Hans-Jürgen Hoehnke

Zur Einbettung von Ω-Pseudoscharen in Halbgruppen

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 3, 131--141

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104691`

ZUR EINBETTUNG VON Ω-PSEUDOSCHAREN IN HALBGRUPPEN

Von Hans-Jürgen Hoehnke in Berlin

Herrn Professor Otakar Borůvka zum 70. Geburtstag am 10. 5. 1969 gewidmet

Eingegangen am 18. Februar 1969

0. In [3] wurde der Begriff einer n-Pseudoschar eingeführt. Darunter verstehen wir ein n-Tupel $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ von Mengen I_j, $j = 1, \dots, n$, $I_n = I_1 = I$, zusammen mit einer in der Form $(x_1, x_2, \dots, x_n) \to x_1 x_2 \dots x_n$ geschriebenen Abbildung $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \to I$, so daß für alle x_k, $y_k \in I_k$ gilt

$$[[x_1 \dots x_n]\, y_2 \dots y_n] = [x_1 \dots x_{n-1}[x_n y_2 \dots y_n]].$$

Offenbar läßt sich jede n-Pseudoschar ($n \geqq 3$) als 3-Pseudoschar (I, H, I) mit $H = I_2 \times \dots \times I_{n-1}$ und $[x_1(x_2, \dots, x_{n-1})\, x_n] = [x_1 x_2 \dots x_n]$ auffassen. Im Fall $I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$ stimmen die n-Pseudoscharen mit den in [2] betrachteten universalen Algebren $Q(\ )(Q = I)$ überein. Dort wurde gezeigt (Theorem 1), daß sich jede solche universale Algebra in eine Halbgruppe einbetten läßt; auch der Fall mehrerer Operationen wurde behandelt (Theorem 2). In der vorliegenden Note wird auf anderem Wege ein allgemeiner Satz über die Einbettung von Ω-Pseudoscharen (Ω eine Familie von Operationen $\omega : I_{\omega 1} \times I_{\omega 2} \times \dots \times I_{\omega n_\omega} \to$ $\to I$) in Halbgruppen abgeleitet, der das Theorem 2 (erster Teil) aus [2] als Spezialfall enthält. Ein anderer Zusammenhang zwischen n-Pseudoscharen und Halbgruppen wurde bereits in [3] aufgedeckt.

Außerdem wird ein Satz über die Einbettung von Halbgruppen mit gewissen vertauschbaren unären Operationen in Halbgruppen angegeben. (Dabei ist die eingebettete Halbgruppe Teilhalbgruppe der einbettenden Halbgruppe). Solche Halbgruppen sind ebenfalls in [3] betrachtet worden.

1. Unter einer Ω-Struktur $((I_\omega)_{\omega \in \Omega}, \Omega)$ verstehen wir eine Familie $(I_\omega)_{\omega \in \Omega}$ von endlichen Folgen $I_\omega = (I_{\omega 1}, I_{\omega 2}, \dots, I_{\omega n_\omega})$ $(n_\omega \geqq 0)$ von Mengen $I_{\omega k}$, wobei zu jedem $\omega \in \Omega$ eine kürzehalber gleichfalls mit ω bezeichnete n_ω-stellige Abbildung

$$\omega : I_{\omega 1} \times I_{\omega 2} \times \dots \times I_{\omega n_\omega} \to I_{\omega 1}$$

gehört. Dabei sei vorausgesetzt, daß $I_{\omega n_\omega} = I_{\omega 1} = I$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $n_\omega \geqq 1$. Für $n_\omega = 0$ ist I_ω die leere Folge und die Abbildung ω eine konstante Operation, die durch ein Element ω^e aus I vertreten wird. Wenn $I_{\omega 1} = I_{\omega 2} = \ldots = I_{\omega n_\omega}$, so definiert eine solche Ω-Struktur offenbar eine Algebra (I, Ω) vom Typ Ω über der Menge I im gewöhnlichen Sinne. Eine Ω-Struktur heiße (in Verallgemeinerung des in [3] betrachteten Begriffs einer Pseudoschar) Ω-Pseudoschar, wenn für alle π, $\omega \in \Omega$ und alle $x_i \in I_{\pi i}$, $y_j \in I_{\omega j}$:

$$(1.1)\quad ((x_1 \ldots x_{n\omega})\, \pi\, y_2 \ldots y_{n_\omega})\, \omega = (x_1 \ldots x_{n_\pi - 1}(x_{n_\pi} y_2 \ldots y_{n\omega})\, \omega)\, \pi, \text{ falls } n_\pi > 1.$$

1.1. Satz. Für eine Ω-Struktur $((I_\omega)_{\omega \in \Omega}, \Omega)$ sind folgende Aussagen einander gleichwertig:

a) Es existieren eine Halbgruppe S und Elemente $s_\omega \in S$, $\omega \in \Omega$, so daß $A := \bigcup_{\omega \in \Omega} I_{\omega 1} \cup \ldots \cup I_{\omega n_\omega} \subseteqq S$ und

(1.2) $\forall x_i \in I_{\omega i}$:

$$(x_1 \ldots x_{n_\omega})\, \omega = x_1 \ldots x_{n_\omega - 1}\, s_\omega x_{n_\omega}, \text{ falls } n_\omega > 1,$$
$$(x_1)\, \omega = x_1 s_\omega, \text{ falls } n_\omega = 1,$$
$$s_\pi = \pi^e = x_1 \ldots x_{n_\omega - 1}\, s_\omega s_\pi, \text{ falls } n_\pi = 0 \text{ und } n_\omega > 1.$$

b) $((I_\omega)_{\omega \in \Omega}, \Omega)$ ist eine Ω-Pseudoschar.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) ist klar.

b) $\Rightarrow$ a) Wir dürfen voraussetzen, daß $A \cap \Omega = \emptyset$. Sei B die Gesamtheit aller formalen Ausdrücke Y der Gestalt $Y = (y_1, \ldots, y_{n_\omega - 1}, *)\, \omega$ mit $y_i \in I_{\omega i}$ $(n_\omega > 1)$ bzw. $Y = (y, *)\, \omega$ mit $y \in I$ $(n_\omega = 1)$ bzw. $Y = (*)\, \omega (n_\omega = 0)$. Sei Σ die Gesamtheit aller endlichen Folgen $(x_1, \ldots, x_n)$ mit Elementen $x_i \in A \cup \Omega \cup B$ (einschließlich der leeren Folge). Mit $T(\Sigma)$ werde die Halbgruppe aller Transformationen der Menge Σ bezeichnet. Jedem $z \in A$ bzw. $\omega \in \Omega$ sei wie folgt eine Transformation ϱ_z bzw. σ_ω aus $T(\Sigma)$ zugeordnet ($(x_1, \ldots, x_r) \in \Sigma$):

1. $(x_1, \ldots, x_r)\, \varrho_z = (x_1, \ldots, x_{r-1}, (y_1 \cdots y_{n_\omega - 1} z)\, \omega)$,
   falls $z \in I$ und $x_r = (y_1, \ldots, y_{n_\omega - 1}, *)\, \omega$ mit $n_\omega > 1$;
2. $(x_1, \ldots, x_r)\, \varrho_z = (x_1, \ldots, x_r)$, falls $x_r = (y, *)\, \omega$ mit $n_\omega = 1$
   oder $x_r = (*)\, \omega$ mit $n_\omega = 0$;
3. $(x_1, \ldots, x_r)\, \varrho_z = (x_1, \ldots, x_r, z)$, soweit nicht schon definiert;
4. $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n_\omega - 1})\, \sigma_\omega = (x_1, \ldots, x_r, (y_1, \ldots, y_{n_\omega - 1}, *)\, \omega)$
   falls $y_i \in I_{\omega i}$, $n_\omega > 1$;
5. $(x_1, \ldots, x_r, y)\, \sigma_\omega = (x_1, \ldots, x_r, (y)\, \omega)$, falls $y \in I$, $n_\omega = 1$;

6. $(x_1, \ldots, x_r)\,\sigma_\omega = (x_1, \ldots, x_{r-1}, w^e)$,
falls $x_r = (y_1, \ldots, y_{n_\pi-1}, *)\,\pi,\ n_\pi > 1,\ n_\omega = 0$;

7. $(x_1, \ldots, x_r)\,\sigma_\omega = (x_1, \ldots, x_r)$, falls $x_r = (y, *)\,\pi$ mit $n_\pi = 1$
oder $x_r = (*)\,\pi$ mit $n_\pi = 0$;

8. $(x_1, \ldots, x_r)\,\sigma_\omega = (x_1, \ldots, x_r, \omega)$, soweit im Falle $n_\omega > 0$ noch nicht definiert;

9. $(x_1, \ldots, x_r)\,\sigma_\omega = (x_1, \ldots, x_r, \omega^e)$, soweit im Falle $n_\omega = 0$ noch nicht definiert.

Wir werden jetzt nachweisen, daß für $y_i \in I_{\omega i},\ y \in I$,

$$\tag{1.3} \begin{cases} \varrho_{(y_1 \ldots y_{n_\omega})\omega} = \varrho_{y_1}\varrho_{y_2} \cdots \varrho_{y_{n_\omega-1}}\sigma_\omega\varrho_{y_{n_\omega}}, & n_\omega > 1, \\ \varrho_{(y)\omega} = \varrho_y\sigma_\omega, & n_\omega = 1, \\ \varrho_{\omega^e} = \sigma_\omega, & n_\omega = 0. \end{cases}$$

Dazu setzen wir

$$\begin{array}{lll} U_1 = (x_1, \ldots, x_r)\,\varrho_{(y_1 \ldots y_{n_\omega})\omega}, & V_1 = (x_1, \ldots, x_r)\,\varrho_{y_1} \cdots \varrho_{y_{n_\omega-1}}\sigma_\omega\varrho_{y_{n_\omega}}, & n_\omega > 1, \\ U_2 = (x_1, \ldots, x_r)\,\varrho_{(y)\omega}, & V_2 = (x_1, \ldots, x_r)\,\varrho_y\sigma_\omega, & n_\omega = 1, \\ U_3 = (x_1, \ldots, x_r)\,\varrho_{\omega^e}, & V_3 = (x_1, \ldots, x_r)\,\sigma_\omega, & n_\omega = 0. \end{array}$$

1. Fall: $x_r \notin B$.

$$\begin{aligned} U_1 &= (x_1, \ldots, x_r, (y_1, \ldots, y_{n_\omega})\,\omega), \\ V_1 &= (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n_\omega-1})\,\sigma_\omega\varrho_{y_{n_\omega}} \\ &= (x_1, \ldots, x_r, (y_1, \ldots, y_{n_\omega-1}, *)\,\omega)\,\varrho_{y_{n_\omega}} \\ &= (x_1, \ldots, x_r, (y_1, \ldots, y_{n_\omega-1}y_{n_\omega})\,\omega) = U_1, \\ U_2 &= (x_1, \ldots, x_r, (y)\,\omega), \\ V_2 &= (x_1, \ldots, x_r, y)\,\sigma_\omega = (x_1, \ldots, x_r, (y)\,\omega) = U_2, \\ U_3 &= (x_1, \ldots, x_r, \omega^e), \\ V_3 &= (x_1, \ldots, x_r, \omega^e) = U_3. \end{aligned}$$

2. Fall: $x_r = (z_1, z_2, \ldots, z_{n_\pi-1}, *)\,\pi,\ n_\pi > 1$.

$$\begin{aligned} U_1 &= [x_1, \ldots, x_{r-1}, (z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}(y_1, \ldots, y_{n_\omega})\,\omega)\,\pi], \\ V_1 &= (x_1, \ldots, x_{r-1}, (z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}y_1)\,\pi)\,\varrho_{y_2}, \ldots \varrho_{y_{n_\omega-1}}, \sigma_\omega\varrho_{y_{n_\omega}} \\ &= (x_1, \ldots, x_{r-1}, (z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}y_1)\,\pi, y_2, \ldots, y_{n_\omega-1})\,\sigma_\omega\varrho_{y_{n_\omega}} \\ &= [x_1, \ldots, x_{r-1}, ((z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}y_1)\,\pi, y_2, \ldots, y_{n_\omega-1}, *)\,\omega]\,\varrho_{y_{n_\omega}} \end{aligned}$$

$$= [x_1, \ldots, x_{r-1}, ((z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}y_1)\,\pi, y_2, \ldots, y_{n_\omega-1}y_{n_\omega})\,\omega]$$

$$= [x_1, \ldots, x_{r-1}, (z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}(y_1, \ldots, y_{n_\omega})\,\omega)\,\pi] = U_1,$$

$$U_2 = [x_1, \ldots, x_{r-1}, (z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}(y)\,\omega)\,\pi],$$

$$V_2 = (x_1, \ldots, x_{r-1}, (z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}y)\,\pi)\,\sigma_\omega$$

$$= [x_1, \ldots, x_{r-1}, ((z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}y)\,\pi)\,\omega]$$

$$= [x_1, \ldots, x_{r-1}, (z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}(y)\,\omega)\,\pi] = U_2,$$

$$U_3 = (x_1, \ldots, x_{r-1}, (z_1, \ldots, z_{n_\pi-1}\omega^e)\,\pi),$$

$$V_3 = (x_1, \ldots, x_{r-1}, \omega^e) = U_3.$$

3. Fall: $x_r = (z, *)\,\pi,\ n_\pi = 1.$

$$U_1 = (x_1, \ldots, x_r),$$

$$V_1 = (x_1, \ldots, x_r)\,\sigma_\omega\varrho_{y_{n_\omega}} = (x_1, \ldots, x_r)\,\varrho_{y_{n_\omega}} = (x_1, \ldots, x_r) = U_1,$$

$$U_2 = (x_1, \ldots, x_r),$$

$$V_2 = (x_1, \ldots, x_r)\,\sigma_\omega = (x_1, \ldots, x_r) = U_2,$$

$$U_3 = (x_1, \ldots, x_r),$$

$$V_3 = (x_1, \ldots, x_r) = U_3.$$

4. Fall: $x_r = (*)\,\pi,\ n_\pi = 0.$

$$U_1 = (x_1, \ldots, x_r),$$

$$V_1 = (x_1, \ldots, x_r)\,\sigma_\omega\varrho_{y_{n_\omega}} = (x_1, \ldots, x_r)\,\varrho_{y_{n_\omega}} = (x_1, \ldots, x_r) = U_1,$$

$$U_2 = (x_1, \ldots, x_r),$$

$$V_2 = (x_1, \ldots, x_r)\,\sigma_\omega = (x_1, \ldots, x_r) = U_2,$$

$$U_3 = (x_1, \ldots, x_r),$$

$$V_3 = (x_1, \ldots, x_r) = U_3.$$

Die Anwendung von ϱ_z auf die leere Folge $(\ ) \in \Sigma$ ergibt $(\ )\,\varrho_z = (z)$. Daher definiert die Zuordnung $z (\in A) \rightsquigarrow \varrho_z$ eine Injektion $\varrho : A \to T(\Sigma)$. Die Halbgruppe $T = T(\Sigma)$ wird bezüglich der durch

$$(1.4)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (\varrho_1 \ldots \varrho_{n_\omega})\,\omega^T = \varrho_1 \ldots \varrho_{n_\omega-1}\sigma_\omega\varrho_{n_\omega}, & n_\omega > 1,\\ (\varrho)\,\omega^T = \varrho\sigma_\omega, & n_\omega = 1,\\ (\omega^T)^e = \sigma_\omega, & n_\omega = 0, \end{array}\right.$$

$(\varrho, \varrho_i \in T)$ erklärten Operationen $\omega^T (\omega \in \Omega)$ zu einer Ω-Algebra (T, Ω^T), die man auch als Ω-Struktur $((T_\omega)_{\omega\in\Omega}, \Omega^T)$ mit $T_\omega = (T_{\omega 1}, \ldots, T_{\omega n_\omega})$, $T_{\omega 1} = \ldots = T_{\omega n_\omega} = T$, auffassen kann. Die Gleichungen (1.3) besagen dann gerade, daß ϱ eine „isomorphe Struktureinbettung" von $((I_\omega)_{\omega\in\Omega},$

Ω) in $((T_\omega)_{\omega\in\Omega}, \Omega^T)$ vermittelt. Infolge dieser Isomorphie ist auch $\sigma_\pi = (\pi^T)^\varrho = \varrho_1 \ldots \varrho_{n_\omega - 1}\sigma_\omega\sigma_\pi$ für alle $\varrho_i \in (I_{\omega i})\,\varrho$, falls $n_\pi = 0$ und $n_\omega > 1$. Damit ist 1.1.a) bewiesen.

1.2. Bemerkung. Im Spezialfall $I_{\omega 1} = \ldots = I_{\omega n_\omega}$ für alle $\omega \in \Omega$ ist ϱ eine isomorphe Einbettung (im gewöhnlichen Sinne): $(I, \Omega) \to (T, \Omega^T)$. Jede Halbgruppe S mit ausgezeichneten Elementen $s_\omega(\omega \in \Omega)$ kann man, wie in (1.4) im Falle $S = T$ angegeben, zu einer Ω-Algebra (S, Ω^S) machen. Nimmt man noch die in S definierte Halbgruppenmultiplikation (vertreten durch das Symbol ( )) und die durch $[\omega]^\varrho = s_\omega(\forall\omega \in \Omega)$ definierten konstanten Operationen $[\omega]$ hinzu, so erhält man eine Algebra (S, Ω') vom Typ $\Omega' = ([\Omega], (\ ), \Omega^S)$. Wie man aus (1.4) erkennt, bilden alle so aus Halbgruppen („über Ω") abgeleiteten Algebren eine primitive Klasse. Bekanntlich (vergl. zum Beisp. das in [1], p. 185, behandelte analoge Einbettungsproblem für beliebige Ω-Algebren oder auch [5], p. 80, Theorem 2) existiert daher eine universale isomorphe Einbettung $(I, \Omega) \to (S, \Omega^S)$. Der hier betrachtete Spezialfall der Einbettung von Ω-Pseudoscharen in Halbgruppen wurde schon von Čupona ([2], p. 107, erste Hälfte von Theorem 2) behandelt; die dort angegebene Einbettungskonstruktion ist allerdings komplizierter als unsere. Außerdem ist Theorem 2 aus [2] ohne die von uns in (1.1) gemachte Einschränkung $n_\pi > 1$ falsch, da die Identität (1.1) im Falle $n_\pi = 1$ nicht ohne zusätzliche Annahmen aus der Einbettbarkeit der Ω-Struktur in eine Halbgruppe folgt. Ferner erscheint die Beschränkung des Theorems 2 (aus [2]) auf den Fall, daß höchstens eine der Operationen unär sein soll, überflüssig.

2. In [3] haben wir den Begriff einer homogen 0-disjunkt (I, Λ)-zerlegbaren Halbgruppe betrachtet. Das ist eine Halbgruppe $(R, .)$ mit Nullelement 0, für die Zerlegungen der Form

$$R = \bigcup_{i\in I} R_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$$

existieren, die folgenden zwei Bedingungen genügen:

1. Die Teilmengen $R_i \subseteqq R$ sind Rechtsideale von R, die als R-Rechtssysteme (d. h. bezüglich der rechtsseitigen Multiplikation mit Elementen von R) paarweise isomorph und 0-disjunkt (d. h. $R_i \cap R_j = \{0\}$ für $i \neq j$) sind. Analog sind die L_λ Linksideale von R, die als R-Linkssysteme paarweise isomorph und 0-disjunkt sind.

2. Es ist $I \cap \Lambda \neq \emptyset$, und für einen festen Index $1 \in I \cap \Lambda$ existieren eine Familie $(\varphi_i' : R_i \to R_1)_{i\in I}$ von Isomorphismen zwischen R-Rechtssystemen und eine Familie $(\psi_\lambda' : L_\lambda \to L_1)_{\lambda\in\Lambda}$ von Isomorphismen zwischen R-Linkssystemen, so daß jedes φ_i' mit jedem ψ_λ' vertauschbar, d. h. folgendes Diagramm kommutativ ist ($\hookrightarrow$ die natürliche Injektion):

$$\begin{tikzcd}
 & L_\lambda \arrow[r, "\psi'_\lambda"] & L_1 & \\
R_i & R_i \cap L_\lambda \arrow[l, "\supseteq"'] \arrow[r] \arrow[u, "\cup"] \arrow[d] & R_i \cap L_1 \arrow[r, "\subsetneq"] \arrow[u, "\cup"] \arrow[d] & R_i \arrow[d, "\varphi'_i"] \\
R_1 \arrow[from=u, "\varphi'_i"'] & R_1 \cap L_\lambda \arrow[l, "\supseteq"'] \arrow[r] \arrow[d, "\cap"] & R_1 \cap L_1 \arrow[r, "\subsetneq"] \arrow[d, "\cap"] & R_1 \\
 & L_\lambda \arrow[r, "\psi'_\lambda"'] & L_1 &
\end{tikzcd}$$

Setzt man φ'_i, ψ'_λ auf ganz R fort gemäß

(2.1) $$R_j\varphi_i = L_\varkappa\psi_\lambda = \{0\} \text{ für } i \neq j \text{ und } \varkappa \neq \lambda,$$

so erhält man Abbildungen $\varphi_i : R \to R$, $\psi_\lambda : R \to R$, die folgenden Bedingungen genügen:

(2.2) $$\forall x, y \in R: \quad \begin{aligned} \varphi_i(x \,.\, y) &= \varphi_i(x) \,.\, y, \\ \psi_\lambda(x \,.\, y) &= x \,.\, \psi_\lambda(y), \\ \varphi_i\psi_\lambda(x) &= \psi_\lambda\varphi_i(x). \end{aligned}$$

Nun sei umgekehrt (R, Ω) eine Algebra von Typ $\Omega = (.\,, \Phi, \Psi)$, wo $(.)$ eine binäre Operation und $\Phi = (\varphi_i)_{i \in I}$, $\Psi = (\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ zwei Folgen von einstelligen Operationen auf R sind, so daß in (R, Ω) die Identitäten (2.2) und

(2.3) $$\forall x, y, z \in R: \quad (x \,.\, y) \,.\, z = x \,.\, (y \,.\, z)$$

gelten.

2.1. **Beispiel.** Es sei $R = S$ eine S-ähnliche zerlegbare Halbgruppe mit Null 0 im Sinne von Steinfeld [6], d. h., S besitzt eine Zerlegung $S = \bigcup_{i \in I} e_iS = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Se_\lambda (e_i^2 = e_i,\ e_\lambda^2 = e_\lambda,\ 1 \in I \cap \Lambda)$, wo $e_iS (i \in I)$ $[Se_\lambda (\lambda \in \Lambda)]$ als S-Rechts [Links]-systeme paarweise isomorph sind und $e_iS \cap e_jS = Se_\varkappa \cap Se_\lambda = \{0\}$ für $i, j \in I$, $i \neq j$ und $\varkappa, \lambda \in \Lambda$, $\varkappa \neq \lambda$ gilt. Aus $e_iS \cong e_1S$ folgt bekanntlich ([6], p. 136, Proposition 2.1) die Existenz von Elementen $r_{1i} \in e_1Se_i$, $s_{i1} \in e_iSe_1$, sodaß $r_{1i}s_{i1} = e_1$, $s_{i1}r_{1i} = e_i$, und von Elementen $p_{1\lambda} \in e_1Se_\lambda$, $q_{\lambda 1} \in e_\lambda Se_1$, so daß $p_{1\lambda}q_{\lambda 1} = e_1$, $q_{\lambda 1}p_{1\lambda} = e_\lambda$. Die gemäß

(2.4) $$\varphi'_i(x) = r_{1i}x, \qquad \psi'_\lambda(y) = yq_{\lambda 1}$$

definierten Abbildungen $\varphi'_i : e_iS \to e_1S [\psi'_\lambda : Se_\lambda \to Se_1]$ sind offenbar Isomorphismen der S-Rechtssysteme e_iS, e_1S [der S-Linkssysteme Se_λ, Se_1], und jedes φ'_i ist mit jedem ψ'_λ vertauschbar. Fortsetzungen $\varphi_i : S \to S$, $\psi_\lambda : S \to S$ von φ'_i bzw. ψ'_λ mit den Eigenschaften (2.2) erhält man, indem man in (2.4) x und y ganz S durchlaufen läßt. (Diese Fortsetzungen stimmen im allgemeinen nicht mit den durch (2.1) definierten überein).

Im Hinblick auf dieses Beispiel erhebt sich die Frage, ob eine Algebra (R, Ω), $\Omega = (., \Phi, \Psi)$ mit den Eigenschaften (2.2), (2.3) stets so in eine Halbgruppe S eingebettet werden kann, daß folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(2.5) $\quad \exists a_i, b_\lambda \in S, \forall x \in R: \quad \varphi_i(x) = a_i x, \quad \psi_\lambda(x) = x b_\lambda;$

(2.6) $\quad (R, .)$ ist eine Teilhalbgruppe von S.

Das ist in der Tat der Fall.

2.2. Satz. Für eine Algebra (R, Ω), wo Ω aus einer zweistelligen Operation $(.)$ und zwei Folgen $\Phi = (\varphi_i)_{i \in I}$, $\Psi = (\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von einstelligen Operationen besteht, sind folgende Aussagen gleichwertig:

a) Es existiert eine Halbgruppe S mit den Eigenschaften (2.5), (2.6);

b) in (R, Ω) bestehen die Identitäten (2.2), (2.3).

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) istklar.

b) $\Rightarrow$ a). In (R, Ω) seien die Identitäten (2.2), (2.3) erfüllt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir R, Φ, Ψ als paarweise disjunkte Mengen auffassen. (Wir können zum Teil einem in [4] beschriebenen Weg folgen.) Sei $W(N)$ die freie Halbgruppe mit Einselement über der freien Erzeugendenmenge $N = R \cup \Phi \cup \Psi$. Wir bilden die folgenden drei Relationen in $W(N)$:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \{(xy, x \,.\, y) \mid x, y \in R\}, \\ \varrho_2 &= \{(\varphi_i x, \varphi_i(x)) \mid x \in R\}, \\ \varrho_3 &= \{(x\psi_\lambda, \psi_\lambda(x)) \mid x \in R\}. \end{aligned}$$

Sei ϱ die von $\varrho_1 \cup \varrho_2 \cup \varrho_3$ in der Halbgruppe $W(N)$ erzeugte Kongruenz und $P = W(N)/\varrho$ die Faktorhalbgruppe von $W(N)$ nach ϱ. Bezeichnet $\bar{x}$ die das Element $x \in W(N)$ enthaltende Kongruenzklasse von $W(N)$ bezüglich ϱ, so gilt $(\forall x, y \in R)$

$$\bar{x} \,.\, \bar{y} = \overline{xy} = \bar{x}\bar{y}, \quad \overline{\varphi_i(x)} = \overline{\varphi_i x} = \bar{\varphi}_i \bar{x}, \quad \overline{\psi_\lambda(x)} = \overline{\psi_\lambda x} = \bar{x}\bar{\psi}_\lambda.$$

Definiert man in $W(N)$ einstellige Operationen gemäß

$$\varphi_i^W(x) = \varphi_i x, \qquad \psi_\lambda^W(x) = x\psi_\lambda \qquad (\forall x \in W(N)),$$

so erhält man eine Algebra $(W(N), \Omega^W)$ mit $\Omega^W = ((\ ), (\varphi_i^W)_{i \in I}, (\psi_\lambda^W)_{\lambda \in \Lambda})$, und da ϱ auch eine Kongruenz in dieser Algebra ist, so existiert die Faktoralgebra (P, Ω^P) mit $\Omega^P = ((\ ), (\varphi_i^P)_{i \in I}, (\psi_\lambda^P)_{\lambda \in \Lambda})$. Dabei vertritt $(\ )$ das zur Operation xy bzw. $\bar{x}\bar{y}(x, y \in W(N))$ gehörige binäre Operationssymbol. Da $\overline{x \,.\, y} = \bar{x}\bar{y}$ $(x, y \in R)$ und

$$\overline{\varphi_i(x)} = \bar{\varphi}_i\bar{x} = \varphi_i^P(\bar{x}), \qquad \overline{\psi_\lambda(x)} = \bar{x}\bar{\psi}_\lambda = \psi_\lambda^P(\bar{x}),$$

so ist durch $x \rightsquigarrow \bar{x} (x \in R)$ ein Homomorphismus $(R, \Omega) \to (P, \Omega^P)$ definiert. Wir wollen nachweisen, daß diese Abbildung injektiv ist, d. h. aus $a, b \in R$, $(a, b) \in \varrho$ stets folgt $a = b$. Bekanntlich ist allgemein $(a, b) \in \varrho$ (für $a, b \in W(N)$) gleichwertig mit der Existenz von Elementen $S_i \in W(N)$, so daß

$$a = S_0, \qquad S_1, \ldots, S_n = b, \tag{2.7}$$

wobei S_i aus S_{i-1} $(i = 1, \ldots, n)$ durch eine der folgenden Regeln entsteht $(x, y \in R;\ U, V \in W(N))$:
1. $S_{i-1} = U\varphi_i(x)\,V, \qquad S_i = U\varphi_i(x) \quad V,$

$$\left\{\begin{array}{lll} 1. & S_{i-1} = UxyV, & S_i = U(x \,.\, y)\,V, \\ 2. & S_{i-1} = U(x \,.\, y)\,V, & S_i = UxyV, \\ 3. & S_{i-1} = U\varphi_i x V, & S_i = U\varphi_i(x)\,V, \\ 4. & S_{i-1} = U\varphi_i(x)\,V, & S_i = U\varphi_i x V, \\ 5. & S_{i-1} = Ux\psi_\lambda V, & S_i = U\psi_\lambda(x)\,V, \\ 6. & S_{i-1} = U\psi_\lambda(x)\,V, & S_i = Ux\psi_\lambda V. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Elementepaare der Form (S_{i-1}, S_i) heißen assoziiert. Unter einem R-Wort über der Algebra (R, Ω) verstehen wir irgendein Element der (absolut) freien Algebra vom Typ Ω mit der (absolut) freien Erzeugendenmenge R. Zwei R-Wörter ξ, η heißen R-gleich, $\xi \overset{R}{=} \eta$, wenn sie bei ihrer Interpretation als Elemente von (R, Ω) gleich sind.

Die Elemente der von R erzeugten Teilalgebra von $(W(N), \Omega^W)$ heißen Ausdrücke in $W(N)$. Die Ausdrücke in $W(N)$ lassen sich induktiv definieren: Jedes Element aus R ist ein Ausdruck in $W(N)$. Sind J, K Ausdrücke in $W(N)$, so heißen auch JK, $\varphi_i J$, $K\psi_\lambda$ Ausdrücke in $W(N)$. Offenbar sind die Ausdrücke in $W(N)$ genau die Elemente aus $W(N)$ der Form

$$X = \varphi_{i_1} \cdots \varphi_{j_1} x_{h_1} \psi_{\varkappa_1} \cdots \psi_{\lambda_1} \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{j_2} x_{h_2} \psi_{\varkappa_2} \cdots \psi_{\lambda_2} \cdots \varphi_{i_m} \cdots \varphi_{j_m} x_{h_m} \psi_{\varkappa_m} \cdots \psi_{\lambda_m}. \tag{2.9}$$

Dabei ist $x_{h_g} \in R$ und $\varphi_{i_g} \ldots \varphi_{j_g}$ bzw. $\psi_{\varkappa_g} \ldots \psi_{\lambda_g}$ eine (evtl. leere) Folge von Faktoren aus Φ bzw. aus Ψ.

Wir definieren eine Funktion f, die jedem Ausdruck in $W(N)$ genau ein R-Wort zuordnet. Ist X der Ausdruck (2.9), so sei

$$f(X) = \left(\varphi_{i_1} \cdots \varphi_{j_1} \psi_{\varkappa_1} \cdots \psi_{\lambda_1}(x_{h_1})\right) \,.\, \ldots \,.\, \left(\varphi_{i_m} \cdots \varphi_{j_m} \psi_{\varkappa_m} \cdots \psi_{\lambda_m}(x_{h_m})\right). \tag{2.10}$$

2.3 Lemma.. Wenn zwei Ausdrücke in $W(N)$ kongruent bezüglich ϱ sind, so sind die zugeordneten R-Wörter R-gleich.

Beweis. Zunächst ist auf Grund von (2.8), (2.9) leicht einzusehen, daß mit S_{i-1} stets auch S_i ein Ausdruck ist. Daher genügt es, 2.3 für assoziierte Ausdrücke S_{i-1}, S_i zu beweisen. Im Fall (2.8.1) hat man

$$\begin{aligned}
S_{i-1} &= UxyV = X = \ldots \varphi_{i_g} \ldots \varphi_{j_g} x y \psi_{\varkappa_g} \ldots \psi_{\lambda_g} \ldots, \\
S_i &= U(x \,.\, y)\, V = \ldots \varphi_{i_g} \ldots \varphi_{j_g}(x \,.\, y)\, \psi_{\varkappa_g} \ldots \psi_{\lambda_g} \ldots, \\
f(S_{i-1}) &= \ldots \,.\, (\varphi_{i_g} \ldots \varphi_{j_g}(x)) \,.\, (\psi_{\varkappa_g} \ldots \psi_{\lambda_g}(y)) \,.\, \ldots, \\
f(S_i) &= \ldots \,.\, (\varphi_{i_g} \ldots \varphi_{j_g} \psi_{\varkappa_g} \ldots \psi_{\lambda_g}(x \,.\, y)) \,.\, \ldots \\
&\overset{R}{=} \ldots \,.\, [\varphi_{i_g} \ldots \varphi_{j_g}(x \,.\, (\psi_{\varkappa_g} \ldots \psi_{\lambda_g}(y))] \,.\, \ldots \\
&\overset{R}{=} \ldots \,.\, (\varphi_{i_g} \ldots \varphi_{j_g}(x)) \,.\, (\psi_{\varkappa_g} \ldots \psi_{\lambda_g}(y)) \,.\, \ldots \\
&= f(S_{i-1}).
\end{aligned}$$

Analog zeigt man, daß auch in den übrigen 5 Fällen (2.8.2)—(2.8.6) $f(S_{i-1}) \overset{R}{=} f(S_i)$ ist.

Aus Lemma 2.3 folgt nun sofort Satz 2.2. Wenn nämlich $a, b \in R$ kongruent bezüglich ϱ sind, so ist $a = f(a) \overset{R}{=} f(b) = b$, d. h. aber, $a = b$.

2.4. Bemerkung. Wir können $W(N)$ auch als Algebra vom Typ $([\Phi], [\Psi], \Omega^W)$ auffassen, wo $[\Phi] = ([\varphi_i])_{i \in I}$, $[\Psi] = ([\psi_\lambda])_{\lambda \in \Lambda}$ und $[\varphi_i]$ bzw. $[\psi_\lambda]$ eine konstante Operation mit $[\varphi_i]^e = \varphi_i$, $[\psi_\lambda]^e = \psi_\lambda$ ist. Entsprechend läßt sich P als Algebra vom gleichen Typ $([\Phi], [\Psi], \Omega^P)$ auffasen (hier ist $[\varphi_i]^e = \bar{\varphi}_i$, $[\psi_\lambda]^e = \bar{\psi}_\lambda$). Bezeichnet Q $(\subseteqq P)$ die von $R(\subseteqq P)$ erzeugte Teilalgebra von $(P, [\Phi], [\Psi], \Omega^Q)$, so ist die von $(R, \Omega) \to (P, \Omega^P)$ induzierte Einbettung $(R, \Omega) \to (Q, \Omega^Q)$ universal. D. h., wenn $(S, (\;))$ eine Halbgruppe, $a_i (i \in I)$, $b_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ fixierte Elemente von S, $(S, (\;), [\Phi], [\Psi])$ die Algebra mit den zusätzlichen, durch $[\varphi_i]^e = a_i$, $[\psi_\lambda]^e = b_\lambda$ definierten konstanten Operationen $[\varphi_i]$ $(i \in I)$, $[\psi_\lambda]$ $(\lambda \in \Lambda)$; $(S, [\Phi], [\Psi], \Omega^S)$ die daraus abgeleitete Algebra vom Typ $([\Phi], [\Psi], \Omega^S)$ mit $\Omega^S = ((\;), (\varphi_i^S)_{i \in I}, (\psi_i^S)_{\lambda \in \Lambda})$ (so daß $\varphi_i^S(x) = [\varphi_i]^e x = a_i x$, $\psi_\lambda^S(x) = x[\psi_\lambda]^e = x b_\lambda$) und α: $(R, \Omega) \to (S, \Omega^S)$ irgendein Homomorphismus ist, so existiert genau ein Homomorphismus

$$\beta\colon (Q, [\Phi], [\Psi], \Omega^Q) \to (S, [\Phi], [\Psi], \Omega^S),$$

der das folgende Diagramm kommutativ schließt:

$$\begin{tikzcd}
(R, \Omega) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha"'] & & (Q, \Omega^Q) \arrow[dl, "\beta"] \\
& (S, \Omega^S) &
\end{tikzcd}$$

Nach einem analogen Argument wie in 1.2 ist zwar sofort klar, daß überhaupt eine universale Einbettung für (R, Ω) existiert; wir wollen jetzt aber nachweisen, daß schon $(R, \Omega) \to (Q, \Omega^Q)$ die angegebene Universaleigenschaft besitzt.

Ein Element $\chi \in W(N)$ heiße $\Phi\Psi$-Ausdruck in $W(N)$, wenn χ die Form

$$(2.11) \qquad \chi = \varphi_{k_1} \cdots \varphi_{1_1}\psi_{\mu_1} \cdots \psi_{\nu_1}\varphi_{k_2} \cdots \varphi_{1_2}\psi_{\mu_2} \cdots \psi_{\nu_2} \cdots \varphi_{k_m} \cdots \varphi_{1_m}\psi_{\mu_m} \cdots \psi_{\nu_m}$$

besitzt. Ein Element $X \in W(N)$ heiße c-Ausdruck in $W(N)$, wenn X nicht das leere Wort ist und die Form

$$(2.12) \qquad X = \chi_0 X_1 \chi_1 X_2 \chi_2 \ldots X_r \chi_r, \qquad r \geqq 0,$$

besitzt, wo χ_g $\Phi\Psi$-Ausdrücke und die X_g Ausdrücke in $W(N)$ sind. Dabei soll χ_g $(1 \leqq g \leqq r-1,\ r > 1)$ nicht das leere Wort sein, mit einem Element $\varphi_i \in \Phi$ anfangen und mit einem Element $\psi_\lambda \in \Psi$ enden; wenn $r \geqq 1$ und χ_0 nicht das leere Wort ist, so soll χ_0 mit einem $\psi_\lambda \in \Psi$ enden; wenn $r \geqq 1$ und χ_r nicht das leere Wort ist, so soll χ_r mit einem $\varphi_i \in \Phi$ anfangen. Offenbar besteht Q genau aus den Elementen der Form $\bar{X}$, wo X ein c-Ausdruck in $W(N)$ ist.

Ist

$$(2.13) \qquad X' = \chi_0' X_1' \chi_1' X_2' \chi_2' \ldots X_{r'}' \chi_{r'}',$$

ein zweiter c-Ausdruck, so ist $(X, X') \in \varrho$ gleichbedeutend mit $r = r'$, $\chi_g = \chi_g'$ $(g \geqq 0)$, $(X_g, X_g') \in \varrho$ $(g \geqq 1)$. Diese Behauptung läßt sich durch Rückgang auf assoziierte c-Ausdrücke S_{i-1}, S_i leicht einsehen, denn in $S_{i-1} = X$, $S_i = X'$ gilt für genau ein g' die Aussage $(X_{g'}, X_{g'}') \in \varrho$ und sonst $\chi_g = \chi_g'$ $(g \geqq 0)$, $X_g = X_g'$ $(g \geqq 1,\ g \neq g')$.

Ein Homomorphismus α: $(R, \Omega) \to (S, \Omega^S)$ läßt sich jetzt wie folgt zu einer Abbildung β: $Q \to S$ fortsetzen: Ist $\bar{X} \in Q$, $X = p(x_1, \ldots, x_n)$ der c-Ausdruck (2.12), wobei die in X vorkommenden Elemente aus R genau die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ sein mögen, so setze man $\beta(\bar{X}) = p_S(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n))$; dieses Polynom p_S geht aus dem Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ durch folgende Substitution hervor: 1. Jedes X_g in p werde durch $f_S(X_g)$ ersetzt; $f_S(X_g)$ ist analog wie $f(X_g)$ definiert —, man hat in (2.10) nur φ_i bzw. ψ_λ durch φ_i^S bzw. ψ_λ^S, ferner x_h durch $\alpha(x_h)$ zu ersetzen. 2. Jeder $\Phi\Psi$-Ausdruck χ_g, (2.11), ist durch

$$a_{k_1} \ldots a_{1_1} b_{\mu_1} \ldots b_{\nu_1} \ldots a_{k_m} \ldots a_{1_m} b_{\mu_m} \ldots b_{\nu_m}$$

zu ersetzen. Die so definierte Zuordnung β ist eindeutig. Denn sind X, X' c-Ausdrücke (2.12), (2.13) und ist $\bar{X} = \bar{X}'$, so gilt $r = r'$, $\chi_g = \chi_g'$ $(g \geqq 0)$ und $(X_g, X_g') \in \varrho$ $(g \geqq 1)$. Zufolge 2.3 ist daher $f(X_g) = f(X_g')$; und da α ein Homomorphismus ist, so hat man $f_S(X_g) \underline{\underline{R}}\ \alpha(f(X_g)) = \alpha(f(X_g')) = f_S(X_g')$, $g \geqq 1$. Zusammen mit $\chi_g = \chi_g'$ $(g \geqq 0)$ ergibt sich daher $\beta(\bar{X}) = \beta(\bar{X}')$. Sind $\bar{X}$, $\bar{X}'$ irgendzwei Elemente aus Q, wobei

$X = p(x_1, \ldots, x_n)$, $X' = p'(x_1', \ldots, x_{n'}')$ c-Ausdrücke darstellen, so ist auch XX' ein c-Ausdruck, und man hat $\beta(\bar{X}\bar{X}') = \beta(\overline{XX'}) = p_S(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n))\, p_S'(\alpha(x_1'), \ldots, \alpha(x_{n'}')) = \beta(\bar{X})\, \beta(\bar{X}')$. Außerdem gilt $\beta(\bar{\varphi}_i) = a_i$, $\beta(\bar{\psi}_\lambda) = b_\lambda$, $\beta(\varphi_i^Q(\bar{X})) = \beta(\bar{\varphi}_i\bar{X}) = \beta(\overline{\varphi_i X}) = a_i\beta(\bar{X}) = \varphi_i^S(\beta(\bar{X}))$ und entsprechend $\beta(\psi_\lambda^Q(\bar{X})) = \psi_\lambda^S(\beta(\bar{X}))$. Folglich ist β ein Homomorphismus, $\beta\colon (Q, [\Phi], [\Psi], \Omega^Q) \to (S, [\Phi], [\Psi], \Omega^S)$. Da die Algebra $(Q, [\Phi], [\Psi], \Omega^Q)$ von R erzeugt wird, ist β durch α eindeutig bestimmt.

LITERATUR

[1] Cohn, P. M.: *Universal algebra*, New York, Evanston and London, 1965.

[2] Čupona, G.: *On some primitive classes of universal algebras*, Mat. Vesnik n. S. 3 (18), (1966), 105—108.

[3] Hoehnke, H.—J.: *Über Verallgemeinerungen des Scharbegriffs*, Math. Nachr. 38 (1968), 365—382.

[4] Ребане, Ю. К.: *О представлении универсальных алгебр в коммутативных полугруппах*, *Сиб. Мат. Журн.* 7 (1966), 878—885.

[5] Schmidt, J.: *A general existence theorem on partial algebras and its special cases*, Colloq. Math. 14 (1966), 73—87.

[6] Steinfeld, O.: *On a generalization of completely O-simple semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 28 (1967), 135—145.

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
Institut für Reine Mathematik