Jaroslav Krbiľa

Об определении не колеблющего дифференциального уравнения $y'' = q(t)y$ второй гиперболической фазой

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 1, 1--6

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104675`

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕКОЛЕБЛЮЩЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' = q(t)y$ ВТОРОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ФАЗОЙ

Ярослав Крбиля, Жилина

Поступило в редакцию 13. 6. 1968

Посвящено академику О. Борувке ко дню 70— летия

В книге академика Борувки [1], стр. 35—100, построена теория фаз обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти фазы определены при помощи круговых полярных координат. Подобным образом в работе [2] определены при помощи гиперболических полярных координат функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, которые названы по очереди первой, второй гиперболической фазой. В следующем мы будем прилагательное гиперболический пропускать.

Символом $f(t) \in C_k(J)$ будем в дальшем означать тот факт, что функция $f(t)$ непрерывна, вместе со своими производными включительно порядка k на открытом интервале $J = (a, b)$. Если интервал J полуоткрытый $[a, b)$, то под непрерывностью функции $f(t)$ или производной этой функции в конце $x = a$ мы будем понимать непрерывность или производную справа. Подобно тому будем понимать тоже непрерывность или производную в случае отрезка в его концах.

В работе [2] было доказано следующее утверждение: Для того, чтобы произвольные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, определенные в интервале J, $\alpha(t)\ \beta(t) \neq 0$ для всех $t \in J$, имеющие свойство $\alpha(t) \in C_3(J)$, $\alpha'(t) \neq 0$, для всех $t \in J$, $\beta(t) \in C_1(J)$, были по очереди первой, второй фазой определенной базы u, v, решений неколеблющего дифференциального уравнения

$$(q) \qquad y'' = q(t)y, \qquad q(t) \in C_0(J)$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $t \in J$ выполнялось

$$(1) \qquad \beta(t) = \alpha(t) + \operatorname{Arcth} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'}\right)'.$$

Легко можно доказать, что выбором произвольной функции $\alpha(t)$, о которой предполагаем, что имеет свойство

$$(\alpha) \qquad \alpha(t) \in C_3(J), \ \alpha'(t) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t \in J,$$

дифференциальное уравнение (q) однозначно определяется формулой

$$q(t) = -\{\alpha, t\} + \alpha'^2, \tag{2}$$

где выражение $\{\alpha, t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2$ называется производной Шварца функции α в точке t, для которого уравнения функция $\alpha(t)$ является первой фазой.

Если дана первая фаза $\alpha(t)$ то вопрос о существовании второй фазы $\beta(t)$ имеет положительный ответ только в том случае, когда фаза $\alpha(t)$ еще выполняет неравенство $\left|\left(\frac{1}{\alpha'}\right)'\right| > 2$ для всех $t \in J$. Фазу $\beta(t)$ потом получим из формулы (1).

Решение проблемы, в какой мере функция $\beta(t)$, имеющая свойство

$$\beta(t) \in C_1(J), \quad \beta'(t) \neq 0 \tag{β}$$

для всех $t \in J$, если требование, чтобы она была второй фазой определенного дифференциального уравнения (q) определяет первую фазу $\alpha(t)$, следовательно, и дифференциальное уравнение (q), хотим дать в этой статье. Подобная проблема изучена для колеблющего случая в работе [3], которая явилась толчком и послужила образцом для дальнейших рассуждений.

В случае если $\alpha'(t) \neq 0$ для всех $t \in J$ то дифференциальное уравнение (1) возможно заменить эквивалентным дифференциальным уравнением

$$\alpha'' = 2\alpha'^2 \operatorname{cth}[\alpha(t) - \beta(t)], \tag{3}$$

правая часть, которого является непрерывной функцией всех переменных и удовлетворяет условию Липшица относительно переменных α, α' и поэтому проблема Коши имеет единственное решение.

Лемма. *Если* $x < 0$, *то* $\operatorname{cth} x < \frac{1}{x}$.

Доказательство следует из того, что $\lim\limits_{x \to 0^-}\left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}\right) = 0$ и производная $\left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}\right)' > 0$.

Теорема 1. *Пусть функция* $\beta(t) \in C_1([a, \infty))$, $\beta(t) > 0$, $\beta'(t) > 0$, *для всех* $t \in [a, \infty)$, *пусть* α_0, α_0' *произвольные положительные числа и пусть* $\alpha_0 < \beta(a)$. *Потом дифференциальное уравнение* (1) *имеет одно и только одно решение* $\alpha(t)$, *со свойством* $\alpha(t) \in C_3([a, \infty))$, $0 < \alpha(t) < \beta(t)$, $\alpha'(t) > 0$, *для всех* $t \in [a, \infty)$, *выполняющее начальные условия:* $\alpha(a) = \alpha_0$, $\alpha'(a) = \alpha'_0$.

Доказательство. Из предложений теоремы, согласно теореме существования и единственности решений, существует одно и только одно решение дифференциального уравнения (3), которое определено в определенной окресности справа точки a: $[a, a + \bar{\delta})$, $\bar{\delta} > 0$, выполняющее начальные условия $\alpha(a) = \alpha_0$, $\alpha'(a) = \alpha'_0$. Поскольку функция $\beta(t) \in C_1([a, \infty))$, то $\alpha(t) \in C_3([a, a + \bar{\delta}))$ и из $\alpha'(a) > 0$, $\alpha(a) < \beta(a)$ следует существование $\delta > 0$, $\delta \leqq \bar{\delta}$ такого, что для всех $t \in [a, a + \delta)$ тоже $\alpha'(t) > 0$ и $\alpha(t) < \beta(t)$.

Теорему докажем таким образом, что покажем возможность пополнения определения функции $\alpha(t)$ в правый конец $a + \delta$ полуинтервала $[a, a + \delta)$ так, чтобы на сегменте $[a, a + \delta]$ функция $\alpha(t)$ обладала $\alpha(t) \in C_3([a, a + \delta])$, $\alpha(t) < \beta(t)$, $\alpha'(t) > 0$, для всех $t \in [a, a + \delta]$.

Чтобы функция $\alpha(t)$ с пополненным определением в точку $a + \delta$ принадлежала к $C_3([a, a + \delta])$, должен существовать предел $\lim\limits_{t \to a + \delta^-} \alpha(t)$. Этот предел ввиду того, что в интервале $[a, a + \delta)$ производная $\alpha'(t) > 0$, то есть функция $\alpha(t)$ возрастающая и имеет место неравенство $\alpha(t) < \beta(t)$, существует. Определяем $\lim\limits_{t \to a + \delta^-} \alpha(t) = \alpha(a + \delta)$.

В полуинтервале $[a, a + \delta)$ выполняется неравенство $\alpha(t) < \beta(t)$. Мы должны еще показать, что $\alpha(a + \delta) < \beta(a + \delta)$ и сделаем это приведением к нелепости. Пусть верно $\alpha(a + \delta) = \beta(a + \delta)$. В силу леммы, поскольку $\alpha - \beta < 0$, имеет место неравенство $\operatorname{cth}(\alpha - \beta) < \dfrac{1}{\alpha - \beta}$ для всех $t \in [a, a + \delta)$. Из этого неравенства и из дифференциального уравнения (3) получим, так как $\dfrac{\beta'}{\alpha - \beta} < 0$ неравенство:

$$\frac{\alpha''}{\alpha'} < 2\frac{\alpha'}{\alpha - \beta} = 2\frac{\alpha' - \beta'}{\alpha - \beta} + 2\frac{\beta'}{\alpha - \beta} < 2\frac{\alpha' - \beta'}{\alpha - \beta},$$

из которого следует отношение:

$$\frac{\alpha''}{\alpha'} = 2\frac{\alpha' - \beta'}{\alpha - \beta} + f(t),$$

где функция $f(t) < 0$ для всех $t \in [a, a+\delta)$. Интегрированием получаем:

$$\ln \alpha' = \ln (\alpha - \beta)^2 + \int_a^t f(\sigma)\, d\sigma + \ln \frac{\alpha_0'}{(\alpha_0 - \beta(a))^2},$$

или

$$\alpha' = \frac{\alpha_0'}{(\alpha_0 - \beta(a))^2} (\alpha - \beta)^2 e^{F(t)},$$

где $F(t) = \int_a^t f(\sigma)\, d\sigma$ убывающая функция на сегменте $[a, a+\delta]$, $F(a) = 0$ и поэтому $\alpha' < c(\alpha - \beta)^2$, где c подходящая постоянная. Изберем δ_0, $0 < \delta_0 < \delta$ такое, чтобы на сегменте $[a+\delta_0, a+\delta]$ выполнялось неравенство $\beta - \alpha < \sqrt{\frac{m}{2c}}$, где $m > 0$ обозначает минимум производной $\beta'(t)$ на сегменте $[a, a+\delta]$. Потом на полуинтервале $[a+\delta_0, \quad a+\delta)$ выполняются неравенства $0 < \alpha'(t) < \frac{m}{2}$, $\beta'(t) \geqq m$, откуда $\beta' - \alpha' \geqq \frac{m}{2}$ то есть функция $\beta - \alpha$ на этом полуинтервале является возрастающей. Обозначим через h значение этой функции в точке $a + \delta_0 : h = \beta(a+\delta_0) - \alpha(a+\delta_0) > 0$. Так как существует $\lim\limits_{t \to a+\delta^-} [\beta(t) - \alpha(t)]$, имеет место неравенство $\beta(a+\delta) - \alpha(a+\delta) \geqq h > 0$, следовательно, мы приходим к нелепому выводу $\beta(a+\delta) > \alpha(a+\delta)$ в отношении к предположению $\beta(a+\delta) = \alpha(a+\delta)$.

Далее нам нужно показать существование предела $\lim\limits_{t \to a+\delta^-} \alpha'(t)$. Из уравнения (3) поскольку $\alpha - \beta < 0$ получаем $\alpha'' < 0$, то есть производная $\alpha'(t)$ является убывающей функцией и $\alpha'(t) > 0$ для всех $t \in [a, a+\delta)$. Это гарантирует существование неотрицательного предела и определяем $\lim\limits_{t \to a+\delta^-} \alpha'(t) = \alpha'(a+\delta) \geqq 0$.

Еще нужно доказать, что $\alpha'(a+\delta) > 0$. Это докажем от противного. Пусть $\alpha'(a+\delta) = 0$. Потом существует полуинтервал $[a+\delta_1, a+\delta)$, $0 < \delta_1 < \delta$ что для всех $t \in [a+\delta_1, a+\delta)$ выполняется неравенство $0 < \alpha'(t) < m \leqq \beta'(t)$ и следовательно $\beta'(t) - \alpha'(t) > 0$ и $\beta(t) - \alpha(t) > 0$. По этой причине функция $\operatorname{cth} [\beta - \alpha]$ положительна м убывающая в полуинтервале $[a+\delta_1, a+\delta)$, а функция $G(t) = \int_{a+\delta_1} \operatorname{cth} [\beta(\sigma) - \alpha(\sigma)]\, d\sigma$ в этом полуинтервале возрастающая. Функцию $G(t)$ можем оценить: $0 \leqq G(t) < G(a+\delta) \leqq (\delta - \delta_1) \operatorname{cth} [\beta(a+\delta_1) - \alpha(a+\delta_1)] = K.$

Интегрированием уравнения (3) получаем

$$\left[\frac{1}{\alpha'(\sigma)}\right]_{a+\delta_1}^{t} = 2G(t), \text{ откуда } \alpha'(t) = \frac{1}{C + 2G(t)}, \text{ где } C = \frac{1}{\alpha'(a+\delta_1)} > 0$$

и потому для всех $t \in [a + \delta_1, a + \delta)$ выполняется неравенство $\alpha'(t) \geqq \dfrac{1}{C + 2K} > 0$, из которого после вычисления одностороннего предела в точке $a + \delta$ получим противоречие к исходному предположению.

Этим мы доказали, что можем продолжать каждое решение $\alpha(t)$ дифференциального уравнения (3), следовательно, и дифференциального уравнения (1) выполняющее начальные условия $\alpha(a) = \alpha_0$, $\alpha'(a) = \alpha_0'$ и определенное в полуинтервале $[a, a + \delta)$ на неограниченный интервал $[a, \infty)$, притом это продолженное решение имеет на интервале $[a, \infty)$ свойства упомянутые в теореме и доказательство окончено.

О ситуации, когда производные фаз α, β одновременно отрицательные, говорится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть функция* $\beta(t) \in C_1([a, \infty))$, $\beta(t) < 0$, $\beta'(t) < 0$, *для всех* $t \in [a, \infty)$, *пусть* α_0, α_0' *произвольные отрицательные числа и пусть* $\beta(a) < \alpha_0$. *Потом дифференциальное уравнение* (1) *имеет одно и только одно решение* $\alpha(t)$ *со свойством* $\alpha(t) \in C_3([a, \infty))$, $\beta(t) < \alpha(t) < 0$, $\alpha'(t) < 0$, *для всех* $t \in [a, \infty)$, *выполняющее начальные условия:* $\alpha(a) = \alpha_0$, $\alpha'(a) = \alpha_0'$.

Доказательство. Положим $\bar{\beta}(t) = -\beta(t)$, $\bar{\alpha}(t) = -\alpha(t)$, $\bar{a}_0 = -\alpha_0$, $\bar{a}_0' = -\alpha_0'$. Легко убедимся в том, что функция $\bar{\beta}(t)$ и числа $\bar{a}_0$, $\bar{a}_0'$ исполняют предположения теоремы 1 и на основании ее утверждения, учитывая, что дифференциальное уравнение $\bar{a}'' = 2\bar{a}'^2 \operatorname{cth} [\bar{a} - \bar{\beta}]$ при $\bar{a} = -\alpha$, $\bar{\beta} = -\beta$ эквивалентное с дифференциальным уравнением (3), то доказательство готово.

Содержанием дальшей теоремы является инвариантность фаз относительно параллельного сдвига.

Теорема 3. *Пусть функция* $\beta(t)$ *и числа* α_0, α_0' *имеют свойства как в теореме 1 или теореме 2. Пусть* $\alpha(t)$ *есть решение дифференциального уравнения* (1), *определенное в интервале* $[a, \infty)$, *выполняющее начальные условия* $\alpha(a) = \alpha_0$, $\alpha'(a) = \alpha_0'$ *и имеет свойства вышеприведенные в теореме 1 или теореме 2. Пусть* k *произвольное число. Потом к функции* $\beta(t) + k$ *существует одно* *и только одно решение $\bar{\alpha}(t)$ дифференциального уравнения* (1), *определенное в интервале* $[a, \infty)$, *выполняющее начальные условия* $\bar{\alpha}(a) = \alpha_0 + k$, $\bar{\alpha}'(a) = \alpha_0'$ *и* $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + k$.

Доказательство получаем из того, что дифференциальное уравнение $\bar{\alpha}'' = 2\bar{\alpha}'^2 \operatorname{cth}[\bar{\alpha} - (\beta + k)]$ при $\bar{\alpha} = \alpha + k$ есть дифференциальным уравнением (3) и из утверждения теоремы 1 или теоремы 2.

Следствием доказанных теорем являются следующие утверждения, которые решают предложенную проблему.

Пусть дана произвольная функция $\beta(t)$, имеющая свойство (β) для всех $t \in [a, \infty)$ и пусть даны числа $\alpha_0' \neq 0$, α_0 такие, что $\alpha_0 < \beta(a)$ или $\alpha_0 > \beta(a)$ в зависимости от того, будет-ли $\operatorname{sgn} \beta'(t) > 0$ или $\operatorname{sgn} \beta'(t) < 0$ и $\operatorname{sgn} \alpha_0' = \operatorname{sgn} \beta'(t)$. Потом существует одна и только одна функция $\alpha(t)$, определенная в интервале $[a, \infty)$, выполняющая $\alpha(a) = \alpha_0, \alpha'(a) = \alpha_0'$ такая, что $\alpha(t)$, $\beta(t)$ по очереди первой и второй фазой некоторой базы u, v решений дифференциального уравнения (q).

Относительно к формуле (2) этот результат можем сформулировать следующим образом:

Если дана произвольная функция $\beta(t)$, имеющая свойство (β) для всех $t \in [a, \infty)$ и числа $\alpha_0' \neq 0$, α_0 такие, что $\alpha_0 < \beta(a)$ или $\alpha_0 > \beta(a)$ в зависимости от того, будет-ли $\operatorname{sgn} \beta'(t) > 0$ или $\operatorname{sgn} \beta'(t) < 0$ и $\operatorname{sgn} \alpha_0' = \operatorname{sgn} \beta'(t)$, потом существует одно и только одно дифференциальное уравнение (q) такое, что функция $\alpha(t)$ выполняющая $\alpha(a) = \alpha_0$, $\alpha'(a) = \alpha_0'$ и функция $\beta(t)$ являются по очереди первой и второй фазой некоторой базы u, v этого дифференциального уравнения.

Вкратце это можно выразить следующим образом:

К произвольной функции $\beta(t)$, имеющей свойство (β) для всех $t \in [a, \infty)$, существует неколеблющее дифференциальное уравнение (q) такое, что функция $\beta(t)$ является его второй гиперболической фазой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] O. **Borůvka**, *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordung*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[2] J. **Krbiľa**, *Vlastnosti fáz neoscilatorických rovníc $y'' = q(t)\,y$ definovaných pomocou hyperbolických polárnych súradníc*. Sborník prací VŠD a VÚD, NADAS Praha 19 (1969) 5—11.

[3] F. **Neuman**, *Construction of second order linear differential equations with solutions of prescribed properties*. Arch. Math. (Brno) 1 (1965) 229—246.

Кафедра математики
Высшее учебное заведение транспорта
Жилина, ЧССР