Karel Svoboda

Sur la déformation projective des pseudocongruences complètement focales. I

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 2, 83--98

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104633`

SUR LA DÉFORMATION PROJECTIVE DES PSEUDOCONGRUENCES COMPLÈTEMENT FOCALES. I.

PAR KAREL SVOBODA (BRNO)

Présenté le 3 Avril 1967

Ce Mémoire est consacré à l'étude de la déformation projective des pseudocongruences complètement focales [1] plongées dans un espace projectif à une dimension quelconque. Il peut être regardé comme une suite aux recherches de notre travail antérieur [2]. Pour cette raison, nous conservons toutes les notions et notations introduites dans le mémoire mentionné.

Les pseudocongruences en question représentent une généralisation immédiate des congruences non-paraboliques de droites. A ce point de vue, on peut s'attendre à ce que les recherches relatives aux pseudocongruences présenteront quelques traits communs avec la théorie des congruences de droites, développée dans les travaux de A. Švec [3], [4].

1. Soit P_N ($N \geqq 2n - 1$, $n \geqq 3$) un espace projectif à N dimensions et L une pseudocongruence complètement focale [1] engendrée par le $(n - 1)$ - plan S dépendant, de manière analytique, de n paramètres $u^1, \ldots, u^n$. En négligeant des questions de réalité nous admettons que $(u^1, \ldots, u^n) \in C^n$.

A une génératrice quelconque $S \in L$, nous faisons correspondre un repère mobile formé de $N + 1$ points analytiques linéairement indépendants A_I de manière que $S = [A_1 \ldots A_n]$.[1]) Les équations fondamentales du mouvement infinitésimal du repère et les équations de structure correspondantes ont la forme

$$\mathrm{d}A_I = \sum_J \omega_I^J A_J, \qquad \mathrm{d}\omega_I^J = \sum_K \omega_I^K \wedge \omega_K^J. \tag{1}$$

En normalisant les coordonnées des points A_I en vertu de $[A_1 \ldots A_{N+1}] = 1$ on a en outre

$$\sum_J \omega_J^J = 0. \tag{2}$$

Il a été démontré dans [2] que l'on peut spécialiser le repère mobile associé à L de manière que

$$\omega_i^{n+j} = 0 \qquad (i \neq j), \tag{3}$$

[1]) On emploie la notation suivante des indices: $I, J, K = 1, \ldots, N + 1$; $A, B = 2n + 1, \ldots, N + 1$; $i, j, k = 1, \ldots, n$; $a, b = 1, \ldots, m$; $r, s = m + 1, \ldots, n$.

$$\omega_i^j = \alpha_i^j \omega_j, \qquad \omega_{n+i}^{n+j} = \beta_i^j \omega_i \qquad (i \neq j), \tag{4}$$

$$\omega_i^A = 0, \qquad \omega_{n+i}^A = m_{n+i}^A \omega_i, \tag{5}$$

les formes

$$\omega_i = \omega_i^{n+i} \tag{6}$$

étant linéairement indépendantes et les équations (5) étant à supprimer dans le cas de $N = 2n - 1$. Les conditions d'intégrabilité du système précédent sont

$$\omega_i \wedge \omega_{n+i}^j + \omega_j \wedge \{d\alpha_i^j + \alpha_i^j(2\omega_j^j - \omega_i^i - \omega_{n+j}^{n+j}) - \sum_k \alpha_i^k \alpha_k^j \omega_k\} = 0, \tag{7}$$

$$\omega_i \wedge \{d\beta_i^j + \beta_i^j(\omega_i^i - 2\omega_{n+i}^{n+i} + \omega_{n+j}^{n+j}) + \sum_k \beta_i^k \beta_k^j \omega_k + \sum_B m_{n+i}^B \omega_B^{n+j}\} -$$
$$- \omega_j \wedge \omega_{n+i}^j = 0 \qquad (i \neq j;\ k \neq i, j)$$

et en outre, dans le cas de $N > 2n-1$,

$$\omega_i \wedge \{dm_{n+i}^A + m_{n+i}^A(\omega_i^i - 2\omega_{n+i}^{n+i} + \omega_A^A) + \sum_j \beta_i^j m_{n+j}^A \omega_j +$$
$$+ \sum_B m_{n+i}^B \omega_B^A\} = 0 \qquad (i \neq j;\ A \neq B). \tag{8}$$

La pseudocongruence considérée L se trouve ainsi définie par le système fermé (3), (4), (5), (7) (8). Dans ce qui suit, nous supposons $\alpha_i^j \neq 0$ $(i \neq j)$ de sorte que les espaces focaux de L sont à n dimensions.

Soit L' une autre pseudocongruence complètement focale dans un espace projectif P'_N. Nous introduisons pour L' les notations analogues à celles employées pour L, en indiquant avec des accents toutes les expressions relatives à L', et supposons que L' soit définie par le système des équations qui s'obtiennent de (3), (4), (5), (7), (8) de la manière indiquée, les formes indépendantes ω'_i de L' étant données par les relations analogues à (6). Pour abréger, nous posons

$$\tau_I^J = \omega'^J_I - \omega_I^J. \tag{9}$$

Considérons une correspondance biunivoque $C: L \to L'$ $(CS = S')$ entre les génératrices $S \in L$ et $S' \in L'$. Une telle correspondance peut être déterminée par un système d'équations de la forme

$$\omega'_i = \sum_j \lambda_i^j \omega_j \tag{10}$$

à condition que $\det|\lambda_i^j| \neq 0$. On dit que C est *développable* si elle porte chaque variété développable [1] de L dans une développable contenue dans L'. Dans ce cas, on a $\lambda_i^j = 0$ $(i \neq j)$, $\lambda_i^i \neq 0$ et on obtient, par différentiation extérieure de (10),

$$\omega_i \wedge \{d\lambda_i^i + \lambda_i^i(\tau_{n+i}^{n+i} - \tau_i^i)\} = 0 \tag{11}$$

de sorte qu'il est possible de choisir les repères associés à L et L' de manière que $\lambda_i^i = 1$. Les équations (10) prennent, en vertu de (9), la forme

$$\tau_i^{n+i} = 0 \tag{12}$$

et elles entraînent, d'après (11),

$$\tau_{n+i}^{n+i} - \tau_i^i = f_i \omega_i . \tag{13}$$

Une correspondance $C : L \to L'$ s'appelle *déformation projective d'ordre* k si, pour chaque couple des génératrices correspondantes $S \in L$ et $S' \in L'$, il existe au moins une homographie $K : P_N \to P'_N$ jouissant de la propriété que KL et L' ont en S' un contact analytique d'ordre k. On dit dans ce cas que K réalise la déformation projective C.

Dans ce qui suit, nous allons chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour la déformation projective d'ordre $k = 1,2$. Une homographie K réalisant la déformation projective C d'ordre $k = 1$ resp. $k = 2$ sera appelée *homographie tangente* resp. *osculatrice* à C.

2. Soit $C : L \to L'$ une correspondance quelconque. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que C soit une déformation projective du premier ordre consistent dans l'existence d'une homographie $K : P_N \to P'_N$ et d'une forme de Pfaff ϑ de manière que

$$K[A_1 \dots A_n] = [A'_1 \dots A'_n], \tag{14}$$

$$K d[A_1 \dots A_n] = d[A'_1 \dots A'_n] + \vartheta[A'_1 \dots A'_n]. \tag{15}$$

Supposons que $C : L \to L'$ soit une déformation projective du premier ordre et qu'elle soit réalisée par une homographie K:

$$KA_I = \sum_J c_I^J A'_J, \qquad \det| c_I^J | \neq 0. \tag{16}$$

La condition (14) donne immédiatement

$$c_i^A = 0, \qquad C = \det | c_i^j | = 1. \tag{17}$$

On a maintenant pour L

$$\begin{aligned} d[A_1 \dots A_n] = (\sum_i \omega_i^i)[A_1 \dots A_n] + \\ + \sum_i \omega_i[A_1 \dots A_{i-1} A_{n+i} A_{i+1} \dots A_n] \end{aligned} \tag{18}$$

et une expression analogue pour L'. En laissant de côté les calculs plus détaillés on obtient de (18), en vertu de (16) et (17),

$$(19) \qquad K\mathrm{d}[A_1 \dots A_n] = \sum_i (\omega_i^i + C^{(i)}\omega_i)[A_1' \dots A_n'] +$$

$$+ \sum_i \sum_j (-1)^{i-j} C_i^j \omega_i [A_1' \dots A_{j-1}' (\sum_B c_{n+i}^B A_B') A_{j+1}' \dots A_n'].$$

Pour abréger, nous avons désigné ici par C_i^j le complément de c_i^j dans le déterminant C et par $C^{(i)}$ le déterminant qui résulte de C en y remplaçant les éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne par $c_{n+i}^1, \dots, c_{n+i}^n$. En substituant dans (15) et en comparant les coefficients des sous-espaces particuliers on obtient

$$(20) \qquad \vartheta = \sum_i (C^{(i)}\omega_i - \tau_i^i),$$

$$(21) \qquad \sum_i (-1)^{i-j} C_i^j c_{n+i}^{n+j} \omega_i = \omega_j',$$

$$(22) \qquad \sum_i (-1)^{i-j} C_i^j c_{n+i}^B \omega_i = 0 \qquad (B \neq n + j).$$

Les équations (22) entraînent, en vertu de l'indépendance linéaire des formes ω_i, les relations

$$C_i^j c_{n+i}^B = 0 \qquad (B \neq n + j).$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que $C_1^1 \neq 0$. On a alors $c_{n+1}^B = 0$ $(B \neq n + 1)$ tandis que, d'après la supposition signalée dans (16), $c_{n+1}^{n+1} \neq 0$ ce qui donne $C_1^j = 0$ $(j \neq 1)$. Or, le fait que le déterminant de K est différent de zéro permet d'admettre que $C_2^2 \neq 0$ et de continuer pas à pas de la même façon. Il est donc possible de faire les suppositions $C_i^i \neq 0$ qui ont pour conséquence

$$(23) \qquad c_{n+i}^{n+i} \neq 0, \qquad c_{n+i}^{n+j} = 0 \qquad (i \neq j)$$

et

$$(24) \qquad C_i^j = 0 \qquad (i \neq j).$$

Cela étant, les équations (21) se simplifient en

$$C_i^i c_{n+i}^{n+i} \omega_i = \omega_i'$$

de sorte que la correspondance envisagée $C : L \to L'$ est développable.

Inversement, on vérifie sans peine, en répétant les calculs précédents pour une correspondance $C : L \to L'$ donnée par (12), que chaque correspondance développable est une déformation projective du premier ordre. Alors, nous avons la

Proposition 1. *La correspondance $C : L \to L'$ est une déformation projective du premier ordre si et seulement si C est développable.*

D'après ce qui précède, l'homographie K la plus générale qui réalise la déformation projective C se trouve déterminée par (17), (23), (24). Conformément aux remarques faites au sujet des correspondances développables dans le paragraphe précédent, nous pouvons choisir

$$C_i^i c_{n+i}^{n+i} = 1.$$

En posant

$$c_{n+i}^{n+i} = \varrho_i \tag{25}$$

on a $C_i^i = \varrho_i^{-1}$. Or, en appliquant les propriétés bien connues des déterminants réciproques, on obtient

$$c_i^j = 0 \quad (i \neq j), \qquad c_i^i = \varrho_i, \qquad \varrho_1 \cdots \varrho_n = 1 \tag{26}$$

de sorte que l'homographie K réalisant la déformation C du premier ordre est donnée par

$$\begin{aligned} KA_i &= \varrho_i A_i', \\ KA_{n+i} &= \sum_j c_{n+i}^j A_j' + \varrho_i A_{n+i}', \\ KA_A &= \sum_J c_A^J A_J'. \end{aligned} \tag{27}$$

Il en résulte l'affirmation suivante:

Proposition 2. *Chaque homographie réalisant la déformation projective du premier ordre $C : L \to L'$ porte les foyers et les espaces focaux (espaces tangents des variétés focales) de L dans les foyers et les espaces focaux de L'.*

Passons aux considérations relatives à la déformation du second ordre. Supposons alors que $C : L \to L'$ soit une déformation du premier ordre, réalisée par (27). La correspondance C est une déformation projective du second ordre si et seulement si, pour chaque couple des génératrices correspondantes S et S', il existe une homographie K telle que

$$K\mathrm{d}^2[A_1 \ldots A_n] = \mathrm{d}^2[A_1' \ldots A_n'] + 2\vartheta\, \mathrm{d}[A_1' \ldots A_n'] \pmod{[A_1' \ldots A_n']}, \tag{28}$$

la forme ϑ étant donnée par (20) ou bien

$$\vartheta = \sum_i (\varrho_i^{-1} c_{n+i}^i \omega_i - \tau_i^i). \tag{29}$$

Soit $C : L \to L'$ une déformation projective du second ordre. On obtient pour L, mod $[A_1 \ldots A_n]$,

$$(30)\qquad d^2[A_1 \dots A_n] =$$
$$= \sum_i \{d\omega_i + \omega_i(\omega_{n+i}^{n+i} + \omega_i^i + 2\sum_j \omega_j^j)\}[A_1 \dots A_{i-1}A_{n+i}A_{i+1} \dots A_n] +$$
$$+ \sum_i \sum_j (\omega_i \omega_{n+i}^{n+j} - \omega_j \omega_i^j)[A_1 \dots A_{i-1}A_{n+j}A_{i+1} \dots A_n] +$$
$$+ \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j [A_1 \dots A_{i-1}A_{n+i}A_{i+1} \dots A_{j-1}A_{n+j}A_{j+1} \dots A_n] +$$
$$+ \sum_i \sum_B \omega_i \omega_{n+i}^B [A_1 \dots A_{i-1}A_B A_{i+1} \dots A_n] \qquad (i \neq j)$$

et une relation analogue a lieu pour L'. Faisant usage de (27) on a, mod $[A_1' \dots A_n']$,

$$(31)\qquad K d^2[A_1 \dots A_n] =$$
$$= \sum_i \{d\omega_i + \omega_i(\omega_{n+i}^{n+i} + \omega_i^i + 2\sum_j \omega_j^j) + 2\sum_j \varrho_j^{-1} c_{n+j}^j \omega_i \omega_j +$$
$$+ \sum_B \varrho_i^{-1} c_B^{n+i} \omega_i \omega_{n+i}^B\} [A_1' \dots A_{i-1}' A_{n+i}' A_{i+1}' \dots A_n'] +$$
$$+ \sum_i \sum_j \{\varrho_i^{-1} \varrho_j (\omega_i \omega_{n+i}^{n+j} - \omega_j \omega_i^j) - 2\varrho_i^{-1} c_{n+i}^j \omega_i \omega_j +$$
$$+ \sum_B \varrho_i^{-1} c_B^{n+j} \omega_i \omega_{n+i}^B\} [A_1' \dots A_{i-1}' A_{n+j}' A_{i+1}' \dots A_n'] +$$
$$+ \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j [A_1' \dots A_{i-1}' A_{n+i}' A_{i+1}' \dots A_{j-1}' A_{n+j}' A_{j+1}' \dots A_n'] +$$
$$+ \sum_i \sum_A \sum_B \varrho_i^{-1} c_A^B \omega_i \omega_{n+i}^A [A_1' \dots A_{i-1}' A_B' A_{i+1}' \dots A_n'] \ (i \neq j).$$

En substituant dans (28) et en comparant les coefficients de

$$[A_1' \dots . A_{i-1}' A_{n+i}' A_{i+1}' \dots A_n']$$

on obtient les relations qui conduisent, en vertu de l'indépendance des formes ω_i et d'aprés (5), aux équations

$$(32)\qquad \sum_B c_B^{n+i} m_{n+i}^B - 2c_{n+i}^i = \varrho_i f_i,$$

les fonctions f_i étant définies par (13). D'une manière analogue, la comparaison des coefficients de

$$[A_1' \dots A_{i-1}' A_{n+j}' A_{i+1}' \dots A_n']$$

donne, d'après (4), les relations

$$(33)\qquad \varrho_i \alpha_i'^j = \varrho_j \alpha_i^j \qquad (i \neq j),$$

$$(34) \qquad \varrho_i \beta_i'^j = \varrho_j \beta_i^j + \sum_B c_B^{n+j} m_{n+i}^B \qquad (i \neq j)$$

ainsi que

$$(35) \qquad c_{n+i}^j = 0 \qquad (i \neq j).$$

On a, en outre, les équations

$$(36) \qquad \varrho_i m_{n+i}'^B = \sum_A c_A^B m_{n+i}^A$$

qui résultent de la même façon par comparaison des coefficients des membres résiduels.

Les équations précédentes (32), (33), (34), (35), (36) expriment les conditions nécessaires pour une déformation C du second ordre. Or, on voit facilement qu'elles sont aussi suffisantes. Dans les considériations suivantes, nous discuterons en détail les conditions mentionnées en fonction de la dimension N des espaces P_N et P_N'.

Il est commode de remarquer encore que l'homographie K réalisant la déformation C du second ordre est

$$(37) \qquad \begin{aligned} KA_i &= \varrho_i A_i', \\ KA_{n+i} &= c_{n+i}^i A_i' + \varrho_i A_{n+i}', \\ KA_A &= \sum_J c_A^J A_J', \end{aligned}$$

les coefficients c_{n+i}^i, c_A^{n+i}, c_A^B étant assujetis à remplir les relations (32), (34) et (36).

3. En nous basant sur les résultats du mémoire [2] nous pouvons énoncer, d'après (33), l'affirmation suivante:

Proposition 3. *La correspondance développable $C : L \to L'$ étant une déformation projective du second ordre, elle est une déformation ponctuelle.*

Autrement dit, deux pseudocongruences en déformation projective du second ordre ont le même élément ponctuel. En vue des considérations ultérieures, nous allons démontrer quelques résultats concernant la déformation ponctuelle.

Soit K une homographie tangente à C. Pour simplifier les calculs suivants, nous bornerons le choix de K par la supposition que K porte les droites $[A_i A_{n+i}]$ en $[A_i' A_{n+i}']$ et nous désignerons par K_0 l'homographie en question. La supposition précedente est exprimée par (35) de sorte que l'on a pour K_0 les équations (37).

Soit $C : L \to L'$ une correspondance développable et $c_i : (A_i) \to (A_i')$ la correspondance ponctuelle entre les variétés focales (A_i) et (A_i') des pseudocongruences en question, engendrée, d'une manière évidente, par les génératrices S et S' correspondantes. Nous disons que c_i est induite par C. La correspondance $c_i : (A_i) \to (A_i')$ est une déformation projective du premier ordre si, pour une génératrice S quelconque, il existe une homographie K_0 qui réalise un contact analytique du premier ordre des variétés focales (A_i) et (A_i').

Or, on obtient facilement

$$K_0 A_i = \varrho_i A_i',$$

$$K_0 \mathrm{d}A_i = \varrho_i \mathrm{d}A_i' + \sum_j (\varrho_j \omega_i^j - \varrho_i \omega_i'^j) \qquad (\mathrm{mod}\ A_i').$$

Il en résulte, d'après (4), que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une homographie K_0 réalisant la déformation projective du premier ordre $c_i : (A_i) \to (A_i')$ sont exprimées par les équations (33) avec un indice i choisi d'avance. On en obtient, en vertu des résultats du mémoire [2], la

Proposition 4. *La correpondance développable $C : L \to L'$ est une déformation ponctuelle si et seulement s'il existe une homographie K_0, tangente à C, qui réalise simultanément toutes les déformations projectives du premier ordre $c_i : (A_i) \to (A_i')$.*

Remarquons que le résultat précédent reste valable même dans le cas d'une homographie générale K tangente à C.

Désignons par

$$B_i = (-1)^{i-1}[A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n] \tag{38}$$

les hyperplans linéairement indépendants d'une génératrice quelconque $S \in L$ et par (B_i) les variétés engendrées par B_i. Nous appelerons les B_i *foyers duels* et les (B_i) *variétés focales duelles* de L. Faisant usage de (1), (38) et des relations exprimant le choix considéré du repère associé à L on obtient par un calcul facile

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B_i = {} & \Big(\sum_j \omega_j^j\Big) B_i - \sum_j \omega_j^i B_j + \\ & + \sum_j (-1)^{i-1} \omega_j [A_1 \dots A_{j-1} A_{n+j} A_{j+1} \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n] \qquad (i \neq j). \end{aligned} \tag{40}$$

Soit $C : L \to L'$ une correspondance développable et $\bar{c}_i : (B_i) \to (B_i')$ la correspondance engendrée, d'une manière naturelle, par les génératrices S et S' correspondantes entre les variétés focales duelles (B_i) et (B_i'). Nous disons que $\bar{c}_i : (B_i) \to (B_i)$ est une déformation projective du premier ordre si, pour une génératrice S quelconque, il existe une homographie K_0 qui réalise un contact analytique du premier ordre des variétés focales duelles (B_i) et (B_i').

Un calcul direct montre que

$$K_0 B_i = \varrho_i^{-1} B'_i,$$

$$K_0 \mathrm{d}B_i = \varrho_i^{-1} \mathrm{d}B'_i - \sum_j (\varrho_j^{-1}\omega_j^i - \varrho_i^{-1}\omega_j'^{i}) B'_j \qquad (i \neq j) \qquad (\mathrm{mod}\ B'_i),$$

les ω_j^i étant données par (4). Donc, une homographie K_0 réalisant la déformation projective du premier ordre $\bar{c}_i : (B_i) \to (B'_i)$ existe précisément si les équations

$$\varrho_j \alpha_j'^{i} = \varrho_i \alpha_j^i \qquad (j \neq i) \tag{41}$$

ont lieu pour un indice i choisi d'avance. Alors, nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Proposition 5. *La correspondance développable $C : L \to L'$ est une déformation ponctuelle si et seulement s'il existe une homographie K_0, tangente à C, qui réalise simultanément toutes les déformations projectives du premier ordre $\bar{c}_i : (B_i) \to (B'_i)$.*

Les considérations précédentes nous permettent de faire quelques remarques relatives aux formes invariantes [2]

$$\varphi_{ij} = \alpha_i^j \alpha_j^i \omega_i \omega_j \qquad (i \neq j). \tag{42}$$

On voit, d'après ce qui précède, que, pour un i fixe, $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$ si et seulement si, pour une genératrice S arbitrairement donnée, il existe une homographie K_0 réalisant simultanément les deux déformations du premier ordre $c_i : (A_i) \to (A'_i)$ et $\bar{c}_i : (B_i) \to (B'_i)$. Le résultat en question peut être généralisé d'une façon suivante:

Soient $S_1 = [A_{i_1} \dots A_{i_m}]$ et $S_2 = [A_{i_{m+1}} \dots A_{i_n}]$ $(1 < m < n-1)$ deux sous-espaces complémentaires de $S \in L$, (S_1) et (S_2) les variétés engendrées par S_1 et S_2 si S parcourt L. On obtient sans aucune espèce de difficulté

$$\mathrm{d}S_1 = \sum_a \sum_r \omega_{i_a}^{i_r} [A_{i_1} \dots A_{i_{a-1}} A_r A_{i_{a+1}} \dots A_{i_m}] +$$
$$+ \sum_a \omega_{i_a} [A_{i_1} \dots A_{i_{a-1}} A_{n+i_a} A_{i_{a+1}} \dots A_{i_m}] \qquad (\mathrm{mod}\ S_1),$$

$$\mathrm{d}S_2 = \sum_r \sum_a \omega_{i_r}^{i_a} [A_{i_{m+1}} \dots A_{i_{r-1}} A_a A_{i_{r+1}} \dots A_{i_n}] +$$
$$+ \sum_r \omega_{i_r} [A_{i_{m+1}} \dots A_{i_{r-1}} A_{n+i_r} A_{i_{r+1}} \dots A_{i_n}] \qquad (\mathrm{mod}\ S_2).$$

Cela étant, envisageons les correspondances $C_1 : (S_1) \to (S'_1)$ et $C_2 : (S_2) \to (S'_2)$ induites, d'une manière évidente, par une correspondance développable $C : L \to L'$. On a maintenant, pour une homographie K_0 tangente à C,

$$KS_1 = \varrho_{i_1} \cdots \varrho_{i_m} S_1', \qquad K\mathrm{d}S_1 = \varrho_{i_1} \cdots \varrho_{i_m} \mathrm{d}S_1' +$$

$$+ \sum_a \sum_r \varrho_{i_1} \cdots \varrho_{i_{a-1}} \varrho_{i_{a+1}} \cdots \varrho_{i_m} (\varrho_{i_r} \omega_{i_a}^{i_r} - \varrho_{i_a} \omega_{i_a}^{'i_r}])[A_{i_1}' \ldots A_{i_{a-1}}' A_r' A_{i_{a+1}}' \ldots A_{i_m}']$$

$$(\bmod\ S_1'),$$

$$KS_2 = \varrho_{i_{m+1}} \cdots \varrho_{i_n} S_2', \qquad K\mathrm{d}S_2 = \varrho_{i_{m+1}} \cdots \varrho_{i_n} \mathrm{d}S_2' +$$

$$+ \sum_r \sum_a \varrho_{i_{m+1}} \cdots \varrho_{i_{r-1}} \varrho_{i_{r+1}} \cdots \varrho_{i_n} (\varrho_{i_a} \omega_{i_r}^{i_a} - \varrho_{i_r} \omega_{i_r}^{'i_a}) [A_{i_{m+1}}' \ldots A_{i_{r-1}}' A_a' A_{i_{r+1}}' \ldots A_{i_n}']$$

$$(\bmod\ S_2').$$

Les relations précédentes montrent, d'après (4), qu'une homographie K_0 réalisant simultanément un contact analytique du premier ordre des variétés (S_1), (S_1') et (S_2), (S_2') existe précisément si

$$\varrho_{i_a} \alpha_{i_a}^{'i_r} = \varrho_{i_r} \alpha_{i_a}^{i_r}.$$

Cela nous donne la

Proposition 6. *Soit $C : L \to L'$ une correspondance développable. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une homographie K_0, tangente à C, qui est simultanément tangente aux correspondances C_1 : $(S_1) \to (S_1')$ et C_2 : $(S_2) \to (S_2')$, induites par C, sont exprimées par $\varphi'_{i_a i_r} = \varphi_{i_a i_r}$.*

Le résultat précédent reste valable même dans le cas de $m = 1$. Remarquons encore qu'il est possible de généraliser les propositions 4 et 5 en prennant pour base tous les sous-espaces de S d'une dimension m $(1 < m < n)$ qui peuvent être construits à l'aide des foyers A_i de S.

4. Revenons maintenant aux considérations relatives à la déformation projective du second ordre et laissons de côté le cas des pseudocongruences plongées dans des espaces à $N = 2n - 1$ dimensions, en nous proposant de consacrer un autre mémoire à l'étude plus détaillée du cas en question.

Soit alors $N \geqq 2n$. Avant de passer à la discussion des conditions pour la déformation projective $C : L \to L'$ en fonction de la dimension N nous allons formuler quelques conclusions qui ne dépendent pas du choix de N et qui nous permettent de simplifier les considérations suivantes. On a, avant tout,

$$\mathrm{d}^2 A_i = (\omega_i)^2 \sum_B m_{n+i}^B A_B \qquad (\bmod\ A_1, \ldots, A_{2n}) \tag{43}$$

de sorte que l'espace osculateur du second ordre de la variété focale (A_i) de L se trouve déterminé par les points $A_1, \ldots, A_{2n}, \sum_B m_{n+i}^B A_B$.

Dans ce qui suit, nous allons nous borner au cas exprimé par la supposition que les variétés focales en question soient à $2n$ dimensions. Cela étant, employons le symbole habituel δ pour indiquer une différentiation relative au changement des paramètres secondaires et posons $\omega_I^J(\delta) = e_I^J$. On a ensuite, d'après (7), (8),

$$\delta\alpha_i^j = \alpha_i^j(e_i^i - 2e_j^j + e_{n+j}^{n+j}), \tag{44}$$

$$\delta\beta_i^j = \beta_i^j(2e_{n+i}^{n+i} - e_{n+j}^{n+j} - e_i^i) - \sum_B m_{n+i}^B e_B^{n+j},$$

$$\delta m_{n+i}^A = m_{n+i}^A(2e_{n+i}^{n+i} - e_i^i - e_A^A) - \sum_B m_{n+i}^B e_B^A$$

$$(i \neq j; \quad A \neq B).$$

On en voit, en vertu de la supposition précitée, que l'on peut s'arranger, après avoir fait une particularisation convenable du repère associé à L, qu'on ait

$$\beta_i^j = 0 \qquad (i \neq j). \tag{45}$$

Le repère de L' soit spécialisé d'une façon analogue.

A. Soit $N = 2n$. En vertu de la supposition faite au sujet des variétés focales de L, on a

$$m_{n+i}^{2n+1} = \gamma_i \neq 0. \tag{46}$$

Les relations (44) donnent, en particulier,

$$\delta\gamma_i = \gamma_i(2e_{n+i}^{n+i} - e_i^i - e_{2n+1}^{2n+1})$$

et elles montrent que les γ_i sont des invariants relatifs de L.

On a maintenant, d'aprés (36),

$$\varrho_i\gamma_i' = c_{2n+1}^{2n+1}\gamma_i \tag{47}$$

tandis que les équations qui résultent de (32) et (34) ne bornent que le choix des homographies osculatrices admissibles. En éliminant c_{2n+1}^{2n+1} de (47) on obtient le résultat suivant:

Proposition 7. *La condition nécessaire et suffisante pour que la correspondance développable $C : L \to L'$ soit une déformation projective du second ordre des pseudocongruences plongées dans des espaces projectifs à $2n$ dimensions est l'existence des fonctions ϱ_i $(\varrho_1 \cdots \varrho_n = 1)$ satisfaisant aux équations*

$$\varrho_i\alpha_i'^j = \varrho_j\alpha_i^j, \qquad \varrho_i\frac{\gamma_i'}{\gamma_i} = \varrho_j\frac{\gamma_j'}{\gamma_j} \qquad (i \neq j). \tag{48}$$

Nous allons chercher l'interprétation géométrique des conditions (47).

Pour cela, désignons par P_N^* l'espace projectif duel à P_N et introduisons les repères formés par les hyperplans

$$(49) \qquad E^I = (-1)^I[A_1 \dots A_{I-1}A_{I+1} \dots A_{N+1}]$$

où $[A_I, E^J] = \delta_I^J$. Les équations fondamentales du repère ponctuel étant données par (1), celles du repère hyperplanaire sont évidemment

$$(50) \qquad \mathrm{d}E^I = -\sum_J \omega_J^I E^J .$$

Il est aisé de voir que E^{2n+1} est l'espace tangent de L le long de la génératrice S et qu'il décrit dans P_{2n}^* une variété à n dimensions que nous désignerons par L^*. Faisant usage de (50), on a, en respectuant la spécialisation du repère associé à L,

$$(51) \qquad \mathrm{d}E^{2n+1} = -\omega_{2n+1}^{2n+1}E^{2n+1} - \sum_i \omega_{n+i}^{2n+1}E^{n+i}.$$

Soit $C : L \to L'$ une correspondance développable et K_0 une homographie tangente à C, donnée par (37). Désignons par $C^* : L^* \to L'^*$ la correspondance engendrée, d'une manière évidente, entre les variétés en question. La correspondance $C^* : L^* \to L'^*$ est une déformation projective du premier ordre si, pour une génératrice S quelconque, il existe une homographie K_0 qui réalise un contact analytique du premier ordre des variétés L^* et L'^*.

En vertu de (37), nous avons, en laissant de côté les calculs détaillés,

$$K_0E^{2n+1} = E'^{2n+1},$$

$$K_0\mathrm{d}E^{2n+1} = \mathrm{d}E'^{2n+1} - \sum_i (c_{2n+1}^{2n+1}\varrho_i^{-1}\omega_{n+i}^{2n+1} - \omega_{n+i}'^{2n+1})\, E'^{n+i} \quad (\mathrm{mod}\ E'^{2n+1}),$$

les ω_{n+i}^{2n+1} étant données par (5) pour $A = 2n + 1$ et (46). Il en résulte qu'une homographie K_0 réalisant la déformation projective du premier ordre $C^* : L^* \to L'^*$ existe précisément si les équations (47) ont lieu. Cela nous permet de caractériser la déformation projective $C : L \to L'$ de la façon suivante:

Proposition 8. *Soit $N = 2n$. La correspondance développable $C : L \to L'$ est une déformation projective du second ordre si et seulement s'il existe une homographie K_0, tangente à C, qui réalise simultanément les déformations projectives du premier ordre $c_i : (A_i) \to (A_i')$ [ou bien $\bar{c}_i : (B_i) \to (B_i')$] et $C^* : L^* \to L'^*$.*

B. Soit $N = 2n + m - 1$ ($m = 2, \dots, n - 1$). Si L n'est pas plongée dans un sous-espace linéaire de P_N, le système de points $\sum_B m_{n+i}^B\, A_B$ figurant dans (43) doit comprendre précisément m points linéairement indépendants. Sans restreindre la généralité, on peut se limiter, manifestement, au cas donné par la supposition que les points $\sum_B m_{n+a}^B A_B$ soient indépendants. Cela étant, il est possible de spécialiser le repère de L de manière que $\sum_B m_{n+a}^B A_B = \gamma_a A_{2n+a}$. Alors, en tenant compte des suppositions relatives aux variétés focales de L, nous avons

$$(52) \qquad m_{n+a}^{2n+a} = \gamma_a \neq 0, \qquad m_{n+a}^{2n+b} = 0 \qquad (a \neq b).$$

En outre, nous posons

$$(53) \qquad m_{n+r}^{2n+a} = \gamma_r^a \neq 0$$

en nous bornant au cas le plus général. Il est facile à voir que, d'après (44), (52), on a, en particulier,

$$\delta\gamma_a = \gamma_a(2e_{n+a}^{n+a} - e_a^a - e_{2n+a}^{2n+a})$$

et $e_{2n+a}^{2n+b} = 0$ $(a \neq b)$ de sorte que, en vertu de (53), les relations (44) donnent

$$\delta\gamma_r^a = \gamma_r^a(2e_{n+r}^{n+r} - e_r^r - e_{2n+a}^{2n+a}).$$

On en voit que les γ_a et γ_r^a sont des invariants relatifs de L. Le repère de L' soit spécialisé d'une manière analogue.

Les conditions (36) donnent d'une part

$$c_{2n+a}^{2n+b} = 0 \qquad (a \neq b)$$

et de l'autre

$$(54) \qquad \varrho_a\gamma_a' = c_{2n+a}^{2n+a}\gamma_a, \qquad \varrho_r\gamma_r'^a = c_{2n+a}^{2n+a}\gamma_r^a$$

tandis que les équations (32) et (34) ne fournissent que les relations pour les coefficients des homographies osculatrices. Il en résulte par élimination des c_{2n+a}^{2n+a} de (54) la

Proposition 9. *La condition nécessaire et suffisante pour que la correspondance développable $C : L \to L'$ soit und déformation projective du second ordre des pseudocongruences plongées dans des espaces projectifs à $2n + m - 1$ dimensions est l'existence des fonctions $\varrho_i(\varrho_1 \cdots \varrho_n = 1)$ satisfaisant aux équations*

$$(55) \qquad \varrho_i\alpha_i'^j = \varrho_j\alpha_i^j, \qquad \varrho_a\frac{\gamma_a'}{\gamma_a} = \varrho_r\frac{\gamma_r'^a}{\gamma_r^a} = \varrho_s\frac{\gamma_s'^a}{\gamma_s^a} \qquad (i \neq j;\, r \neq s).$$

Nous nous proposons de trouver une caractérisation géométrique des conditions (54). Pour cette raison, considérons la variété L^* engendrée par les espaces tangents le long des génératrices de L. Cette variété apparaît, dans l'espace projectif P_{2n+m-1}^* duel à P_{2n+m-1}, comme un système, dépendant de n paramètres, de sous-espaces linéaires à $m-1$ dimensions

$$F_{m-1} = [E^{2n+1} \dots E^{2n+m}]$$

de P^*_{2n+m-1}. Les équations (50) donnent, en vertu de la spécialisation du repère de L,

$$\mathrm{d}E^{2n+a} = -\omega^{2n+a}_{2n+a}E^{n+a} - \sum_r \omega^{n+a}_{n+r}E^{n+r} \qquad (\mathrm{mod}\ E^{2n+1}, \dots, E^{2n+m})$$

et on en obtient, mod F_{m-1},

$$(56) \qquad \mathrm{d}F_{m-1} = -\sum_a \omega^{2n+a}_{n+a}[E^{2n+1} \dots E^{2n+a-1}E^{n+a}E^{2n+a+1} \dots E^{2n+m}] - \\ - \sum_a \sum_r \omega^{n+a}_{n+r}[E^{2n+1} \dots E^{2n+a-1}E^{n+r}E^{2n+a+1} \dots E^{2n+m}].$$

Soit $C{:}L \to L'$ une correspondance développable et $C^*{:}L^* \to L'^*$ la correspondance induite par C, d'une manière naturelle, entre les espaces tangents des pseudocongruences en question. Nous disons que $C^*{:}L^* \to L'^*$ est une déformation projective du premier ordre si, pour un couple quelconque de génératrices correspondantes de L et L', il existe une homographie K_0 qui réalise un contact analytique du premier ordre des variétés L^* et L'^*.

L'homographie K_0, donnée par (37), porte manifestement les espaces tangents des variétés focales (A_i) dans les espaces tangents des (A'_i). Pour simplifier les calculs suivants, nous restreindrons le choix de K_0 par la supposition $c^{2n+b}_{2n+a} = 0$ $(a \neq b)$ qui exprime que K_0 porte aussi les espaces osculateurs des variétés (A_i) dans ceux des variétés (A'_i). En outre, nous pouvons admettre que le produit des coefficients c^{2n+a}_{2n+a} soit égal à l'unité. Cela étant, on a

$$K_0E^{n+i} = -\sum_a (\varrho_i c^{2n+a}_{2n+a})^{-1} c^{n+i}_{2n+1} E'^{2n+a} + \varrho_i^{-1}E'^{n+i},$$

$$K_0E^{2n+a} = (c^{2n+a}_{2n+a})^{-1}\ E'^{2n+a}$$

et on en obtient

$$K_0F_{m-1} = F'_{m-1}, \qquad K_0\mathrm{d}F_{m-1} = \mathrm{d}F'_{m-1} - \\ - \sum_a (\varrho_a^{-1}c^{2n+a}_{2n+a}\omega^{2n+a}_{n+a} - \omega'^{2n+a}_{n+a})[E'^{2n+1} \dots E'^{2n+a-1}E'^{n+a}E'^{2n+a+1} \dots E'^{2n+m}] - \\ - \sum_a \sum_r (\varrho_r^{-1}c^{2n+a}_{2n+a}\omega^{2n+a}_{n+r} - \omega'^{2n+a}_{n+r})[E'^{2n+1} \dots E'^{2n+a-1}E'^{n+r}E'^{2n+a+1} \dots E'^{2n+m}] \\ (\mathrm{mod}\ F'_{m-1}),$$

les ω^{2n+a}_{n+i} étant données par (5), (52), (53). On en voit qu'une homographie

K_0 réalisant la déformation projective du premier ordre $C^* : L^* \to L'^*$ existe précisément si l'on a (54). Nous avons démontré la

Proposition 10. *Soit* $N = 2n + m - 1$ $(m = 2, \ldots, n - 1)$. *La correspondance développable* $C : L \to L'$ *est une déformation projective du second ordre si et seulement s'il existe une homographie* K_0, *tangente à* C, *qui réalise simultanément les déformations projectives du premier ordre* $c_i : (A_i) \to (A'_i)$ *[ou bien* $\bar{c}_i : (B_i) \to (B'_i)$*] et* $C^* : L^* \to L'^*$.

C. Soit $N \geqq 3n - 1$. Supposons que L ne soit pas plongée dans un sous-espace de P_N. Par conséquant, les points $\sum\limits_B m^B_{n+i} A_B$ sont linéarement indépendants et rien n'empêche de particulariser le repère associé à L de manière que $\sum\limits_B m^B_{n+i} A_B = \gamma_i A_{2n+i}$. Nous avons alors

$$(57) \qquad m^{2n+i}_{n+i} = \gamma_i \neq 0, \qquad m^{2n+j}_{n+i} = 0 \qquad (i \neq j),$$
$$m^L_{n+i} = 0 \qquad (L = 3n + 1, \ldots, N + 1),$$

les équations écrites dans la seconde ligne de (57) étant à supprimer si $N = 3n - 1$. Or, on a en particulier, d'après (44), (57),

$$(58) \qquad \delta\gamma_i = \gamma_i(2e^{n+i}_{n+i} - e^i_i - e^{2n+i}_{2n+i})$$

de sorte que les γ_i sont des invariants relatifs de L. Le repère de L' soit spécialisé d'une manière analogue.

Cela étant, les équations (36) donnent

$$(59) \qquad \varrho_i \gamma'_i = c^{2n+i}_{2n+i} \gamma_i,$$
$$c^{2n+j}_{2n+i} = 0 \qquad (i \neq j), \qquad c^L_{2n+i} = 0$$

et elles n'entraînent, ainsi que (32) et (34), aucune condition pour la déformation $C : L \to L'$. Donc, il ne restent que les conditions **(33)** de sorte que l'affirmation suivante a lieu:

Proposition 11. *La condition nécessaire et suffisante pour que la correspondance développable* $C : L \to L'$ *soit une déformation projective du second ordre des pseudocongruences plongées dans des espaces projectifs à* $N \geqq 3n - 1$ *dimensions est l'existence des fonctions* ϱ_i $(\varrho_1 \cdots \varrho_n = 1)$ *satisfaisant aux équations*

$$(60) \qquad \varrho_i \alpha'^j_i = \varrho_j \alpha^j_i \qquad (i \neq j).$$

Cela étant, on peut compléter, en appliquant les recherches de [2], la proposition 3 de la manière suivante:

Proposition 12. *Soit* $N \geqq 3n - 1$. *La correspondance développable* $C : L \to L'$ *est une déformation projective du second ordre si et seulement si* C *est une déformation ponctuelle.*

En appliquant les résultats des propositions 4 et 5, on obtient la caractérisation suivante de la déformation du second ordre dans le cas considéré:

Proposition 13. *Soit* $N \geqq 3n - 1$. *La correspondance développable* $C : L \to L'$ *est une déformation projective du second ordre si et seulement s'il existe une homographie* K_0, *tangente à* C, *qui réalise simultanément les déformations projectives du premier ordre* $c_i : (A_i) \to (A'_i)$ [*ou bien* $\bar{c}_i : (B_i) \to (B'_i)$].

En terminant, nous allons résumer les relations pour les coefficients des homographies osculatrices K. Pour cela, supposons, sans restreindre la généralité, que les repères mobiles soient choisis de manière que $\gamma_i = \gamma'_i = 1$. Nous avons dans ce cas, d'après (59),

$$c_{2n+i}^{2n+i} = \varrho_i, \qquad c_{2n+i}^{2n+j} = 0 \qquad (i \neq j), \qquad c_{2n+i}^{L} = 0,$$

les dernières équations étant à supprimer si $N = 3n - 1$. En outre, on a, d'après (34), (45),

$$c_{2n+i}^{n+j} = 0 \qquad (i \neq j)$$

de sorte que les équations d'une homographie osculatrice K sont

$$(61) \qquad \begin{aligned} KA_i &= \varrho_i A'_i, \\ KA_{n+i} &= c_{n+i}^{i} A'_i + \varrho_i A'_{n+i}, \\ KA_{2n+i} &= \sum_j c_{2n+i}^{j} A'_j + c_{2n+i}^{n+i} A'_{n+i} + \varrho_i A'_{2n+i}, \\ KA_L &= \sum_J c_L^J A'_J, \end{aligned}$$

à condition d'y ajouter la rémarque précédente. Remarquons encore que les coefficients c_{n+i}^{i} et c_{2n+i}^{n+i} sont liés, en vertu de (32), par les relations

$$(62) \qquad c_{2n+i}^{n+i} - 2c_{n+i}^{i} = \varrho_i f_i,$$

les fonctions f_i étant déterminées par (13).

Nous avons l'intention de continuer, dans la seconde partie de ce mémoire, dans les études relatives à la déformation projective des pseudocongruences en question.

LITÉRATURE

[1] Р. М. Гейдельман-Ю Г. Лумисте: *Геометрия семейств m-мерных плоскостей в n-мерных пространствах.* Труды 4-го Всес. матем. съезда, 1961, Т. 2, Ленинград, 1964, 201-206.

[2] K. Svoboda, *Über die Punktdeformation einer vollständig fokalen Pseudokongruenz.* Math. Nachr. (sous presse).

[3] A. Švec, *Déformation projective des congruences de droites dans S_n.* Czech. Math. J. 5(80), 1955, 546—558.

[4] A. Švec, *Projective Differential Geometry of Line Congruences.* Prague, 1965.