Oldřich Kopeček

Die arithmetischen Operationen für geordnete Mengen

Archivum Mathematicum, Vol. 4 (1968), No. 3, 157--174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104663

DIE ARITHMETISCHEN OPERATIONEN FÜR GEORDNETE MENGEN

Oldřich Kopeček, Brno

Eingegangen am 30. Jänner 1968

EINLEITUNG

In dieser Arbeit wird eine Definition der sogenannten arithmetischen Operation für geordnete Mengen gegeben, in der alle sechs Grundoperationen (Kardinalsumme, Kardinalprodukt, Kardinalpotenz, Ordinalsumme, Ordinalprodukt und Ordinalpotenz, die G. Birkhoff in [1] definiert hat) als Speziallfälle enthalten sind.

Dabei verallgemeinert diese Operation auch die allgemeineren Operationen der lexikographischen Summe und des lexikographischen Produktes, die M. M. Day in [4] definiert hat.

Weiter bespricht man hier speziell die sogennante Summenoperation, die alle Summen und beide Produkte (Kardinal- und Ordinal-) für zwei geordnete Mengen enthält, und die schon in [5] definiert ist, und die sogenannte Produktoperation, die alle Produkte und beide Potenzen verallgemeinert.

1. HILFSBEGRIFFE UND BEZEICHNUNGEN

Es seien in allen unseren Betrachtungen A, M, M_ι, G usw. geordnete Mengen. Eine beliebige Teilmenge einer gegebenen geordneten Menge werden wir auch als geordnete Menge mit der induzierten Ordnung betrachten. Wenn P, Q zwei Mengen mit Relationen sind, bedeutet $P = Q$, daß die identische Abbildung auf der Menge P ein Isomorphismus von P auf Q ist, und $P \cong Q$, daß ein Isomorphismus von P auf Q existiert.

Wir werden uns immer mit der Situation beschäftigen, daß ein System $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ geordneter Mengen (wo G auch eine geordnete Menge ist) gegeben wird. Speziell werden wir ein System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A, \iota \in G\}$ der Teilmengen einer geordneten Menge A betrachten.

1.1. Definition: Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A, \iota \in G\}$ ein System. Wir definieren darauf eine Relation: für beliebige $\iota_1, \iota_2 \in G$ gilt $M_{\iota_1} \varepsilon M_{\iota_2} \Leftrightarrow a_{\iota_1} \leqq a_{\iota_2}$ für beliebige $a_{\iota_1} \in M_{\iota_1}, a_{\iota_2} \in M_{\iota_2}$, und speziell definieren wir eine strenge Ordnung: für beliebige $\iota_1, \iota_2 \in G$ gilt $M_{\iota_1} < M_{\iota_2} \Leftrightarrow a_{\iota_1} < a_{\iota_2}$ für beliebige $a_{\iota_1} \in M_{\iota_1}, a_{\iota_2} \in M_{\iota_2}$. Wir setzen ferner für beliebige $\iota_1, \iota_2 \in G$ $M_{\iota_1} \leqq M_{\iota_2}$ genau dann, wenn $M_{\iota_1} < M_{\iota_2}$ oder $M_{\iota_1} = M_{\iota_2}$ ist. So difinieren wir auf dem System eine Ordnung und nennen das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A, \iota \in G\}$ *geordnet*.

1.2. Definition: Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein beliebiges System. Dann heißt das System *isoton*, wenn aus $\iota_1 < \iota_2$ stets $M_{\iota_1} \varepsilon M_{\iota_2}$ folgt.

Es seien ferner A, G (geordnete) Mengen, $T \subseteq G$. Eine Abbildung der Menge T in A bezeichnen wir mit x_T: $T \to A$. Wenn speziell $T = G$ ist, dann bezeichnen wir die zugehörige Abbildung ohne einen Index; $x : G \to A$; wenn $T = \{\iota\}$ für $\iota \in G$ ist, dann bezeichnen wir die zugehörige Abbildung mit $x_\iota : \{\iota\} \to A$. Es sei ferner $U \subseteq T$ beliebig. Dann setzen wir $x_T(U) = \{x_T(\iota) \mid \iota \in U\}$.

1.3. Bezeichnung: Es seien x: $G \to A$, y: $G \to A$ beliebige Abbildungen. Dann setzen wir:

$$\begin{aligned} G^{\Delta}(x, y) &= \{\iota \mid \iota \in G,\ x(\iota) \neq y(\iota)\}, \\ G^{=}(x, y) &= G - G^{\Delta}(x, y), \\ G^{\leqq}(x, y) &= \{\iota \mid \iota \in G,\quad x(\iota) \leqq y(\iota)\}, \\ G^{<}(x, y) &= G^{\leqq}(x, y) \cap G^{\Delta}(x, y). \end{aligned}$$

Diese Mengen sind Teilmengen der Menge G.

Zerlegungen

Bemerkung: Es sei G eine Menge und es sei $\mathbf{G}$ eine Zerlegung auf der Menge G. Wenn wir das System aller Klassen T dieser Zerlegung als das geordnete System $\{T \mid T \subseteq G,\ T \in \mathbf{G}\}$ betrachten, sprechen wir über die *geordnete Zerlegung* $\mathbf{G}$.

1.4. Bezeichnung: Es seien x: $G \to A$, y: $G \to A$ beliebige Abbildungen und es sei $\mathbf{G}$ eine beliebige Zerlegung auf der Menge G. Wir setzen (analog zu der Bezeichnung 1.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{\Delta}(x, y) &= \{T \mid T \in \mathbf{G}, \text{ ein } \iota \in T \text{ existiert so, daß } x(\iota) \neq y(\iota)\}, \\ \mathbf{G}^{=}(x, y) &= \mathbf{G} - \mathbf{G}^{\Delta}(x, y), \\ \mathbf{G}^{\leqq}(x, y) &= \{T \mid T \in \mathbf{G},\ x(\iota) \leqq y(\iota) \text{ gilt für alle } \iota \in T\}, \\ \mathbf{G}^{<}(x, y) &= \mathbf{G}^{\leqq}(x, y) \cap \mathbf{G}^{\Delta}(x, y)\}. \end{aligned}$$

Diese Mengen sind Teilmengen der Menge $\mathbf{G}$.

1.5. Definition: Es sei $\mathbf{G}$ eine Zerlegung auf der Menge G und es sei $H \subseteq G$ beliebig. Dann unter der *Durchdringung* der Zerlegung $\mathbf{G}$ und der Menge H verstehen wir (nach dem Buch [3], in dem die Grundlagen der Theorie von Zerlegungen enthalten sind) die Menge $\{T \cap H \mid T \in \mathbf{G},\ T \cap H \neq \emptyset\}$ und bezeichnen sie mit $\mathbf{G} \sqcap H$.

1.6. Definition: Es sei G eine Menge und es seien $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}'$ zwei beliebige

Zerlegungen auf der Menge G. Dann schreiben wir $\mathbf{G} \preceq \mathbf{G}' \Leftrightarrow$ für beliebiges $T \in \mathbf{G}$ existiert ein $U \in \mathbf{G}'$ so, daß $T \subseteq U$ ist.

Bemerkung: Die Relation $\preceq$ ist auf der Menge aller Zerlegungen auf der Menge G eine Ordnung. Die Menge aller Zerlegungen auf der Menge G bildet einen vollständigen Verband mit dem kleinsten Element $\mathbf{G}_{\min} = \{\{\iota\} \mid \iota \in G\}$ und mit dem größten Element $\mathbf{G}_{\max} = \{G\}$.

1.7. Definition: Es sei $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathcal{G}$ eine solche Zerlegung auf der Menge G, daß folgendes gilt: für beliebige $\iota_1, \iota_2 \in G$ liegen ι_1 und ι_2 in derselben Klasse $I \in \mathcal{G} \Leftrightarrow M_{\iota_1} = M_{\iota_2}$. Dann heißt $\mathcal{G}$ die durch das System $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ auf der Menge G erklärte *Faktorzerlegung*.

Wenn $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ ein solches System ist, daß $\mathcal{G} = \mathbf{G}_{\min}$ für die zugehörige Faktorzerlegung $\mathcal{G}$ gilt, dann nennen wir das System *einfach*.

2. DIE ARITHMETISCHE OPERATION AUF GEORDNETEN MENGEN

Wir betrachten ein System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A, \ \iota \in G\}$. Es sei $\mathbf{G}$ eine beliebige Zerlegung auf der Menge G. Die allgemeine Klasse der Zerlegung $\mathbf{G}$ bezeichnen wir mit T, die allgemeine Klasse der durch das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A, \ \iota \in G\}$ auf der Menge G erklärten Faktorzerlegung $\mathcal{G}$ bezeichnen wir mit I. Ferner ist $\mathcal{G} \sqcap T$ die durch das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A, \ \iota \in T\}$ auf der Menge $T \in \mathbf{G}$ erklärte Faktorzerlegung. Dann definieren wir die artihmetische Operation für das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A, \ \iota \in G\}$ mit der Zerlegung $\mathbf{G}$ folgendermaßen:

2.1. Definition: Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A, \ \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathcal{G}$ die durch das System auf der Menge G erklärte Faktorzerlegung. Es sei $\mathbf{G}$ eine beliebige geordnete Zerlegung auf der Menge G. Sei $\bigcirc_{\iota \in G}^{A, \mathbf{G}} M_\iota$ die Menge $\bigcup_{T \in \mathbf{G}} X_T$, wo X_T die Menge aller isotonen Abbildungen $x_T : T \to A$ mit der Eigenschaft $x_T \in \bigtimes_{\iota \in T} M_\iota$ ist, und es sei die Relation auf der Menge $\bigcirc_{\iota \in G}^{A, \mathbf{G}} M_\iota$ in folgender Weise definiert: für beliebige $x_{T_1}, y_{T_2} \in \bigcup_{T \in \mathbf{G}} X_T$ gilt

$x_{T_1} \leqq y_{T_2} \Leftrightarrow T_1 = T_2$ und für beliebiges $I \cap T_1 \in (\mathcal{G} \sqcap T_1)^{\Delta}(x_{T_1}, y_{T_1})$ existiert $I' \cap T_1 \leqq I \cap T_1$[1]) so, daß $I' \cap T_1 \in (\mathcal{G} \sqcap T_1)^{<}(x_{T_1}, y_{T_1})$ ist oder

[1]) $\leqq$ ist die in der Definition 1. 1 eingeführte Ordnung.

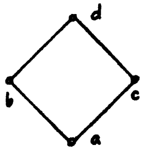
$T_1 < T_2$, in $\mathcal{G} \sqcap T_1$, $\mathcal{G} \sqcap T_2$ existieren minimale Elemente und $x_{T_1}(I \cap T_1) \leqq y_{T_2}(I' \cap T_2)$[1]) gilt in A für alle minimalen Elemente $I \cap T_1 \in \mathcal{G} \sqcap T_1$ und für alle minimalen Elemente $I' \cap T_2 \in \mathcal{G} \sqcap T_2$.

Dann heißt $\overset{A,\mathbf{G}}{\underset{\iota \in G}{\bigcirc}} M_\iota$ die *arithmetische Operation.*

Es ergibt sich nun die Frage, ob die auf diese Weise auf der Menge $\bigcup_{T \in \mathbf{G}} X_T$ definierte Relation eine Ordnung ist oder nicht. Im Falle, daß sie im allgemeinen keine Ordnung ist, wollen wir dazu Bedingungen bestimmen. Die Antwort auf diese Frage geben wir im Absatz 6.

2.2. Beispiel: Wir wählen ein System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ folgendermaßen:

G: 

; A: 

; $\{M_1, M_2, M_3\}$:

$M_1 = \{a, c\}, M_2 = M_3 = \{b, d\}$. Es sei ferner $\mathbf{G} = \{T_1, T_2\} : T_1 = \{1, 2\}$, $T_2 = \{3\}$. Wir sehen, daß $\mathcal{G} = \{I, I'\} : I = \{1\}, I' = \{2, 3\}$. Die Mengen X_{T_1}, X_{T_2} geben wir durch folgende Tabellen an:

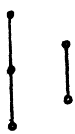
X_{T_1}:

	1	2 ;
x_{T_1}	a	b
y_{T_1}	a	d
z_{T_1}	c	d

X_{T_2}:

	3.
x_{T_2}	b
y_{T_2}	d

Also ist $\overset{A,\mathbf{G}}{\underset{\iota \in G}{\bigcirc}} M_\iota$ die Menge $X_{T_1} \cup X_{T_2} = \{x_{T_1}, y_{T_1}, z_{T_1}, x_{T_2}, y_{T_2}\}$. Weiter ist mit Rücksicht auf $T_1 \parallel T_2$ und auf die Ordnung der Zerlegung $\{T_1 \cap I, T_1 \cap I', T_2 \cap I'\}$, wo $T_1 \cap I = \{1\}$, $T_1 \cap I' = \{2\}$, $T_2 \cap I' = \{3\}$ gilt, $y_{T_1} > x_{T_1}$, $z_{T_1} > x_{T_1}$, $z_{T_1} > y_{T_1}$, $y_{T_2} > x_{T_2}$ die Relation auf der Menge $X_{T_1} \cup X_{T_2}$. Im ganzen hat die Menge $\overset{A,\mathbf{G}}{\underset{\iota \in G}{\bigcirc}} M_\iota$ folgendes

Diagram: 

[1]) $\leqq$ ist die in der Definition 1. 1 eingeführte Ordnung.

2.3. Beispiel: Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein solches System, daß $M_\iota = M$ für jedes $\iota \in G$ gilt. Es sei $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\max}$. Dann ist auch $\mathscr{G} = \mathbf{G}_{\max}$ und es gilt $\overset{A,\{G\}}{\underset{\iota \in G}{\bigcirc}} M_{(\iota)} = M^G$, wo M^G die Kardinalpotenz ist.

In den folgenden drei Absätzen werden wir uns mit einfacheren Operationen auf den geordneten Mengen beschäftigen und zwar mit der Summen- und der Produktoperation.

3. DIE SUMME

3.1. Definition: Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein System. Sei $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ die Menge aller geordneten Paare $(\iota,\ a_\iota)$, wo $\iota \in G$, $a_\iota \in M_\iota$, auf welcher die Relation auf folgende Weise definiert wird: für beliebige $(\iota_1,\ a_{\iota_1})$, $(\iota_2,\ b_{\iota_2}) \in \sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ gilt

$$(\iota_1,\ a_{\iota_1}) \leqq (\iota_2,\ b_{\iota_2}) \Leftrightarrow \iota_1 \leqq \iota_2 \text{ und } a_{\iota_1} \leqq b_{\iota_2} \text{ in } A.$$

Dann heißt $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ die *Summe.*[1])

3.2. Satz: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ *ein System. Dann gilt die Formel* $\overset{A,\mathbf{G}_{\min}}{\underset{\iota \in G}{\bigcirc}} M_\iota \simeq \sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$.

Beweis: Im Falle $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\min}$ ist die Menge $\overset{A,\mathbf{G}}{\underset{\iota \in G}{\bigcirc}} M_\iota$ die Vereinigung der Mengen X_ι, wo X_ι die Menge aller Abbildungen $x_\iota : \{\iota\} \to M_\iota$ ist. Also ist $M_\iota = \{x_\iota(\iota) \mid x_\iota \in X_\iota\}$. Dann, falls wir $\varphi(x_\iota) = (\iota,\ x_\iota(\iota))$ setzen, bekommen wir eine bijektive Abbildung φ: $\overset{A,\mathbf{G}}{\underset{\iota \in G}{\bigcirc}} M_\iota \to \sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$. Offenbar gilt: für beliebige $x_{\iota_1},\ y_{\iota_2} \in \overset{A,\mathbf{G}}{\underset{\iota \in G}{\bigcirc}} M_\iota$ ist $x_{\iota_1} \leqq y_{\iota_2} \Leftrightarrow$ entweder gilt $\iota_1 = \iota_2$ und aus $x_{\iota_1}(\iota_1) \neq y_{\iota_1}(\iota_1)$ folgt $x_{\iota_1}(\iota_1) < y_{\iota_1}(\iota_1)$ oder ist $\iota_1 < \iota_2$ und es gilt $x_{\iota_1}(\iota_1) \leqq y_{\iota_2}(\iota_2)$; insgesamt ist also $\iota_1 \leqq \iota_2$ und $x_{\iota_1}(\iota_1) \leqq y_{\iota_2}(\iota_2)$, was mit $(\iota_1,\ x_{\iota_1}(\iota_1)) \leqq (\iota_2,\ y_{\iota_2}(\iota_2))$ gleichbedeutend ist.

Die Operation der Summe betrachtet man näher in [5]. Wenn wir für ein System $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ die lexikographische Summe mit $\sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ und

---

[1]) In der Arbeit [5] haben wir diese Menge die allgemeine Kardinalsumme genannt, weil auf ihr die „Kardinalrelation" erklärt ist.

für zwei Mengen G, M die Kardinalprodukt mit $G\,.\,M$ bezeichnen, dann gilt folgender

3.3. Satz: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ *ein System. Dann gilt die Formel*

a) $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota = \sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *genau dann, wenn das System isoton ist,*

b) $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota = G\,.\,M$ *genau dann, wenn eine Menge* M *so existiert, daß* $M_\iota = M$ *für alle* $\iota \in G$ *gilt.*

3.4. Beispiel: Es sei G eine Menge und es sei $\mathbf{G}$ eine geordnete Zerlegung auf der Menge G. Dann gilt die Formel $\sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{G} T = \sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} T$.

Die Operation $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ verallgemeinert also (sieh [5]) alle Grundoperationen der Summe und des Kardinal- und Ordinalproduktes für zwei geordnete Mengen.

Das assoziative Gesetz der Summe

3.5. Satz: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ *ein System und es sei* $\mathbf{G}$ *eine (geordnete) Zerlegung auf der Menge* G*, daß die Formel* $G \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} T$ *gilt. Es sei fernerhin das System* $\{\bigcup\limits_{\iota \in T} M_\iota \mid T \in \mathbf{G}\}$ *isoton. Dann gilt die Formel*

$$\sum_{\iota \in G}^{A} M_\iota \cong \sum_{T \in \mathbf{G}}^{l} \sum_{\iota \in T}^{A} M_\iota .$$

Der Beweis und Folgerungen mit speziellen Formeln sind in [5].

3.6. Folgerung: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ *ein solches System, daß* $G \cong \sum\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} I$ *für die durch das System erklärte (geordnete) Faktorzerlegung* $\mathcal{G}$ *gilt. Es sei das System* $\{\bigcup\limits_{\iota \in I} M_\iota \mid I \in \mathcal{G}\}$ *isoton. Wir setzen* $M_\iota = M_I$ *für jedes* $\iota \in I$*. Dann gilt die Formel* $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota \cong \sum\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} I\,.\,M_I$.

Bemerkung

Allgemeine Operationen der Summe kann man klar auf mehrere Weisen definieren. Die Folgerung 3.6 zeigt uns eine Methode, die die Möglichkeit gibt, daß wir eine Operation, die die lexikographische Summe und das Kardinalprodukt für zwei geordnete Mengen ohne die

Voraussetzung über die Existenz einer geordneter Übermenge aller M_ι verallgemeinert, definieren können.

Definition: Es sei $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathcal{G}$ die durch das System erklärte Faktorzerlegung. Wir setzen $M_\iota = M_I$ für jedes $\iota \in I$. Dann nennen wir die Menge $\sum\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} I \,.\, M_I$ die *allgemeine lexikographische Summe*.

Satz: a) *Wenn für ein System* $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ $M_\iota = M$ *für jedes* $\iota \in G$ *gilt, dann gilt* $\sum\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} I \,.\, M_I \cong G \,.\, M$.

b) *Wenn das System einfach ist, dann gilt* $\sum\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} I \,.\, M_I \cong \sum\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$.

Aus der Folgerung 3.6 folgt

Satz: *Die Operation* $\sum\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} I \,.\, M_I$ *ist ein Spezialfall der Operation* $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$.

Hilfssätze

Die folgenden speziellen Hilfsätze benutzen wir im Absatz 5. Die Beweise sind trivial.

3.7. Lemma: *Es sei* G *eine Menge,* $\mathbf{G}$ *sei eine solche (geordnete) Zerlegung auf der Menge* G, *daß* $G \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} T$ *gilt. Sei* $H \subseteq G$ *beliebig. Dann gilt* $H \cong \sum\limits_{T \cap H \in \mathbf{G} \sqcap H}^{l} T \cap H$.

3.8. Lemma: *Es sei* G *eine Menge, es sei* $\mathbf{G}'$ *eine beliebige geordnete Zerlegung auf der Menge* G *und es sei* $\mathbf{G}$ *eine solche (geordnete) Zerlegung auf der Menge* G, *daß* $\mathbf{G} \geq \mathbf{G}'$ *und die Formel* $G \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} T$ *gilt. Dann gilt die Formel* $\mathbf{G}' \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} (\mathbf{G}' \sqcap T)$.

3.9. Lemma: *Es sei* G *eine Menge und es sei* $\mathbf{G}$ *eine solche (geordnete) Zerlegung auf der Menge* G, *daß* $G \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} T$ *gilt; es seien* $T \in \mathbf{G}$ *minimal und* $\iota \in T$ *beliebig. Dann ist* ι *minimal in* T *genau dann, wenn* ι *minimal in* G *ist.*

4. DAS PRODUKT

4.1. Definition: Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathcal{G}$ die durch das System erklärte geordnete Faktorzerlegung. Sei $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ die Menge aller isotonen Abbildungen $x\colon G \to A$ mit der Eigenschaft

$x \in \mathop{\mathsf{X}}_{\iota \in G} M_\iota$, auf welcher die Relation auf folgende Weise definiert wird: für beliebige $x, y \in \prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ ist

$x \leqq y \Leftrightarrow$ für beliebiges $I \in \mathscr{G}^{\Delta}(x, y)$ existiert ein $I_1 \leqq I$ so, daß $I_1 \in \mathscr{G}^{<}(x, y)$ ist.

Dann heißt $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ das *Produkt*.[1])

4.2. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathbf{G}$ eine solche geordnete Zerlegung auf der Menge G, daß $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\max}$ gilt. Dann gilt die Formel* $\mathop{\bigcirc}\limits_{\iota \in G}^{A,\, \mathbf{G}_{\max}} M_\iota = \prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$.

In der Tat, beide Mengen in der oben angeführten Formel besitzen dieselben Elemente. Da G ferner die einzige Klasse der Zerlegung $\mathbf{G}$ ist, sind auch die beiden Relationen gleich.

4.3. Bemerkung: Es sei $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ ein System und es sei M eine Menge. Unter dem Kardinalprodukt $\prod\limits_{\iota \in G} M_\iota$, der Kardinalpotenz M^G, dem Ordinalprodukt $\prod\limits_{\iota \in G}^{o} M_\iota$, der Ordinalpotenz ${}^G M$ und dem lexikographischen Produkt $\prod\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ verstehen wir die in [1] und [4] eingeführten Operationen. (Beim Ordinalprodukt $\prod\limits_{\iota \in G}^{o} M_\iota$ setzen wir voraus, daß G eine Kette ist.) Die Relationen auf diesen Mengen haben also folgende Bedeutung: für beliebige $x, y \in \prod\limits_{\iota \in G} M_\iota$ oder $x, y \in M^G$ gilt $x \leqq y \Leftrightarrow G = G^{\leqq}(x, y)$; für beliebige $x, y \in \prod\limits_{\iota \in G}^{o} M_\iota$ oder $x, y \in \prod\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ oder $x, y \in {}^G M$ gilt $x \leqq y \Leftrightarrow$ für beliebiges $\iota \in G^{\Delta}(x, y)$ existiert ein $\iota_1 \leqq \iota$ so, daß $\iota_1 \in G^{<}(x, y)$ ist.

4.4. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein einfaches isotones System. Dann gilt die Formel* $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota = \prod\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$.

Beweis: Mit Rücksicht darauf, daß $M_{\iota_1} \varepsilon M_{\iota_2}$ aus $\iota_1 < \iota_2$ folgt, besitzen beide Mengen aus der oben angeführten Formel dieselben Elemente. Ferner gilt mit Rücksicht darauf, daß das System einfach ist: für beliebiges $\{\iota\} \in \mathscr{G}^{\Delta}(x, y)$ existiert ein $\{\iota_1\} \leqq \{\iota\}$ so, daß $\{\iota_1\} \in \mathscr{G}^{<}(x, y)$ ist, genau dann, wenn $\iota \in G^{\Delta}(x, y)$, $\iota_1 \leqq \iota$ und $\iota_1 \in G^{<}(x, y)$ ist.

---

[1]) Mit dem Symbol $\overset{A}{\Pi}$ haben wir in [5] das sogenannte allgemeine Kardinalprodukt bezeichnet. Aber diese Operation ist mit der in 4.1 erklärten Operation nicht identisch.

4.5. Folgerung: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ *ein einfaches System.*

(a) *Wenn* G *eine Gegenkette ist, dann gilt* $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota = \prod\limits_{\iota \in G} M_\iota$.

(b) *Wenn das System isoton ist und wenn* G *eine Kette ist, dann gilt die Formel* $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota = \prod\limits_{\iota \in G}^{o} M_\iota$.

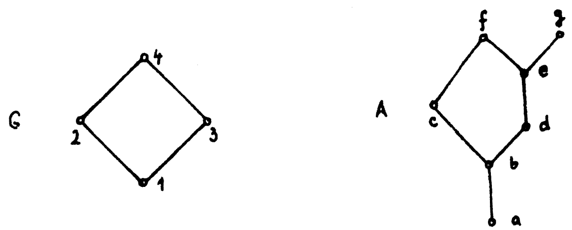
(c) *Wenn das System isoton ist und wenn* $M_\iota \cong M$ *für jedes* $\iota \in G$ *gilt, dann gilt die Formel* $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota \cong {}^{G}M$.

4.6. Satz: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota = M \subseteq A,\ \iota \in G\}$ *ein System. Dann gilt die Formel* $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota = M^G$.

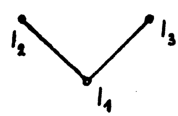
Beweis: Beide Mengen aus der Formel haben dieselben Elemente; die Relationen sind auch gleich, denn $\mathscr{G} = \mathbf{G}_{\max} = \{G\}$ gilt und so: $G \in \mathscr{G}^{<}(x, y)$ folgt aus $G \in \mathscr{G}^{\Delta}(x, y)$ genau dann, wenn $G = G^{=}(x, y) \cup \cup G^{<}(x, y)$ gilt (und dabei gilt $G \in \mathscr{G}^{=}(x, y)$ genau dann, wenn $G = = G^{=}(x, y)$ ist).

Also verallgemeinert die Operation $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ im ganzen alle Grundoperationen des Produkts und der Kardinal- und Ordinalpotenz.

4.7. Beispiel: Es seien M, G folgende geordnete Mengen:



Wir wählen ein System von Untermengen $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ wie folgt: $M_1 = \{a, b, c\}$, $M_2 = M_4 = \{f, g\}$, $M_3 = \{d, e\}$. Die durch das System auf der Menge G erklärte Faktorzerlegung ist $\mathscr{G} = \{I_1, I_2, I_3\}$, wo $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2, 4\}$, $I_3 = \{3\}$ sind und sie hat folgendes Diagram:



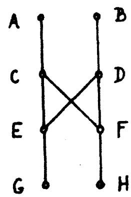
Die Menge aller isotonen Abbildungen $x\colon G \to A$ mit der Eigenschaft $x \in \bigtimes_{\iota \in G} M_\iota$ schreiben wir in die Tabelle ein:

	1	2	3	4
A	b	f	e	f
B	b	g	e	g
C	b	f	d	f
D	b	g	d	g
E	a	f	e	f
F	a	g	e	g
G	a	f	d	f
H	a	g	d	g

Die Menge dieser Abbildungen ist folgendermaßen geordnet:

$A \parallel B,\ A > C,\ A \parallel D,\ A > E,\ A > F,\ A > G,\ A > H,$
$B \parallel C,\ B > D,\qquad B > E,\ B > F,\ B > G,\ B > H,$
$C \parallel D,\qquad C > E,\ C > F,\ C > G,\ C > H,$
$D > E,\ D > F,\ D > G,\ D > H,$
$E \parallel F,\ E > G,\ E \parallel H,$
$F \parallel G,\ F > H$
$G \parallel H.$

Also hat die Menge $\prod_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ folgendes Diagram:



4.8. Beispiel: Es sei G eine Menge und es sei $\mathbf{G}$ eine beliebige geordnete Zerlegung auf der Menge G. Dann gilt die Formel $\prod_{T \in \mathbf{G}}^{G} T = \prod_{T \in \mathbf{G}}^{l} T$.

5. DAS ASSOZIATIVE GESETZ DES PRODUKTES

Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathscr{G}$ die durch das System auf der Menge G erklärte Faktorzerlegung. Wir bezeichnen $\mathscr{G}' = \{I \in \mathscr{G} \mid$ ein $\iota \in I$ existiert so, daß card $M_\iota \geqq 2$ ist$\}$.

---

[1]) D. h., daß für beliebiges $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{G}'$ ein minimales Element in $\mathscr{H}$ existiert.

5.1. Lemma: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein System mit der goerdneten Faktorzerlegung $\mathscr{G}$. Wenn die Menge $\mathscr{G}'$ die Minimalbedingung*[1]) *erfüllt und wenn $x,\ y \in \prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ beliebig sind, dann gilt $x < y \Leftrightarrow$ für ein beliebiges in $\mathscr{G}^\Delta(x, y)$ minimales Element I ist $I \in \mathscr{G}^<(x, y)$.*

Beweis: Es sei $x < y$; dann ist $\mathscr{G}^\Delta(x, y) \neq 0$ und mit Rücksicht auf die Inklusion $\mathscr{G}^\Delta(x, y) \subseteq \mathscr{G}'$ erfüllt $\mathscr{G}^\Delta(x, y)$ die Minimalbedingung. Es sei $I \in \mathscr{G}^\Delta(x, y)$ ein beliebiges minimales Element in $\mathscr{G}^\Delta(x, y)$, dann muß $I_1 \leqq I$ so existieren, daß $I_1 \in \mathscr{G}^<(x, y)$ gilt; es ist aber $\mathscr{G}^<(x, y) \subseteq$ $\subseteq \mathscr{G}^\Delta(x, y)$ (und I ist ein minimales Element in $\mathscr{G}^\Delta(x, y)$), sodaß $I_1 = I$ gilt; also ist $I \in \mathscr{G}^<(x, y)$.

Es sei umgekehrt jedes minimale Element von $\mathscr{G}^\Delta(x, y)$ ein Element von $\mathscr{G}^<(x, y)$. Es sei weiter $I_0 \in \mathscr{G}^\Delta(x, y)$ beliebig; dann existiert ein minimales Element $I_1 \in \mathscr{G}^\Delta(x, y)$ so, daß $I_1 \leqq I_0$ ist; dabei ist aber $I_1 \in \mathscr{G}^<(x, y)$; also gilt $x < y$.

5.2. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathscr{G}$ die durch das System auf der Menge G erklärte Faktorzerlegung. Es sei $\mathbf{G}$ eine solche geordnete Zerlegung auf der Menge G, daß $\mathscr{G} \preceq \mathbf{G}$ und $G \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} T$ ist. Wenn $\mathscr{G}'$ die Minimalbedingung erfüllt und wenn das System $\{\bigcup\limits_{\iota \in T} M_\iota \mid T \in \mathbf{G}\}$ isoton ist, dann gilt die Formel*

$$\prod_{\iota \in G}^{A} M_\iota \cong \prod_{T \in \mathbf{G}}^{l} \prod_{\iota \in T}^{A} M_\iota .$$

Beweis: Es sei $x \in \prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ beliebig; x ist eine isotone Abbildung $G \to A$ mit der Eigenschaft $x \in \mathop{\times}\limits_{\iota \in G} M_\iota$. Für beliebiges $T \in \mathbf{G}$ existiert also genau eine Teilabbildung x_T: $T \to A$, die isoton ist und die Eigenschaft $x_T \in \mathop{\times}\limits_{\iota \in T} M_\iota$ hat. Also ist $x_T \in \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$. Wir setzen $X(T) = x_T$ für alle $T \in \mathbf{G}$; also ist X: $\mathbf{G} \to \bigcup\limits_{T \in \mathbf{G}} \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$ und diese Abbildung hat auch die Eigenschaft $X \in \mathop{\times}\limits_{T \in \mathbf{G}} \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$; darum gilt $X \in \prod\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$. Wenn wir $X = \varphi(x)$ setzen, bekommen wir die Abbildung φ: $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota \to \prod\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$.

Diese Abbildung ist surjektiv: Es sei $X \in \prod\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$ beliebig; also ist X: $\mathbf{G} \to \bigcup\limits_{T \in \mathbf{G}} \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$ eine solche Abbildung, daß $X(T) \in \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$ für alle $T \in \mathbf{G}$ ist. Wir setzen $x_T = X(T)$; x_T ist also eine isotone Abbildung $T \to A$, für die $x_T \in \mathop{\times}\limits_{\iota \in T} M_\iota$ gilt. Für die Menge von Abbildungen $\{x_T \mid T \in \mathbf{G}\}$ existiert genau eine gemeinsame Fortsetzung $x\colon G \to A$, für die $x \in \mathop{\times}\limits_{\iota \in G} M_\iota$ gilt. Wir zeigen, daß sie auch isoton ist. Es seien $\iota_1, \iota_2 \in G$ solche Elemente, daß $\iota_1 < \iota_2$ ist und es sei $\iota_1 \in T_1$, $\iota_2 \in T_2$; wenn $T_1 = T_2$ gilt, dann ist $x(\iota_1) = x_{T_1}(\iota_1)$, $x(\iota_2) = x_{T_1}(\iota_2)$ und mit Rücksicht auf die Isotonie der Abbildung x_{T_1} ist $x(\iota_1) \leqq x(\iota_2)$; wenn $T_1 \neq T_2$ gilt, dann ist mit Rücksicht auf die Ordnung der Zerlegung $\mathbf{G}$ $T_1 < T_2$ und also $x_{T_1}(T_1) \varepsilon\, x_{T_2}(T_2)$ mit Rücksicht auf die Isotonie des Systems $\{\bigcup\limits_{\iota \in T} M_\iota \mid T \in \mathbf{G}\}$; also ist $x_{T_1}(\iota_1) \leqq x_{T_2}(\iota_2)$. Daraus folgt, daß $x(\iota_1) \leqq x(\iota_2)$ ist, also gilt $x \in \prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$. Für beliebiges $X \in \prod\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$ haben wir $x \in \prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ so gefunden, daß $X = \varphi(x)$ ist. Ferner ist es leicht zu sehen, daß φ injektiv also eine bijektive Abbildung ist.

Wir beweisen jetzt die beiderseitige Isotonie der Abbildung φ. Wir werden Elemente x, $y \in \prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ und $X = \varphi(x)$, $Y = \varphi(y)$ betrachten. Zuerst zeigen wir folgendes: Mit Rücksicht auf die Bedingungen $\mathbf{G} \precsim \mathcal{G}$, $G \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} T$ und nach Lemma 3.8 gilt $\mathcal{G} \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}}^{l} (\mathcal{G} \sqcap T)$. Dabei ist $\mathcal{G}^{\Delta}(x, y) \subseteq \mathcal{G}$ und nach Lemma 3.7 gilt $\mathcal{G}^{\Delta}(x, y) \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}_1}^{l} (\mathcal{G} \sqcap T) \cap \cap\, \mathcal{G}^{\Delta}(x, y)$, wo $\mathbf{G}_1 = \{T \mid T \in \mathbf{G}, (\mathcal{G} \sqcap T) \cap \mathcal{G}^{\Delta}(x, y) \in (\mathcal{G} \sqcap T) \sqcap \sqcap\, \mathcal{G}^{\Delta}(x, y)\}$ ist. Wir bemerken, daß $\mathcal{G} \sqcap T$ die Faktorzerlegung für das Produkt $\prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$ (für beliebiges $T \in \mathbf{G}$) ist. Für beliebiges $T \in \mathbf{G}$ gilt also $(\mathcal{G} \sqcap T) \cap \mathcal{G}^{\Delta}(x, y) = (\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x_T, y_T)$, wo $x_T = X(T)$, $y_T = Y(T)$, x_T, $y_T \in \prod\limits_{\iota \in T}^{A} M_\iota$ für betrachtete $X = \varphi(x)$, $Y = \varphi(y)$ ist. Ferner gilt für $\mathbf{G}^{\Delta}(X, Y) = \{T \mid T \in \mathbf{G}, X(T) \neq Y(T)\}$ (sieh die Bezeichnung 1.3) die Beziehung $\mathbf{G}^{\Delta}(X, Y) = \mathbf{G}_1$. Im ganzen bekommen wir also die Formel $\mathcal{G}^{\Delta}(x, y) \cong \sum\limits_{T \in \mathbf{G}^{\Delta}(X, Y)}^{l} (\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x_T, y_T)$.

Es sei nun $x < y$ in $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ (denn es ist trivial, daß $x = y$ genau dann, wenn $X = Y$ ist). Es sei ferner T ein minimales Element in $\mathbf{G}^{\Delta}(X, Y)$. (Ein solches Element existiert, denn die Minimalbedingung für $\mathbf{G}' = \{U \in \mathbf{G} \mid \operatorname{card} \prod\limits_{\iota \in U}^{A} M_\iota \geq 2\}$ folgt aus dieser Bedingung für $\mathcal{G}'$; für jedes $U \in \mathbf{G}'$ exist nämlich ein $I \in \mathcal{G}'$ mit $I \subseteq U$.) Dann ist nach Lemma 3.9 ein beliebiges in $(\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x_T, y_T)$ minimales Element auch minimal in $\mathscr{G}^{\Delta}(x, y)$. Also gilt für dieses Element I (nach Lemma 5.1) $I \in \mathscr{G}^{<}(x, y)$ und so ist $I \in (\mathscr{G} \sqcap T)^{<}(x_T, y_T)$; daraus folgt $x_T < y_T$ (nach Lemma 5.1). Da das minimale Element T in $\mathbf{G}^{\Delta}(X, Y)$ beliebig war, haben wir $X < Y$ nach Lemma 5.1 (für den Fall des lexikographischen Produktes).

Es sei umgekehrt $X < Y$ in $\prod_{T \in \mathbf{G}}^{l} \prod_{\iota \in T}^{A} M_\iota$; dann ist $\mathbf{G}^{\Delta}(X, Y) \neq 0$ und nach Lemma 5.1 gilt $T \in \mathbf{G}^{<}(X, Y)$ für jedes in $\mathbf{G}^{\Delta}(X, Y)$ minimale T. Also gilt $X(T) < Y(T)$, das heißt $x_T < y_T$ für jedes minimale $T \in \mathbf{G}^{\Delta}(X, Y)$. Also ist $I \in (\mathscr{G} \sqcap T)^{<}(x_T, y_T)$ für alle in $(\mathscr{G} \sqcap T)^{\Delta}(x_T, y_T)$ minimalen I und für alle in $\mathbf{G}^{\Delta}(X, Y)$ minimalen T (nach 5.1). Aber mit Rücksicht auf die Formel $\mathscr{G}^{\Delta}(x, y) \cong \sum_{T \in \mathbf{G}^{\Delta}(X, Y)}^{l} (\mathscr{G} \sqcap T)^{\Delta}(x_T, y_T)$ existiert zu jedem in $\mathscr{G}^{\Delta}(x, y)$ minimalen I ein in $\mathbf{G}^{\Delta}(X, Y)$ minimales T so, daß $I \in (\mathscr{G} \sqcap T)^{\Delta}(x_T, y_T)$ ist. Also ist nach Lemma 3.9 dieses Element I minimal in $(\mathscr{G} \sqcap T)^{\Delta}(x_T, y_T)$ und so gilt $I \in (\mathscr{G} \sqcap T)^{<}(x_T, y_T)$. Daraus folgt endlich $I \in \mathscr{G}^{<}(x, y)$ (denn $(\mathscr{G} \sqcap T)^{<}(x_T, y_T) \subseteq \mathscr{G}^{<}(x, y)$ ist) und so gilt $x < y$.

Die Abbildung φ ist also ein Isomorphismus.

5.3. Folgerung: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ *ein einfaches isotones System und es sei* $\mathbf{G}$ *eine solche geordnete Zerlegung auf der Menge* G, *daß* $G \cong \sum_{T \in \mathbf{G}}^{l} T$ *gilt. Wenn* $G' = \{\iota \mid \iota \in G,\ \text{card}\, M_\iota \geqq 2\}$ *die Minimalbedingung erfüllt, dann gilt* $\prod_{\iota \in G}^{l} M_\iota = \prod_{T \in \mathbf{G}}^{l} \prod_{\iota \in T}^{l} M_\iota$. *Es sei speziell* $M_\iota \cong M$ *für alle* $\iota \in G$; *dann gilt* ${}^{G}M \cong \prod_{T \in \mathbf{G}}^{l} {}^{T}M$ *und also gilt* ${}^{\sum_{T \in \mathbf{G}}^{l} T}M \cong \prod_{T \in \mathbf{G}}^{l} {}^{T}M$.

Ähnliche spezielle Formeln bekommen wir leicht auch für die Kardinal- und Ordinalprodukte.

5.4. Folgerung: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ *ein solches System, daß* $G \cong \sum_{I \in \mathscr{G}}^{l} I$ *für die Faktorzerlegung* $\mathscr{G}$ *mit Rücksicht auf das System gilt. Es sei das System* $\{\bigcup_{\iota \in I} M_\iota \mid I \in \mathscr{G}\}$ *isoton. Wenn* $\mathscr{G}'$ *die Minimalbedingung erfüllt und wenn wir* $M_\iota = M_I$ *für alle* $\iota \in I$ *setzen, dann gilt die Formel* $\prod_{\in G}^{A} M_\iota \cong \prod_{I \in \mathscr{G}}^{l} M_I^I$.

Bemerkung

Allgemeine Operationen des Produkts kann man klar auf mehrere Weisen definieren. Die Folgerung 5.4 zeigt uns eine Methode, die die

Möglichkeit gibt, daß wir eine Operation, die das lexikographische Produkt und die Kardinalpotenz ohne die Voraussetzung über die Existenz einer geordneten Übermenge aller M_ι verallgemeinert, definieren können.

Definition: Es sei $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathcal{G}$ die durch das System auf der Menge G erklärte Faktorzerlegung. Wir bezeichnen $M_\iota = M_I$ für jedes $\iota \in I$. Dann nennen wir die Menge $\prod\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} M_I^I$ das *allgemeine lexikographische Produkt.*

Satz: a) Sei $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ *ein solches System, daß* $M_\iota = M$ *für jedes* $\iota \in G$ *gilt. Dann gilt es* $\prod\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} M_I^I \cong M^G$.

b) *Wenn das System einfach ist, dann gilt* $\prod\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} M_I^I \cong \prod\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$.

Aus 5.4 folgt

Satz: *Die Operation* $\prod\limits_{I \in \mathcal{G}}^{l} M_I^I$ *ist ein Spezialfall der Operation* $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$.

6. DIE GRUNDEIGENSCHAFTEN DER ARITHMETISCHEN OPERATION

Bisher haben wir uns nicht mit der Frage beschäftigt, ob die Relation in der Definition 2.1 eine Ordnung ist; und wenn sie eine solche nicht ist, unter welchen Bedingungen sie zu einer Ordnung wird. Aus der Arbeit [4] wissen wir, daß ein lexikographisches Produkt im allgemeinen keine geordnete Menge ist, und so ist das Ergebnis einer arithmetischen Operation im allgemeinen auch keine geordnete Menge mit Rücksicht auf die Sätze 4.2 und 4.4. Wir geben nun hinreichende Bedingungen, unter welchen die Relation in 2.1 eine Ordnung ist.

Wenn $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein System, $\mathcal{G}$ die durch das System erklärte Faktorzerlegung und $T \subseteq G$ beliebig sind, dann ist $\mathcal{G} \sqcap T$ offenbar die durch das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in T\}$ (auf der Menge T) erklärte Faktorzerlegung. Wir setzen noch $(\mathcal{G} \sqcap T)'' = \{I \cap T \mid I \cap T \in \in \mathcal{G} \sqcap T,\ M_{I \cap T}$ ist keine Gegenkette$\}$, wo $M_{I\cap T}$ der gemeinsame Wert M_ι für beliebiges $\iota \in I \cap T$ ist.

6.1. Lemma: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ *ein System und es sei* $\mathcal{G}$ *die durch das System erklärte Faktorzerlegung. Es sei* $\mathbf{G}$ *eine geordnete Zerlegung auf der Menge* G. *Wenn* $T \in \mathbf{G}$ *beliebig ist und wenn die Menge* $(\mathcal{G} \sqcap T)''$ *die Minimalbedingung erfüllt, dann ist die Menge* $X_T \subseteq \mathop{\bigcirc}\limits_{\iota \in G}^{A,\mathbf{G}} M_\iota$ (sieh 2.1) *geordnet.*

Beweis:[1]) Wir beweisen zuerst die Asymmetrie der Relation auf der Menge X_T. Wir setzen voraus, daß $x < y$ und zugleich $y < x$ gilt. Also $(\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x, y) \neq \emptyset$. Für beliebiges $I \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x, y)$ existiert ein $I_1 \cap T \leqq I \cap T$ so, daß $I_1 \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{<}(x, y)$ ist. Da natürlich $I_1 \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x, y)$ ist, muß ein $I_2 \cap T < I_1 \cap T$ so existieren, daß $I_2 \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{<}(y, x)$ gilt. So setzen wir fort und konstruieren eine unendliche abnehmende Kette $I_1 \cap T > I_2 \cap T > \ldots$. Dabei gilt natürlich $I_n \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)''$ für jedes n und mit Rücksicht darauf, daß die Kette $\{I_n \cap T\}_{n=1,2,\ldots}$ kein minimales Element hat, bekommen wir einen Widerspruch mit der Minimalbedingung für $(\mathcal{G} \sqcap T)''$. Die Relation ist also asymmetrisch. Wir beweisen nun die Transitivität dieser Relation; wir setzen voraus, daß $x \leqq y$, $y \leqq z$ gilt. Wenn $x = z$ ist, sind wir fertig. Es sei also $x \neq z$; dann ist $(\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x, z) \neq \emptyset$. Es sei $I \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x, z)$; dann gilt entweder $I \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x, y)$ oder $I \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(y, z)$. Es sei z. B. $I \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(x, y)$. Dann gibt es ein $I_1 \cap T \leqq I \cap T$ so, daß $I_1 \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{<}(x, y)$ gilt. Wenn nun $I_1 \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{=}(y, z)$ ist, sind wir fertig. Es sei umgekehrt $I_1 \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{\Delta}(y, z)$. Dann existiert ein $I_2 \cap T \leqq I_1 \cap T$ so, daß $I_2 \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{<}(y, z)$ gilt. Wenn nun $I_2 \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{=}(x, y)$ ist, sind wir fertig. Im negativen Fall setzen wir wieder fort. Da aber $\{I_n \cap T\} \subseteq (\mathcal{G} \sqcap T)''$ ist, bricht dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten ab (es gibt ein minimales Element dieser Menge); also gibt es ein $I_m \cap T \leqq I \cap T$ so, daß $I_m \cap T \in (\mathcal{G} \sqcap T)^{<}(x, z)$ gilt. Daraus folgt, daß $x < z$ gilt; also ist die gegebene Relation auf der Menge X_T eine Ordnung.

6.2. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathbf{G}$ eine beliebige geordnete Zerlegung auf der Menge G. Wenn die Mengen $(\mathcal{G} \sqcap T)''$ die Minimalbedingung für jedes $T \in \mathbf{G}$ erfüllen, dann ist $\bigcirc_{\iota \in G}^{A,\mathbf{G}} M_\iota$ eine geordnete Menge.*

Beweis: Wir beweisen die Asymmetrie der Relation; es sei umgekehrt $x_{T_1} < y_{T_2}$ und zugleich $x_{T_1} > y_{T_2}$. Daraus folgt $T_1 \leqq T_2$, $T_2 \leqq T_1$ und so $T_1 = T_2$. Also $x_{T_1} < y_{T_1}$, $x_{T_1} > y_{T_1}$ ist und das ist nach Lemma 6.1 nicht möglich. Die Relation ist asymmetrisch. Wir beweisen jetzt die Transitivität der Relation: es sei $x_{T_1} \leqq y_{T_2}$, $y_{T_2} \leqq z_{T_3}$. Daraus folgt, daß $T_1 \leqq T_2$, $T_2 \leqq T_3$ und also $T_1 \leqq T_3$ ist. Wenn $T_1 = T_3$ gilt, dann ist $T_1 = T_2 = T_3$ und wir sind mit Rücksicht auf 6.1 fertig. Es sei umgekehrt $T_1 < T_3$; dann tritt einer von den folgenden Fällen ein: $T_1 = T_2 < T_3$, $T_1 < T_2 = T_3$, $T_1 < T_2 < T_3$. Wir betrachten den ersten Fall. Dann gilt $y_{T_2}(I \cap T_2) \leqq z_{T_3}(I' \cap T_3)$ für alle minimalen Elemente $I \cap T_2 \in \mathcal{G} \sqcap T_2$ und für alle minimalen Elemente $I' \cap T_3 \in$

[1]) Die Methode des Beweises wird z. B. in [6] benützt.

$\in \mathscr{G} \sqcap T_3$. Ferner ist aber $T_1 = T_2$ und $I \cap T_2 \in (\mathscr{G} \sqcap T_2)^{\leqq}(x_{T_2}, y_{T_2})$ gilt für ein beliebiges minimales Element $I \cap T_2 \in \mathscr{G} \sqcap T_2$ (das gilt mit Rücksicht auf die Minimalität von $I \cap T_2$ in $\mathscr{G} \sqcap T_2$). Daraus folgt aber, daß $x_{T_2}(I \cap T_2) \leqq z_{T_3}(I' \cap T_2)$ für alle minimalen Elemente $I \cap T_2 \in \mathscr{G} \sqcap T_2$ und für alle minimalen Elemente $I' \cap T_3 \in \mathscr{G} \sqcap T_3$ gilt. Im ganzen ist also $x_{T_2} < z_{T_3}(T_1 = T_2)$, denn es gilt zugleich $T_1 < T_3$. Der zweite Fall läßt sich in ähnlicher Weise erledigen. Wenn der dritte Fall eintritt, dann gilt $x_{T_1}(I \cap T_1) \leqq y_{T_2}(I' \cap T_2)$ für alle minimalen Elemente $I \cap T_1 \in \mathscr{G} \sqcap T_1$ und für alle minimalen Elemente $I' \cap T_2 \in \in \mathscr{G} \sqcap T_2$ und ferner gilt $y_{T_2}(I' \cap T_2) \leqq z_{T_3}(I'' \cap T_3)$ für alle minimalen Elemente $I' \cap T_2 \in \mathscr{G} \sqcap T_2$ und für alle minimalen Elemente $I'' \cap T_3 \in \in \mathscr{G} \sqcap T_3$. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Ordnung der Menge A, daß $x_{T_1}(I \cap T_1) \leqq z_{T_3}(I'' \cap T_3)$ für alle minimalen Elemente $I \cap T_1 \in \in \mathscr{G} \sqcap T_1$ und für alle minimalen Elemente $I'' \cap T_3 \in \mathscr{G} \sqcap T_3$ gilt. Im ganzen ist also $x_{T_1} < z_{T_3}$, denn es gilt auch $T_1 < T_3$. Die gegebene Relation ist also eine Ordnung.

6.3. Folgerung: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein System.*

a) *Dann ist $\sum\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ eine geordnete Menge.*

b) *Es sei $\mathscr{G}$ die durch das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ erklärte Faktorzerlegung. Wenn $\mathscr{G}''$ die Minimalbedingung erfüllt, dann ist $\prod\limits_{\iota \in G}^{A} M_\iota$ eine geordnete Menge.*

6.4. Folgerung: *Es sei $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ ein System und es sei M eine (geordnete) Menge.*

a) *Die Menge $\prod\limits_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ist geordnet, wenn die Menge $G'' = \{\iota \mid \iota \in G,\ M_\iota$* ist keine Gegenkette$\}$ *die Minimalbedingung erfüllt.*

b) *Die Menge M^G ist geordnet.*

Aus [4] und [6] wissen wir, daß die Bedingung der Folgerung 6.4 a) auch notwendig ist. Die Bedingung im Satz 6.2 ist aber zu stark und ist also nur hinreichend.

Bemerkung

Offensichtlich können wir auch andere arithmetische Operationen auf den geordneten Mengen definieren, die immer eine Summe und das entsprechende Produkt verallgemeinern.

Definition: Es sei $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ ein System und es sei $\mathbf{G}$ eine beliebige geordnete Zerlegung auf der Menge G. Sei $\bigcirc\limits_{\iota \in G}^{\mathbf{G}\,l} M_\iota$ die Menge

$\bigcup_{T \in \mathbf{G}} \bigtimes_{\iota \in T} M_\iota$ und sei die Relation auf der Menge $\bigcirc^{l\,\mathbf{G}}_{\iota \in G} M_\iota$ auf folgende Weise definiert: für beliebige $x_{T_1},\ y_{T_2} \in \bigcup_{T \in \mathbf{G}} \bigtimes_{\iota \in T} M_\iota$ gilt

$$x_{T_1} \leqq y_{T_2} \Leftrightarrow T_1 = T_2 \text{ und für beliebiges } \iota_0 \in T_1^{\Delta}(x_{T_1}, y_{T_1}) \text{ existiert ein } \iota_1 \leqq \iota_0 \text{ so, daß } \iota_1 \in T_1^{<}(x_{T_1}, y_{T_1}) \text{ ist oder } T_1 < T_2 \text{ ist.}$$

Dann nennen wir $\bigcirc^{l\,\mathbf{G}}_{\iota \in G} M_\iota$ die *lexikographische Operation.*

Definition: Wenn G eine Gegenkette (Kette) in der letzten Definition ist, nennen wir die lexikographische Operation die *Kardinaloperation (Ordinaloperation)* und bezeichnen sie mit $\bigcirc^{\mathbf{G}}_{\iota \in G} M_\iota$ $(\bigcirc^{o\,\mathbf{G}}_{\iota \in G} M_\iota)$.

Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq A,\ \iota \in G\}$ ein einfaches isotones System. Dann gilt die Formel* $\bigcirc^{A,\mathbf{G}}_{\iota \in G} M_\iota = \bigcirc^{l\,\mathbf{G}}_{\iota \in G} M_\iota$.

Satz: *Es gelten die folgenden Formeln*

a) *für die lexikographische Operation*:

$$\bigcirc^{l\,\mathbf{G}_{\min}}_{\iota \in G} M_\iota \cong \sum_{\iota \in G}{}^{l} M_\iota, \quad \bigcirc^{l\,\mathbf{G}_{\max}}_{\iota \in G} M_\iota = \prod_{\iota \in G}{}^{l} M_\iota,$$

$$\bigcirc^{l\,\mathbf{G}_{\min}}_{\iota \in G} M_\iota \cong G \circ M_\iota, \quad \textit{wenn } M = M \textit{ für jedes } \iota \in G \textit{ ist;}$$

$$\bigcirc^{l\,G_{\max}}_{\iota \in G} M_\iota = {}^{G}M, \quad \textit{wenn } M_\iota = M \textit{ für jedes } \iota \in G \textit{ ist;}$$

b) *für die Kardionaloperation*:

$$\bigcirc^{\mathbf{G}_{\min}}_{\iota \in G} M_\iota \cong \sum_{\iota \in G} M_\iota, \quad \bigcirc^{\mathbf{G}_{\max}}_{\iota \in G} M_\iota = \prod_{\iota \in G} M_\iota;$$

c) *für die Ordinaloperation*:

$$\bigcirc^{o\,\mathbf{G}_{\min}}_{\iota \in G} M_\iota \cong \sum_{\iota \in G}{}^{o} M_\iota \quad \bigcirc^{o\,\mathbf{G}_{\max}}_{\iota \in G} M_\iota = \prod_{\iota \in G}{}^{o} M_\iota.$$

6.5. Beispiel: Es sei $G = 2$ (die zweielementige Gegenkette) oder $G = \mathbf{2}$ (die zweielementige Kette). Wir betrachten ein beliebiges System $\{M_1, M_2 \mid M_1, M_2 \subseteq A,\ 1, 2 \in G\}$, wo A eine (geordnete) Menge ist. Die Menge aller Zerlegungen auf der Menge G ist das Paar der Zerlegungen $\mathbf{G}_{\min} = \{\{1\}, \{2\}\}$ und $\mathbf{G}_{\max} = \{G\}$.

I. Es sei $M_1 \neq M_2$; dann gilt $\mathscr{G} = \mathbf{G}_{\min}$ für die durch das System auf der Menge G erklärte Faktorzerlegung $\mathscr{G}$.

1. Wir wählen ferner $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\min}$.

a) Es sei $G = 2$. Dann gilt $\bigcirc^{A,\mathbf{G}}_{\iota \in 2} M_\iota \cong M_1 + M_2$.

b) Es sei $G = \mathbf{2}$ und es sei $\{M_1, M_2 \mid M_1, M_2 \subseteq A\}$ das isotone System. Dann gilt $\bigcirc_{\iota \in \mathbf{2}}^{A, \mathsf{G}} M_\iota \cong M_1 \oplus M_2$.

c) Es sei neben den Bedingungen a) resp. b) weiter $M_1 \cong M_2$ erfüllt. Dann gilt $\bigcirc_{\iota \in 2}^{A, \mathsf{G}} M_\iota \cong 2 \circ M_1$, resp. $\bigcirc_{\iota \in \mathbf{2}}^{A, \mathsf{G}} M_\iota \cong \mathbf{2} \circ M_1$.

2. Wir wählen nun $\mathsf{G} = \mathsf{G}_{\max}$.

a) Es sei $G = 2$. Dann gilt $\bigcirc_{\iota \in 2}^{A, \mathsf{G}} M_\iota = M_1 \,.\, M_2$.

b) Es sei $G = \mathbf{2}$. Dann gilt $\bigcirc_{\iota \in 2}^{A, \mathsf{G}} M_\iota = M_1 \circ M_2$.

c) Es sei neben den Bedingungen a) resp. b) weiter $M_1 \cong M_2$ erfüllt. Dann gilt $\bigcirc_{\iota \in 2}^{A, \mathsf{G}} M_\iota \cong {}^2M$ resp. $\bigcirc_{\iota \in 2}^{A, \mathsf{G}} M_\iota \cong {}^2M$.

II. Es sei umgekehrt $M_1 = M_2 = M$; dann $\mathscr{G} = \mathsf{G}_{\max}$ für die durch das System auf der Menge G erklärte Faktorzerlegung $\mathscr{G}$. Wir setzen $A = M$.

1. Wir wählen weiter $\mathsf{G} = \mathsf{G}_{\min}$.
Es sei $G = 2$ resp. $G = \mathbf{2}$. Dann gilt die Formel $\bigcirc_{\iota \in 2}^{M, \mathsf{G}} M_\iota = 2 \,.\, M$ resp. die Formel $\bigcirc_{\iota \in \mathbf{2}}^{M, \mathsf{G}} M_\iota = \mathbf{2} \,.\, M$.

2. Wir wählen endlich $\mathsf{G} = \mathsf{G}_{\max}$.
Es sei $G = 2$ resp. $G = \mathbf{2}$, dann gilt $\bigcirc_{\iota \in 2}^{M, \mathsf{G}} M_\iota = M^2$ resp. $\bigcirc_{\iota \in \mathbf{2}}^{M, \mathsf{G}} M_\iota = M^{\mathbf{2}}$.

So haben wir durch alle möglichen Kombinationen von Zerlegungen G, $\mathscr{G}$ auf der Menge $G = 2$ resp. $G = \mathbf{2}$ und durch die geeignete Wahl einer Übermenge A alle möglichen Grundoperationen für zwei Mengen (auch mit ihren „Randfällen") bekommen.

LITERATUR

[1] G. **Birkhoff**, *Lattice Theory*, rev. ed., New York, 1948.
[2] G. **Birkhoff**, *Generalized arithmetic*, Duke Math. Journ. 9 (1942), 283—302.
[3] O. **Borůvka**, *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.
[4] M. M. **Day**, *Arithmetic of ordered systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 1—43.
[5] O. **Kopeček**, *Allgemeine Kardinaloperationen*, Archivum math. T 3 (1967) 35—44.
[6] V. **Novák**, *On the lexicographic product of ordered sets*, Czech. Math. Journ. T 15 (1960), 270—282.

Mathematisches Institut
J. E. Purkyně Universität, Brno