupe d'équations écrites dans les deux dernières lignes de (3) est à supprimer si $n = 2$.

Simultanément avec la congruence L considérons sa *dualisation* L^* engendrée par les espaces osculateurs $S^{(n-1)}$ d'ordre $n-1$ de L. En regardant les hyperplans de P_{2n} comme points de l'espace P_{2n}^* corrélatif à P_{2n}, la dualisation L^* de la congruence L apparaît comme lieu de points analytiques E^{2n+1} de P_{2n}^*. D'après ce qui précède, on a en particulier

$$\mathrm{d}E^{2n+1} = -\omega_{2n+1}^{2n+1}E^{2n+1} - b\omega_2 E^{2n} - a\omega_1 E^{2n-1}$$

et on en voit que L^* est en général une surface plongée dans P_{2n}^*. Pour que L^* soit une courbe dans l'espace P_{2n}^* il faut et il suffit que précisément une des fonctions a, b s'annulle identiquement.

Dans ce qui suit, *nous allons nous occuper des congruences de droites dans P_{2n} dont la dualisation est une courbe*. Nous allons nous borner à indiquer les propriétés géométriques des congruences en question dans le cas $a \neq 0$, $b = 0$.

Cela étant, on obtient, d'après (4), l'équation $\omega_{2n}^{2n-1} = 0$ qui entraîne, en vertu de (2), $\beta_1 = 0$ de sorte que les équations (4) prennent la forme

$$
\begin{array}{ll}
(6) & \omega_{2n-1}^{2n} = \beta_2\omega_1,\ \omega_{2n}^{2n-1} = 0, \\
 & \omega_{2n-1}^{2n+1} = a\omega_1,\ \omega_{2n}^{2n+1} = 0 \quad (a \neq 0).
\end{array}
$$

Les congruences en question se trouvent définies par le système d'équations différentielles (3), (6) dont les conditions d'intégrabilité sont

$$
\begin{array}{ll}
(7) & \omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4)\} = 0, \\
 & \omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3)\} + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0, \\
 & \omega_1 \wedge (\omega_{2i+1}^{2i+1} - \omega_{2i-1}^{2i-1} - \omega_3^3 + \omega_1^1) = 0,
\end{array}
$$

$$\omega_2 \wedge (\omega_{2i+2}^{2i+2} - \omega_{2i}^{2i} - \omega_4^4 + \omega_2^2) = 0 \quad (i = 2, \ldots, n-1),$$
$$\omega_1 \wedge \omega_{2i+1}^{2i} + \omega_2 \wedge \omega_{2i-1}^{2i-2} = 0,$$
$$\omega_1 \wedge \omega_{2i}^{2i-3} - \omega_2 \wedge \omega_{2i+2}^{2i-1} = 0 \quad (i = 2, \ldots, n-1),$$
$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2(\omega_{2n}^{2n} - \omega_{2n-1}^{2n-1} - \omega_3^3 + \omega_1^1) + a\omega_{2n+1}^{2n}\} - \omega_2 \wedge \omega_{2n-1}^{2n-2} = 0,$$
$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}a + a(\omega_{2n+1}^{2n+1} - \omega_{2n-1}^{2n-1} - \omega_3^3 + \omega_1^1)\} = 0,$$
$$\omega_1 \wedge \omega_{2n}^{2n-3} = 0,$$

les équations écrites dans la troisième jusqu'à sixième ligne étant à supprimer dans le cas de $n = 2$. On en déduit sans aucune espèce de difficulté que

les congruences L d'indice $n-1$ dans P_{2n} dont la dualisation L^* est une courbe existent et dépendent d'une fonction arbitraire de deux variables.

Sans restreindre la généralité des considérations suivantes nous posons $a = 1$.

2. Nous nous proposons de décrire la structure géométrique des congruences de droites en question. Pour cela, nous allons démontrer la propriété suivante de la dualisation L^*.

Proposition 1. *Soit L une congruence de droites d'indice $n-1$ dans P_{2n}. La dualisation L^* de L étant une courbe, elle n'appartient pas à un sous-espace P_k^* $(k = 1, \ldots, n)$ à k dimensions de l'espace P_{2n}^* corrélatif à P_{2n}.*

Démonstration. Considérons le système d'équations différentielles auquel conduisent les équations (3), (5), (6). On a, d'après la deuxième équation (1),

$$\begin{aligned}
(8)\quad \mathrm{d}E^{2n+1} &= -\omega_{2n+1}^{2n+1}E^{2n+1} - \omega_1 E^{2n-1},\\
\mathrm{d}E^{2n} &= -\omega_{2n+1}^{2n}E^{2n+1} - \omega_{2n}^{2n}E^{2n} - \beta_2\omega_1 E^{2n-1} - \omega_2 E^{2n-2},\\
\mathrm{d}E^{2n-1} &= -\omega_{2n+1}^{2n-1}E^{2n+1} - \omega_{2n-1}^{2n-1}E^{2n-1} - \omega_1 E^{2n-3},\\
&\ldots\\
\mathrm{d}E^{2i} &= -\omega_{2n+1}^{2i}E^{2n+1} - \ldots - \omega_{2i+1}^{2i}E^{2i+1} - \omega_{2i}^{2i}E^{2i} - \omega_2 E^{2i-2},\\
\mathrm{d}E^{2i-1} &= -\omega_{2n+1}^{2i-1}E^{2n+1} - \ldots - \omega_{2i+1}^{2i-1}E^{2i+1} - \omega_{2i-1}^{2i-1}E^{2i-1} - \omega_1 E^{2i-3},\\
&\ldots\\
\mathrm{d}E^2 &= -\omega_{2n+1}^{2}E^{2n+1} - \ldots - \omega_3^2 E^3 - \omega_2^2 E^2 - \alpha_1\omega_2 E^1,\\
\mathrm{d}E^1 &= -\omega_{2n+1}^{1}E^{2n+1} - \ldots - \omega_3^1 E^3 - \alpha_2\omega_1 E^2 - \omega_1^1 E^1\\
&(i = n-1, \ldots, 2),
\end{aligned}$$

le groupe d'équations exprimant $\mathrm{d}E^{2i}$ et $\mathrm{d}E^{2i-1}$ $(i = n-1, \ldots, 2)$ étant à supprimer si $n = 2$. Le système (8) définie, dans P_{2n}^*, la courbe envisagée L^* comme lieu du point E^{2n+1} et en même temps l'ensemble de repères R^* associés à L^*.

Désignons par σ_k l'espace osculateur d'ordre k de la courbe L^* au point E^{2n+1}. On voit immédiatement de (8) que $\sigma_1 = [E^{2n+1}E^{2n-1}]$ et

$$\mathbf{d}^2E^{2n+1} = (-\omega_1)^2E^{2n-3} \quad (\mathbf{mod}\ E^{2n+1},\ E^{2n-1}).$$

Il en résulte que la courbe L^* ne se réduit pas à une droite et que $\sigma_2 = [E^{2n+1}E^{2n-1}E^{2n-3}]$. Or, on a, en vertu de la deuxième équation (7),

$$\omega_{2n}^{2n-3} = a_{2n}^{2n-3}\omega_1 \tag{9}$$

et on en obtient facilement, d'après (8),

$$\mathbf{d}^3E^{2n+1} = (-\omega_1)^3(a_{2n}^{2n-3}E^{2n} + E^{2n-5}) \quad (\mathbf{mod}\ E^{2n+1}, E^{2n-1}, E^{2n-3})$$

à condition d'y poser $E^{2n-5} = \alpha_2E^2$ ($\alpha_2 \neq 0$) dans le cas de $n = 2$. Cela montre que, quelque soit la valeur de n, L^* n'est pas une courbe plane. Dans le cas de $n = 2$, la proposition précédente se trouve complètement démontrée.

Pour faire suite à la démonstration de la proposition énoncée dans le cas de $n \geqq 3$, nous allons montrer, de proche en proche, que, en chaque position du point E^{2n+1} sur la courbe L^*, il est possible de choisir le repère R^* associé à L^* de manière que $\sigma_k = [E^{2n+1}E^{2n-1} \dots E^{2n-2k+1}]$ ($k = 3, \dots, n$) et que cette particularisation du repère R^* peut être exprimée par les équations

$$\omega_{2i}^{2j-1} = 0 \ (j = n - k + 2;\ k = 3, \dots, n;\ i = j + 1, \dots, n). \tag{10}$$

Pour le voir, procédons par la voie d'induction complète.

Supposons d'abord que $k = 3$. D'après ce qui précède, l'espace osculateur σ_3 se trouve déterminé par les points linéairement indépendants E^{2n+1}, E^{2n-1}, E^{2n-3}, $a_{2n}^{2n-3}E^{2n} + E^{2n-5}$. Or, on peut, évidemment, choisir le repère R^* de la manière supposée ce qui exige de poser $a_{2n}^{2n-3} = 0$. On en déduit, d'après (9), l'équation qui résulte de (10) pour $k = 3$. De plus, en appliquant les formules de structure à l'équation (10) en question et en envisageant l'équation (7$_6$) pour $i = n - 2$, on obtient deux relations extérieures qui entraînent

$$\omega_{2n}^{2n-5} = a_{2n}^{2n-5}\omega_1,\ \omega_{2n-2}^{2n-5} = a_{2n-2}^{2n-5}\omega_1.$$

Cela étant, on a, d'après (8),

$$\mathbf{d}^4E^{2n+1} = (-\omega_1)^4(a_{2n}^{2n-5}E^{2n} + a_{2n-2}^{2n-5}E^{2n-2} + E^{2n-7}) \ (\mathbf{mod}\ E^{2n+1}, \dots, E^{2n-5})$$

à condition d'y remplacer E^{2n-7} par α_2E^2 ($\alpha_2 \neq 0$) dans le cas de $n = 3$. On en voit immédiatement que L^* ne peut pas être plongée dans un sous-espace P_3^* de P_{2n}^*.

Supposons maintenant que la particulatisation du repere R^*, relative aux espaces osculateurs σ_k d'ordre $k \leqq n - 1$ $(n \geqq 4)$ de L^* soit admissible et qu'elle puisse être exprimée, de manière analytique, par le système (10) dans lequel $k = 3, \ldots, n - 1$. En tenant compte des suppositions indiquées on a, en particulier, $\sigma_{n-1} = [E^{2n+1}E^{2n-1} \ldots E^3]$ et on vérifie sans aucune espèce de difficulté que σ_{n-1} ne reste pas fixe en position si E^{2n+1} se déplace sur L^*. Donc, L^* n'appartient pas à un sous-espace P^*_{n-1} à $n - 1$ dimensions de P^*_{2n}.

Cela étant, appliquons les formules de structure (2) aux équations qui s'obtiennent de (10) de la manière indiquée. On vérifie par un calcul facile que les équations comprises, pour $k = 3, \ldots, n - 2$, dans (10) sont complètement intégrables tandis que, en différentiant les équations qui résultent de (10) pour $k = n - 1$ et en envisageant les équations (76), on obtient les relations extérieures qui entraînent

$$\omega^{3'}_{2i} = a^3_{2i}\omega_1 \ (i = 3, \ldots, n). \tag{11}$$

Or, un calcul basé sur (8), (10), (11) montre que

$$\mathbf{d}^n E^{2n+1} = (-\omega_1)^n (a^3_{2n}E^{2n} + a^3_{2n-2}E^{2n-2} + \ldots + a^3_6 E^6 + E^1) \\ (\mathbf{mod}\ E^{2n+1}, \ldots, E^3).$$

Les points $E^{2n+1}, E^{2n-1}, \ldots, E^3, a^3_{2n}E^{2n} + a^3_{2n-2}E^{2n-2} + \ldots + a^3_6E^6 + E^1$ étant linéairement indépendants, ils déterminent l'espace σ_n à n dimensions et on peut, évidemment, particulariser le repere R^* de manière à avoir $a^3_{2i} = 0$ $(i = 3, \ldots, n)$. On en obtient, d'après (11), les équations comprises, pour $k = n$, dans le système (10). Elles entraînent, en vertu des formules de structure (2) et d'après (76) et (10), les relations extérieures qui donnent

$$\omega^1_{2i} = a^1_{2i}\omega_1 \quad (i = 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Par suite, on a, d'après (8), (10,) (12),

$$\mathbf{d}^{n+1} E^{2n+1} = (-\omega_1)^{n+1} (a^1_{2n}E^{2n} + a^1_{2n-2}E^{2n-2} + \ldots + a^1_4 E^4 + \alpha_2 E^2) \\ (\mathbf{mod}\ E^{2n+1}, \ldots, E^1)$$

et on en voit, en tenant compte de la supposition $\alpha_2 \neq 0$, que L^* n'est pas plongée dans un sous-espace P^*_n à n dimensions de P^*_{2n}. La proposition précédente se trouve ainsi démontrée.

Cela étant, nous pouvons distinguer les types différents des congruences L en question conformément la dimension du sous-espace de P^*_{2n} dans lequel se trouve plongée la dualisation L^* de L. A ce point de vue, nous allons démontrer le résultat suivant:

Proposition 2. *Soit L une congruence de droites d'indice $n - 1$ dans P_{2n} dont la dualisation L^* est une courbe appartenant à un sous-espace*

P^*_{n+h} ($h = 1, \ldots, n$) à $n + h$ dimensions de l'espace P^*_{2n} corrélatif à P_{2n}. La suite de transformations laplaciennes du réseau focal, situé sur une des deux surfaces focales de L, se termine, dans le sens des arêtes de rebroussement des surfaces développables correspondantes de L, à savoir

1° pour $h = 1, \ldots, n - 2$ ($n \geqq 3$), après $h + 1$ transformations de la manière de Laplace sur une courbe plongée dans un sous-espace P_{n-h-1} à $n - h - 1$ dimensions de P_{2n};

2° pour $h = n - 1$ ($n \geqq 2$), après n transformations de la manière mixte;

3° pour $h = n$ ($n \geqq 2$), après n transformations de la manière de Goursat.

Démonstration. Choisissons un nombre entier h tel que $1 \leqq h \leqq n$ et supposons que L^* soit plongée dans un sous-espace P^*_{n+h} de P^*_{2n} de sorte que, en particulier, $\dim \sigma_{n+k} = n + k$ ($k = 1, \ldots, h$). Admettons qu'on puisse particulariser le repère R^* de manière à prendre $\sigma_{n+k} = [E^{2n+1} \ldots E^1 E^2 \ldots E^{2k}]$. Nous allons montrer que le choix indiqué du repère est possible et qu' il est exprimé par les équations différentielles

$$\omega^1_{2i} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n), \tag{13}$$

$$\omega^{2k-2}_{2k} = a^{2k-2}_{2k}\omega_1 \qquad (k = 2, \ldots, h;\ h \neq 1), \tag{14}$$

$$\omega^{2k-2}_{2i} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, h;\ i = k + 1, \ldots, n;\ h \neq 1, n), \tag{15}$$

à condition que $a^{2k-2}_{2k} \neq 0$.

En prenant pour point de départ la relation exprimant $d^{n+1}E^{2n+1}$ on voit immédiatement qu' on peut choisir le repère R^* de manière à prendre le point E^2 dans l'espace σ_{n+1}. On en obtient $a^1_{2i} = 0$ ($i = 2, \ldots, n$) de sorte que, d'après (12), la particularisation considérée du repère est exprimée, pour $k = 1$, par les équations (13). En particulier, la particularisation envisagée est terminée si $h = 1$.

Nous allons nous adresser au cas de $h \geqq 2$. En appliquant les formules de structure (2) au système (13), on obtient les équations

$$\omega^2_{2i} = a^2_{2i}\omega_1 \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{16}$$

et on a ensuite, d'après (8), (10), (13), (16),

$$d^{n+2}E^{2n+1} = (-\omega_1)^{n+2}(a^2_{2n}E^{2n} + a^2_{2n-2}E^{2n-2} + \ldots + a^2_4 E^4) \pmod{E^{2n+1}, \ldots, E^1, E^2}.$$

Or, les fonctions a^2_{2i} ne peuvent pas être nuls à la fois car, autrement, la courbe L^* serait plongée dans un P^*_{n+1}, contrairement la supposition. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que $a^2_4 \neq 0$ ce qui nous permet de choisir le point E^4 dans σ_{n+2}. Cela étant, on a $a^2_{2i} = 0$ ($i = 3, \ldots, n$) et les équations (16) entraînent le groupe d'équations (14),

(15) dans lequel $k = 2$. Il faut remarquer que le système d'équations (15) n'entre pas en ligne de compte si $n = 2$.

Supposons maintenant qu' il soit possible de particulariser le repère R^*, en ce qui concerne les espaces osculateurs σ_{n+k} d'ordre $n + k$ $(k \leqq h - 1)$ de la courbe L^*, de manière que l'on ait le système d'équations (13), (14), (15) dans lequel $k = 1, \ldots, h - 1$. Cela étant, il est facile à voir que le système d'équations (13) et (15) peut être prolongé par les équations

$$(17) \qquad \omega_{2i}^{2h-2} = a_{2i}^{2h-2}\omega_1 \qquad (i = h, \ldots, n).$$

On a ensuite, d'après (8), (10), (13), (14), (15), (17),

$$\mathbf{d}^{n+h}E^{2n+1} = (-\omega_1)^{n+h}(a_{2n}^{2h-2}E^{2n} + a_{2n-2}^{2h-2}E^{2n-2} + \ldots + a_{2h}^{2h-2}E^{2h})$$
$$(\mathbf{mod}\ E^{2n+1}, \ldots, E^1, E^2, \ldots, E^{2h-2})$$

où les fonctions a_{2i}^{2h-2} ne sont pas nuls à la fois car L^* n'est pas plongée dans un P^*_{n+h-1}. Si $h = n$, on a nácessairement $a_{2n}^{2n-2} \neq 0$. Dans le cas de $h < n$, nous pouvons supposer que $a_{2h}^{2h-2} \neq 0$ et choisir le repère R^* de manière à prendre le point E^{2h} dans σ_{n+h}. Ce choix entraîne $a_{2i}^{2h-2} = 0$ $(i = h + 1, \ldots, n)$ et on en obtient, d'après (17), les équations qui entrent dans (14) et (15) pour $k = h$. D'après ce qui précède, il faut supprimer le groupe d'équations (15) obtenues de cette manière si $h = n$.

Nous avons démontré dans les considérations précédentes que, par un choix convenable du repère R^* associé à L^*, on peut s'arranger que l'on ait les équations (13), (14), (15). Les conditions d'intégrabilité du système en question sont

$$\omega_1 \wedge \{\mathbf{d}a_{2k}^{2k-2} + a_{2k}^{2k-2}(\omega_{2k-2}^{2k-2} - \omega_{2k}^{2k} - \omega_2^2 + \omega_1^1)\} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, h)$$

et, dans le cas de $h < n$,

$$\omega_1 \wedge \omega_{2i}^{2h} = 0 \qquad (i = h + 1, \ldots, n;\ h \neq n).$$

Si $h = n$, le système précédent n'entraîne aucune condition nouvelle. D'autre part, si $h < n$, on a

$$(18) \qquad \omega_{2i}^{2h} = a_{2i}^{2h}\omega_1 \qquad (i = h + 1, \ldots, n;\ h \neq n)$$

de sorte que, d'après (8), (10), (13), (14), (15), (18),

$$\mathbf{d}^{n+h+1}E^{2n+1} = (-\omega_1)^{n+h+1}(a_{2n}^{2h}E^{2n} + a_{2n-2}^{2h}E^{2n-2} + \ldots + a_{2h+2}^{2h}E^{2h+2})$$
$$(\mathbf{mod}\ E^{2n+1}, \ldots, E^1, E^2, \ldots, E^{2h}).$$

Alors, pour que L^* soit une courbe plongée dans un sous-espace P^*_{n+h} $(h < n)$ de P^*_{2n}, il faut et il suffit que $a_{2i}^{2h} = 0$ $(i = h + 1, \ldots, n)$ ou bien, d'après (18),

$$\omega_{2i}^{2h} = 0 \qquad (i = h + 1, \ldots, n;\ h \neq n). \tag{19}$$

Remarquons que les équations (19) ne donnent aucune relation nouvelle.

Cela étant, considérons le système d'équations différentielles auquel conduisent les équations (3), (5), (6), (10), (13), (14), (15), (19). Nous avons à distinguer trois cas différents comme suit.

1° Soit $h \leqq n - 2$ ($n \geqq 3$). D'après la première équation (1), on a, en particulier,

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}A_1 &= \omega_1^1 A_1 + \alpha_1 \omega_2 A_2 + \omega_1 A_3,\\
\mathbf{d}A_2 &= \alpha_2 \omega_1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2 A_4,\\
&\ldots\\
\mathbf{d}A_{2i} &= a_{2i}^{2i-2}\omega_1 A_{2i-2} + \omega_{2i}^{2i} A_{2i} + \omega_2 A_{2i+2},\\
&\ldots\\
\mathbf{d}A_{2h+2} &= \omega_{2h+2}^{2h+2} A_{2h+2} + \omega_2 A_{2h+4},\\
&\ldots\\
\mathbf{d}A_{2j} &= \omega_{2j}^{2h+2} A_{2h+2} + \ldots + \omega_{2j}^{2j-2} A_{2j-2} + \omega_{2j}^{2j} A_{2j} + \omega_2 A_{2j+2},\\
&\ldots\\
\mathbf{d}A_{2n} &= \omega_{2n}^{2h+2} A_{2h+2} + \ldots + \omega_{2n}^{2n-2} A_{2n-2} + \omega_{2n}^{2n} A_{2n}\\
&\qquad (i = 2, \ldots, h;\ j = h + 2, \ldots, n - 1),
\end{aligned} \tag{20}$$

le groupe d'équations exprimant $\mathbf{d}A_{2i}$ ($i = 2, \ldots, h$) resp. $\mathbf{d}A_{2j}$ ($j = h + 2, \ldots, n - 1$) étant à supprimer si $h = 1$ resp. $h = n - 2$.

Considérons la couche $\omega_1 = 0$ de surfaces développables de L dont les arêtes de rebroussement se trouvent situées sur la surface focale (A_1) de L. Un premier coup d'oeil montre que chacune des surfaces (A_{2i}) ($i = 1, \ldots, h$) est douée d'un réseau conjugué, formé par les deux familles de courbes $\omega_1\omega_2 = 0$, le réseau situé sur (A_{2i}) étant la $i^{\text{ième}}$ transformée laplacienne du réseau focal sur (A_1) dans le sens des courbes $\omega_1 = 0$. Or, les développables circonscrites à la surface (A_{2h}) le long des courbes de la famille $\omega_2 = 0$ étant des surfaces coniques dont les sommets décrivent la courbe (A_{2h+2}), la suite des transformations laplaciennes du réseau focal sur (A_1), dans le sens des courbes $\omega_1 = 0$, est terminée, après $h + 1$ transformations, de la manière de Laplace sur la courbe mentionnée (A_{2h+2}). Il est aisé de voir, en vertu de (20), que la courbe en question appartient à l'espace $[A_{2h+2} \ldots A_{2n}]$ à $n - h - 1$ dimensions.

2° Soit $h = n - 1$ ($n \geqq 2$). On a maintenant, d'après la première équation (1),

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}A_1 &= \omega_1^1 A_1 + \alpha_1 \omega_2 A_2 + \omega_1 A_3,\\
\mathbf{d}A_2 &= \alpha_2 \omega_1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2 A_4,\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\mathbf{d}A_{2i} = a_{2i}^{2i-2}\omega_1 A_{2i-2} + \omega_{2i}^{2i} A_{2i} + \omega_2 A_{2i+2},$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{d}A_{2n} = a_{2n}^{2n-2}\omega_1 A_{2n-2} + \omega_{2n}^{2n} A_{2n}$$
$$(i = 2, \ldots, n - 1),$$

où $a_{2n}^{2n-2} = 0$. Si $n = 2$, il faut supprimer dans (21) les équations exprimant $\mathbf{d}A_{2i}$ $(i = 2, \ldots, n - 1)$.

Les considérations analogues à celles qui précèdent montrent que le réseau conjugué, situé sur la surface (A_{2i}) $(i = 1, \ldots, n - 1)$ et formé par les deux familles de courbes $\omega_1\omega_2 = 0$, est la $i^{\text{ième}}$ transformée laplacienne du réseau focal sur (A_1) dans le sens des courbes $\omega_1 = 0$. Or, on voit facilement que les courbes $\omega_1 = 0$ sur la surface (A_{2n-2}) sont des droites qui passent par le point fixe A_{2n} de sorte que la surface en question est un cône. Donc, la suite de Laplace du réseau focal sur (A_1), dans le sens des courbes $\omega_1 = 0$, est terminée, après n transformations, de la manière mixte.

3° Soit $h = n$ $(n \geqq 2)$. Dans le cas en question, on a, en particulier, les équations (21) avec $a_{2n}^{2n-2} \neq 0$.

Pour obtenir le résultat relatif au cas de $h = n$, il suffit de constater que (A_{2n-2}) est une surface développable qui a pour l'arête de rebroussement la courbe (A_{2n}). On en voit ainsi que la suite de Laplace du réseau conjugué sur (A_1), dans le sens des courbes $\omega_1 = 0$, est terminée, après n transformations, de la manière de Goursat.

LITÉRATURE

[1] Švec, A.: *Congruences de droites dans les espaces projectifs á dimension paire.* Czech. Math. Journal 8 (83), 1958, 274—284.

Institut de mathématiques
Université J. E. Purkyně, Brno
Tchécoslovaquie